

**И. В. Разин, В. С. Эмдин**  
(Санкт-Петербург)

**О СИСТЕМЕ ИНВАРИАНТОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА  
ГРАДИЕНТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА  
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К АНАЛИЗУ ТЕКСТУРЫ**

Приведено выражение для определяемого в произвольном направлении нормированного момента энергетического спектра градиентного изображения произвольного порядка. Показано, что матричная форма записи позволяет получить аналитические выражения для главных моментов спектра и главных значений среднеквадратических частот градиентного изображения и соответствующих им направлений. Показано, что оценки указанных характеристик можно получить в плоскости пространственных переменных без выполнения прямого преобразования Фурье, что важно при решении задач экспресс-анализа изображений. Приведены экспериментальные результаты на ограниченном объеме тестовых изображений.

В задачах обработки и анализа изображений текстуре отводится, по-видимому, центральная роль [1]. Она присутствует во всех изображениях, начиная с изображений, получаемых с помощью спутниковых сканирующих устройств (в исследованиях по дистанционному зондированию земной поверхности), и заканчивая микроскопическими изображениями культур клеток и препаратов тканей (в биомедицинских исследованиях). Под текстурой понимают описание пространственной упорядоченности элементов изображения в пределах некоторого его локального участка [2]. Определенно можно отметить наиболее часто исследуемые характеристики текстуры, с помощью которых получены обнадеживающие результаты ее классификации. Так, в [3] отмечена полезность не только локальных статистических характеристик распределения яркости (среднего, дисперсии и других моментов), но и локальных пространственных статистик (числа перемен знака первой производной, среднего и дисперсии расстояний между локальными экстремумами). В работах [4, 5] предлагается метод выделения признаков, оценивающий статистики микро- и макроперепадов яркости и основанный на свертке изображения текстуры с рядом градиентных операторов. В работе [6] для обнаружения и классификации объектов на изображении используется некоторая линейная комбинация градиентных операторов вида

$$\sum_{n=0}^N a_n \nabla^n \{\varphi(x, y)\},$$

где  $a_n$  – весовой коэффициент;  $\nabla^n$  – градиентный оператор  $n$ -го порядка;  $\varphi(x, y)$  – функция яркости изображения. Применение такого рода линейной комбинации объясняется тем, что смысловая часть информации об изображении заключена в его контурах, т. е. тех его участках, на которых наблюдаются перепады яркости, а значит, и значительна величина модуля градиента. В работах [1, 6], например, в качестве основной характеристики для анализа текстуры предлагается использовать плотность перепадов (абсолютных изменений) яркости на единицу площади. Использование этой характеристики позволило получить надежную классификацию естественных текстур. Четыре центральных пространственных момента, описывающих форму автокорреляционной функции, предложены в работе [7] и также дали хороший результат классификации. Широко известен алгоритм выделения признаков на основе метода моментных инвариантов [8].

Многие идеи в упомянутых выше (и других) работах близки либо дополняют друг друга и продуктивны, поскольку дают хорошие результаты, однако они не создают целостной картины описания текстуры и имеют общий недостаток – в них отсутствует математическое обоснование выбранного признака классификации. Выбор того или иного признака (группы признаков), скорее, основан на опыте и в большой степени на интуиции исследователя.

В рамках предлагаемой математической модели описания текстуры предпринята попытка унифицировать и обобщить ряд высказанных ранее идей, используемых при измерении текстурных признаков. Содержательная ее часть является развитием предложений в [9, 10]. Так, в [9] показано, что энергетический спектр однородного изображения единственным образом описывается набором спектральных моментов  $m_{nk}$  и момент сколь угодно высокого порядка с точностью до постоянного множителя равен моменту второго порядка производных изображения по координатным осям:

$$m_{nk} = (2\pi)^2 (-1)^{(n+k)} j^{-(n+k)} \overline{\varphi_{xy}^{(n+k)}} \varphi_{xy}^{(n+k)}. \quad (1)$$

Такое соответствие позволяет получить оценку спектрального момента в плоскости пространственных переменных изображения. Для этого формируют исходный массив векторов

$$\{\varphi_{xy}^{(0+0)}, \varphi_{xy}^{(1+0)}, \varphi_{xy}^{(0+1)}, \varphi_{xy}^{(2+0)}, \dots, \varphi_{xy}^{(n+k)}\}.$$

Компонентами вектора являются оценки производных функции яркости  $\varphi$  изображения по осям в локальной окрестности каждого элемента изображения ( $n, k$  – порядок производной, взятой по координатным осям  $x$  и  $y$  соответственно). Таким образом, каждому элементу изображения ставят в соответствие вектор, отражающий поведение функции яркости в окрестности этого элемента. Массив векторов служит для вычисления ковариационной матрицы. Ненулевые элементы матрицы, стоящие вне ее главной диагонали, свидетельствуют о наличии корреляционных межкомпонентных связей. Вследствие этого существует потенциальная возможность сжатия информации, заключающаяся в реализации идеи диагонализации ковариационной матрицы, а следовательно, декорреляции этих связей. Однако нахождение собственных векторов ковариационной матрицы затруднено из-за значи-

тельного объема вычислений, возрастающего пропорционально росту числа компонент исходного вектора описания (размерности матрицы). Наряду с этим, как показано далее, процедура получает естественную простоту, если формировать исходный массив данных из двухкомпонентных векторов. В этом случае можно получить аналитические выражения для собственных векторов, имеющих ясную физическую интерпретацию.

Преобразуя исходную систему координат и применяя при этом математический аппарат матричной алгебры, можно получить главные моменты энергетического спектра изображения [10]. Они соответствуют экстремальным значениям момента в направлении осей повернутой системы координат и инвариантны к преобразованию вращения. Главные нормированные спектральные моменты однозначно определяют главные (экстремальные) значения среднеквадратической частоты спектра изображения, также инвариантные к повороту системы координат. Между инвариантными статистиками в частотной и пространственной областях анализа существует однозначное соответствие. Это соответствие можно продолжить, рассмотрев спектральные моменты высших порядков. Образующий при этом бесконечный ряд инвариантов служит для более «тонкого» описания текстуры.

Предположим, что к изображению многократно применяют градиентный оператор, формируя из него последовательность изображений градиента, лапласиана и т. д. В частотной области такая операция соответствует многократному умножению функции энергетического спектра на квадрат модуля вектора пространственной частоты. Рассмотрим выражение для нормированного спектрального момента функции  $G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2)$ , определяемого в направлении вектора  $\mathbf{u}^\lambda$ :

$$\mu_{\mathbf{u}^\lambda} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \omega_{\mathbf{u}^\lambda}^2 G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \quad (2)$$

где  $\omega_{\mathbf{u}^\lambda} = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}^\lambda)$  – скалярное произведение векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{u}^\lambda$ :  $\boldsymbol{\omega} = i\omega_1 + j\omega_2$  – вектор пространственной частоты с компонентами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $\mathbf{u}^\lambda = iu_1^\lambda + ju_2^\lambda$  – единичный вектор с компонентами  $u_1^\lambda = \cos\alpha^\lambda$  и  $u_2^\lambda = \sin\alpha^\lambda$  ( $\alpha^\lambda$  – угол наклона вектора  $\mathbf{u}^\lambda$  относительно направления оси  $\omega_1$ );  $\lambda$  – порядок градиентного оператора;

$$G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2) = \frac{|\boldsymbol{\omega}|^{2\lambda} G(\omega_1, \omega_2)}{\int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} |\boldsymbol{\omega}|^{2\lambda} G(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2}$$

– нормированный энергетический спектр изображения ( $\lambda = 0$ ), градиента ( $\lambda = 1$ ), лапласиана ( $\lambda = 2$ ) и т. д.,  $|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$  – модуль вектора пространственной частоты. Представим выражение (2) в матричной форме:

$$\mu_{\mathbf{u}^\lambda} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \left( \sum_{n=1}^2 \omega_n u_n^\lambda \right)^2 G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = [\mathbf{u}^\lambda]^T [\mathbf{S}^\lambda] [\mathbf{u}^\lambda], \quad (3)$$

где  $[\mathbf{u}^\lambda] = \begin{bmatrix} u_1^\lambda \\ u_2^\lambda \end{bmatrix}$  – вектор-столбец;  $\tau$  – индекс транспонирования;  $[\mathbf{S}^\lambda] = \begin{bmatrix} S_{11}^\lambda & S_{12}^\lambda \\ S_{21}^\lambda & S_{22}^\lambda \end{bmatrix}$  – матрица преобразования вектора  $\mathbf{u}^\lambda$ , элементы которой выражаются следующим образом:

$$S_{11}^\lambda = \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \omega_1^2 G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (4)$$

– нормированный момент в направлении  $\omega_1$ ,

$$S_{12}^\lambda = S_{21}^\lambda = \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \omega_1 \omega_2 G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (5)$$

– нормированный смешанный момент,

$$S_{22}^\lambda = \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \omega_2^2 G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (6)$$

– нормированный момент в направлении  $\omega_2$ .

В силу симметричности матрицы  $[\mathbf{S}^\lambda]$  корни характеристического уравнения ее определителя всегда действительны:

$$\mu_{\alpha_{1,2}}^\lambda = \frac{S_{11}^\lambda + S_{22}^\lambda \pm \sqrt{(S_{11}^\lambda - S_{22}^\lambda)^2 + 4(S_{12}^\lambda)^2}}{2}. \quad (7)$$

Соответствующие значениям  $\mu_{\alpha_1}^\lambda$  и  $\mu_{\alpha_2}^\lambda$  два ортогональных направления собственных векторов матрицы  $[\mathbf{S}^\lambda]$  выразим через их углы наклона относительно положительного направления оси  $\omega_1$ :

$$\alpha_{1,2}^\lambda = \arctg \frac{S_{22}^\lambda - S_{11}^\lambda \pm \sqrt{(S_{11}^\lambda - S_{22}^\lambda)^2 + 4(S_{12}^\lambda)^2}}{2S_{12}^\lambda}. \quad (8)$$

Матрица  $[\mathbf{S}^\lambda]$ , отнесенная к новым осям системы координат, ориентированным по направлениям собственных векторов, примет диагональный вид

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_1^\lambda) & \sin(\alpha_1^\lambda) \\ \cos(\alpha_2^\lambda) & \sin(\alpha_2^\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}^\lambda & S_{12}^\lambda \\ S_{21}^\lambda & S_{22}^\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1^\lambda) & \cos(\alpha_2^\lambda) \\ \sin(\alpha_1^\lambda) & \sin(\alpha_2^\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{\alpha_1}^\lambda & 0 \\ 0 & \mu_{\alpha_2}^\lambda \end{bmatrix}.$$

Элементы  $\mu_{\alpha_1}^\lambda$  и  $\mu_{\alpha_2}^\lambda$  диагональной матрицы называются главными нормированными моментами второго порядка – они определяют экстремальные значения спектрального момента  $\mu_{\mathbf{u}^\lambda}$  функции  $G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2)$  в направлении

собственных векторов. Главные моменты (7) инвариантны к повороту в силу инвариантности характеристического уравнения к преобразованию вращения. Элементы, стоящие вне главной диагонали матрицы, в повернутой на угол  $\alpha_{1,2}^\lambda$  системе координат принимают нулевые значения, т. е. компоненты пространственной частоты в преобразованной системе координат становятся некоррелированными.

Каждая пара главных моментов (7) при фиксированном  $\lambda$  порождает подсистему инвариантных характеристик, независимых от вращения и нестационарных изменений яркости изображения:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\alpha_1^\lambda} + \mu_{\alpha_2^\lambda} &= S_{11}^\lambda + S_{22}^\lambda, & (9a) \\ \mu_{\alpha_1^\lambda} - \mu_{\alpha_2^\lambda} &= \sqrt{(S_{11}^\lambda - S_{22}^\lambda)^2 + 4(S_{12}^\lambda)^2}, & (9б) \\ \mu_{\alpha_1^\lambda} \mu_{\alpha_2^\lambda} &= S_{11}^\lambda S_{22}^\lambda - (S_{12}^\lambda)^2; & (9в) \\ \frac{\mu_{\alpha_1^\lambda} - \mu_{\alpha_2^\lambda}}{\mu_{\alpha_1^\lambda} + \mu_{\alpha_2^\lambda}} &= \frac{\sqrt{(S_{11}^\lambda - S_{22}^\lambda)^2 + 4(S_{12}^\lambda)^2}}{S_{11}^\lambda + S_{22}^\lambda}. & (9г) \end{aligned} \right\} (9)$$

Наглядную графическую интерпретацию главных моментов (7) и выражений (9) позволяет получить годограф момента  $\mu_{\alpha^\lambda}$  – геометрическое место концов радиуса-вектора, выходящего из начала координат и имеющего длину  $\mu_{\alpha^\lambda}$ . Раскрывая выражение (3), с учетом (4)–(6) получим уравнение годографа в полярной системе координат:

$$\mu_{\alpha^\lambda} = S_{11}^\lambda \cos^2(\alpha^\lambda) + S_{12}^\lambda \sin(2\alpha^\lambda) + S_{22}^\lambda \sin^2(\alpha^\lambda). \quad (10)$$

Несложное преобразование (10) приводит к уравнению годографа в декартовой системе

$$S_{11}^\lambda \omega_1^2 + 2S_{12}^\lambda \omega_1 \omega_2 + S_{22}^\lambda \omega_2^2 - \left( \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right)^3 = 0. \quad (11)$$

Как следует из (9а), сумма моментов (4), (6) по двум ортогональным направлениям инвариантна к преобразованию вращения (выбору исходной системы координат). Поэтому можно дать следующее определение годографа момента: это кривая, для которой сумма длин любой произвольно ориентированной пары ортогональных радиусов-векторов является величиной постоянной. Форма годографа зависит от значений коэффициентов в (11). Предварительно получим для них необходимое ограничение, поскольку последние не могут принимать произвольные значения. Воспользовавшись неравенством Буняковского – Шварца  $S_{11}^\lambda S_{22}^\lambda \geq (S_{12}^\lambda)^2$  и преобразовав его, по-

лучим выражение для нормированного коэффициента корреляции компонент пространственной частоты:

$$k = \frac{S_{12}^\lambda}{\sqrt{S_{11}^\lambda S_{22}^\lambda}} \leq 1. \quad (12)$$

Значение коэффициента корреляции лежит в интервале  $[-1, +1]$  и является тем искомым ограничением, связывающим значения коэффициентов в уравнении (11). На рис. 1 приведены примеры годографов, позволяющие судить об их форме в зависимости от значения коэффициента корреляции (12) и оценки степени анизотропии, определяемой выражением (9г). Как видно, годограф является радиально-симметричной кривой, пересекающей оси частотной плоскости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $S_{11}^\lambda$  и  $S_{22}^\lambda$  соответственно. Большая и малая полуоси годографа равны главным моментам  $\mu_{\alpha_1}^\lambda$  и  $\mu_{\alpha_2}^\lambda$  соответственно (рис. 1, а). Направления главных моментов  $\mu_{\alpha_1}^\lambda$  и  $\mu_{\alpha_2}^\lambda$  составляют с направлением оси  $\omega_1$  углы  $\alpha_1^\lambda$  и  $\alpha_2^\lambda$  соответственно и ортогональны между собой.

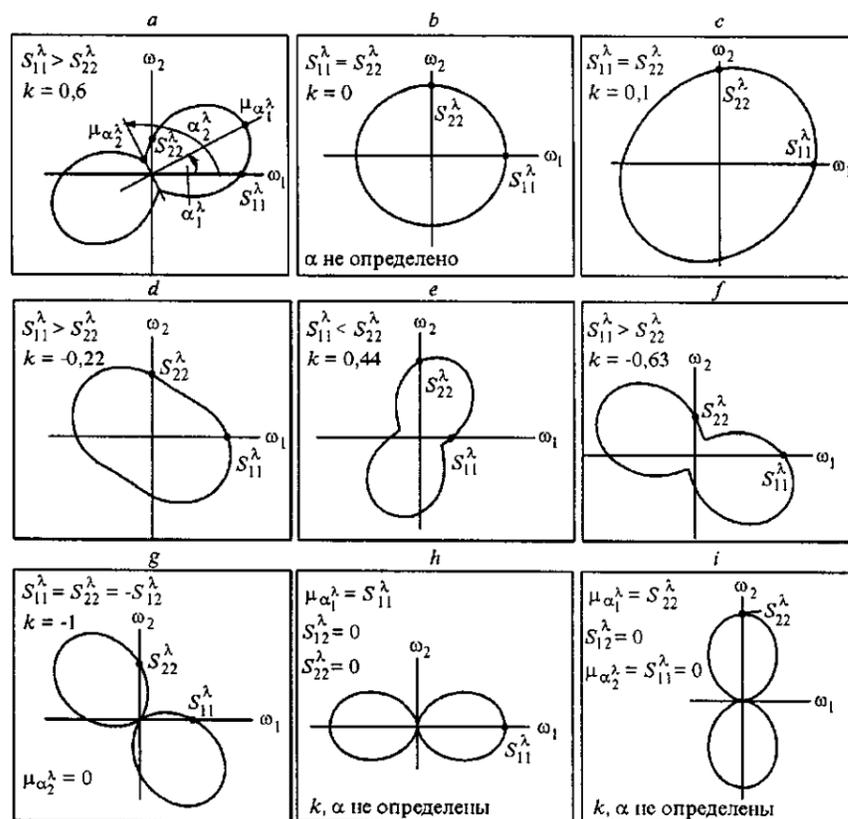


Рис. 1

Как следует из (11), годограф вырождается в окружность, если значение  $S_{12}^\lambda = 0$ , а  $S_{11}^\lambda = S_{22}^\lambda$ . В этом случае главные моменты равны между собой, а их направления не определены (рис. 1, *b*). Это соответствует изотропному изображению: оценка степени анизотропии, как и коэффициент корреляции, принимает нулевое значение. С увеличением по модулю коэффициента корреляции от 0 до 1 годограф из окружности эволюционирует в «восьмерку» (см. рис. 1, *b-g*). Изображение на рис. 1, *g* соответствует полностью анизотропному изображению: главный момент  $\mu_{a_2}^\lambda$  принимает нулевое значение, а

оценка степени анизотропии равна единице. Полностью анизотропное изображение представляет собой линейчатую (полосатую) структуру, что объясняется линейной зависимостью  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Изображенные на рис. 1, *h, i* годографы также соответствуют полностью анизотропным изображениям, хотя коэффициент корреляции для них не определен. Отметим, что по знаку коэффициента корреляции судят об ориентации большой полуоси годографа. Так, если  $k > 0$ , то большая полуось годографа ориентирована из третьего в первый квадрант частотной плоскости (см. рис. 1, *a, c, e*), если же  $k < 0$ , то из четвертого во второй квадрант (см. рис. 1, *d, f, g*).

От главного момента можно легко перейти к пространственной статистике – среднеквадратической частоте спектра. Поскольку для любого  $\lambda$  нормированный энергетический спектр  $G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2)$  обладает всеми свойствами двумерной функции плотности распределения частот, то нормированный момент  $\mu_u^\lambda$  представляет собой средний квадрат компоненты  $\omega_{u^\lambda}$  вектора пространственной частоты:  $\mu_u^\lambda = \overline{\omega_{u^\lambda}^2}$ . В силу симметрии спектра  $G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2)$  относительно начала координат частотной плоскости и симметричности пределов интегрирования в (2) момент первого порядка компоненты  $\omega_{u^\lambda}$  равен нулю. Вследствие этого средний квадрат компоненты  $\omega_{u^\lambda}$  равен ее дисперсии, тогда корень из дисперсии компоненты  $\omega_{u^\lambda}$  представляет собой среднеквадратическую частоту спектра  $G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2)$  в направлении вектора  $u^\lambda$ :  $\sqrt{\overline{\omega_{u^\lambda}^2}} = \sqrt{\mu_u^\lambda}$ . Следовательно,  $\sqrt{\overline{\omega_{a_{1,2}}^2}} = \sqrt{\mu_{a_{1,2}}^\lambda}$  – главные значения среднеквадратической частоты в направлении (8) собственных векторов. Таким образом, выражение (7) для каждого произвольного порядка градиентного оператора  $\lambda$  определяет на частотной плоскости пару главных значений среднеквадратической частоты.

В отличие от среднеквадратической частоты в фиксированном направлении «круговая» среднеквадратическая частота дает интегральную оценку степени высокочастотного характера изображения, учитывая вклад в ее величину спектральных компонент от всех направлений на частотной плоскости. Определим круговую среднеквадратическую частоту как среднеквадратическое значение модуля вектора пространственной частоты энергетического спектра (корень из выражения (9а)):

$$\sqrt{|\omega|_\lambda^2} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^2 G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \right)^{1/2} = \sqrt{S_{11}^\lambda + S_{22}^\lambda}.$$

Таким образом, круговая среднеквадратическая частота энергетического спектра равна корню из суммы дисперсий компонент вектора пространственной частоты.

Как видно, выражение (7) порождает бесконечную систему главных нормированных моментов, определяемую порядком  $\lambda$  градиентного оператора. Так, с учетом (4)–(6) выражения (7), (8) для главных нормированных моментов энергетического спектра изображения и их направлений ( $\lambda=0$ ) принимают соответственно следующий вид:

$$\mu_{\alpha_{1,2}}^0 = \frac{\mu_{20} + \mu_{02} \pm \sqrt{(\mu_{20} - \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2}}{2}, \quad (13)$$

$$\alpha_{1,2}^0 = \arctg \frac{\mu_{02} - \mu_{20} \pm \sqrt{(\mu_{20} - \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2}}{2\mu_{11}}. \quad (14)$$

Заметим, что инварианты (9а), (9б) при  $\lambda=0$  формально совпадают с двумя инвариантами, полученными в [8].

Раскрывая (4)–(6) при  $\lambda=1$  и подставляя их в (7) и (8), получим выражения для главных моментов нормированного энергетического спектра градиента и соответствующих им направлений:

$$\mu_{\alpha_{1,2}}^1 = \frac{\mu_{40} + 2\mu_{22} + \mu_{04} \pm \sqrt{(\mu_{40} - \mu_{04})^2 + 4(\mu_{31} + \mu_{13})^2}}{2(\mu_{20} + \mu_{02})}, \quad (15)$$

$$\alpha_{1,2}^1 = \arctg \frac{\mu_{04} - \mu_{40} \pm \sqrt{(\mu_{40} - \mu_{04})^2 + 4(\mu_{31} + \mu_{13})^2}}{2(\mu_{31} + \mu_{13})}. \quad (16)$$

Этот ряд можно продолжить далее, всякий раз увеличивая порядок  $\lambda$  градиентного оператора на единицу. В свою очередь, каждая пара главных моментов (13), (15) образует бесконечную подсистему инвариантов типа (9).

Важно, что главным спектральным моментам (13) и их направлениям (14) (равно как и среднеквадратическим частотам) можно найти адекватное соответствие в пространстве характеристик описания изображения, т. е. непосредственно в плоскости пространственных переменных изображения. Определим для этого среднюю энергию производной изображения по направлению единичного вектора  $\mathbf{V}^0$ :

$$\overline{(\varphi_{\mathbf{V}^0}^{(1)})^2} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (\mathbf{V}^0, \nabla\varphi)^2 W(\varphi_{xy}^{(1+0)}, \varphi_{xy}^{(0+1)}) d\varphi_{xy}^{(1+0)} d\varphi_{xy}^{(0+1)}, \quad (17)$$

где

$$\varphi_{\mathbf{V}^0}^{(1)} = (\mathbf{V}^0, \nabla\varphi) = \varphi_{xy}^{(1+0)} \cos\beta^0 + \varphi_{xy}^{(0+1)} \sin\beta^0$$

– производная первого порядка изображения по направлению вектора  $\mathbf{V}^0 = i \cos \beta^0 + j \sin \beta^0$ ;  $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$  – оператор градиента (Гамильтона);  $W(\varphi_{xy}^{(1+0)}, \varphi_{xy}^{(0+1)})$  – совместная плотность распределения производных изображения по направлениям осей  $x$  и  $y$ . Раскрывая скалярное произведение под знаком интеграла в (17) и представляя выражение в матричной форме, получим

$$\overline{(\varphi_{\mathbf{V}^0}^{(1)})^2} = [\mathbf{V}^0]^T [\mathbf{A}^0] [\mathbf{V}^0],$$

где

$$[\mathbf{A}^0] = \begin{bmatrix} \frac{(\varphi_{xy}^{(1+0)})^2}{\varphi_{xy}^{(1+0)} \varphi_{xy}^{(0+1)}} & \frac{\varphi_{xy}^{(1+0)} \varphi_{xy}^{(0+1)}}{(\varphi_{xy}^{(0+1)})^2} \end{bmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения матрицы  $[\mathbf{A}^0]$  и направления ее собственных векторов выражаются следующим образом:

$$N_{1,2}^0 = \frac{(\varphi_{xy}^{(1+0)})^2 + (\varphi_{xy}^{(0+1)})^2 \pm \sqrt{((\varphi_{xy}^{(1+0)})^2 - (\varphi_{xy}^{(0+1)})^2)^2 + 4 \left( \frac{\varphi_{xy}^{(1+0)} \varphi_{xy}^{(0+1)}}{\varphi_{xy}^{(1+0)} \varphi_{xy}^{(0+1)}} \right)^2}}{2}, \quad (18)$$

$$\beta_{1,2}^0 = \arctg \frac{(\varphi_{xy}^{(0+1)})^2 - (\varphi_{xy}^{(1+0)})^2 \pm \sqrt{((\varphi_{xy}^{(1+0)})^2 - (\varphi_{xy}^{(0+1)})^2)^2 + 4 \left( \frac{\varphi_{xy}^{(1+0)} \varphi_{xy}^{(0+1)}}{\varphi_{xy}^{(1+0)} \varphi_{xy}^{(0+1)}} \right)^2}}{2 \left( \frac{\varphi_{xy}^{(1+0)} \varphi_{xy}^{(0+1)}}{\varphi_{xy}^{(1+0)} \varphi_{xy}^{(0+1)}} \right)}. \quad (19)$$

Выражение (18) имеет ясный физический смысл и определяет экстремальные значения средней энергии производной изображения, если производная взята по направлениям собственных векторов матрицы  $[\mathbf{A}^0]$ . Эти направления замечательны еще и тем, что средняя взаимная энергия производных изображения по направлениям собственных векторов принимает нулевые значения. Другими словами, поворот исходной системы координат до совмещения осей с собственными векторами приводит к некоррелированности производных изображения по направлениям осей повернутой системы.

Учитывая (1) и сравнивая (13) и (14) с выражениями (18) и (19) соответственно, установим следующую связь между главными моментами и их направлениями:

$$N_{1,2}^0 / m_{00} = \mu_{1,2}^0; \quad \beta_{1,2}^0 = \alpha_{1,2}^0. \quad (20)$$

Таким образом, главный момент нормированного энергетического спектра  $G_{H\lambda}(\omega_1, \omega_2)$  и главный момент плотности распределения производных изображения по координатным осям  $W(\varphi_{xy}^{(1+0)}, \varphi_{xy}^{(0+1)})$  (нормированный на энергию изображения  $m_{00}$ ) равны между собой и совпадают по направлениям.

Из (20) следует, что главные значения среднеквадратической частоты энергетического спектра изображения определяются выражением

$$\sqrt{N_{1,2}^0 / (\overline{\varphi - \bar{\varphi}})^2} = \sqrt{\mu_{1,2}^0} = \sqrt{\omega_{\alpha_{1,2}}^2} = 2\pi \sqrt{f_{\alpha_{1,2}}^2}, \quad (21)$$

где  $f = \omega/2\pi$  (изображение центрировано).

Проводя дальнейшую аналогию и определяя соответствие в плоскости пространственных переменных для выражений (15), (16), рассмотрим производную градиента изображения по вектору  $\mathbf{V}^1$ . Это векторное поле обозначим как

$$\frac{d\nabla\varphi}{d\mathbf{V}^1} = V_1^1 \nabla\varphi_{xy}^{(1+0)} + V_2^1 \nabla\varphi_{xy}^{(0+1)} = \nabla(\mathbf{V}^1, \nabla\varphi),$$

где  $\mathbf{V}^1 = \mathbf{i}V_1^1 + \mathbf{j}V_2^1$ ;  $V_1^1 = \cos\beta^1$ ;  $V_2^1 = \sin\beta^1$ ;  $\nabla\varphi_{xy}^{(1+0)}$  – градиент производной изображения по направлению оси  $x$ ;  $\nabla\varphi_{xy}^{(0+1)}$  – градиент производной изображения по направлению оси  $y$ ;  $(\mathbf{V}^1, \nabla\varphi)$  – производная изображения по направлению вектора  $\mathbf{V}^1$ .

Как видно, производная градиента изображения по вектору  $\mathbf{V}^1$  равна градиенту от производной изображения  $(\mathbf{V}^1, \nabla\varphi)$ , взятой в направлении вектора  $\mathbf{V}^1$ . Определим энергию полученного векторного поля, представив квадратичную форму в матричном виде:

$$\begin{aligned} \overline{(\nabla(\mathbf{V}^1, \nabla\varphi))^2} &= \overline{(V_1^1 \nabla\varphi_{xy}^{(1+0)} + V_2^1 \nabla\varphi_{xy}^{(0+1)})^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (V_1^1 \nabla\varphi_{xy}^{(1+0)} + V_2^1 \nabla\varphi_{xy}^{(0+1)})^2 W(\nabla\varphi_{xy}^{(1+0)}, \nabla\varphi_{xy}^{(0+1)}) d\nabla\varphi_{xy}^{(1+0)} d\nabla\varphi_{xy}^{(0+1)} = \\ &= [\mathbf{V}^1]^T [\mathbf{A}^1] [\mathbf{V}^1] = [\mathbf{V}^1]^T \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix} [\mathbf{V}^1], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^1 &= \overline{(\nabla\varphi_{xy}^{(1+0)})^2} = \overline{(\mathbf{i}\varphi_{xy}^{(2+0)} + \mathbf{j}\varphi_{xy}^{(1+1)})^2} = \overline{(\varphi_{xy}^{(2+0)})^2} + \overline{(\varphi_{xy}^{(1+1)})^2}; \\ A_{12}^1 &= A_{21}^1 = \overline{(\nabla\varphi_{xy}^{(1+0)} \nabla\varphi_{xy}^{(0+1)})} = \end{aligned}$$

$$= (\mathbf{i}\varphi_{xy}^{(2+0)} + \mathbf{j}\varphi_{xy}^{(1+1)}) (\mathbf{i}\varphi_{xy}^{(1+1)} + \mathbf{j}\varphi_{xy}^{(0+2)}) = \overline{\varphi_{xy}^{(2+0)}\varphi_{xy}^{(1+1)}} + \overline{\varphi_{xy}^{(1+1)}\varphi_{xy}^{(0+2)}};$$

$$A_{22}^1 = \overline{(\nabla\varphi_{xy}^{(0+1)})^2} = \overline{(\mathbf{i}\varphi_{xy}^{(1+1)} + \mathbf{j}\varphi_{xy}^{(0+2)})^2} = \overline{(\varphi_{xy}^{(1+1)})^2} + \overline{(\varphi_{xy}^{(0+2)})^2};$$

$W(\nabla\varphi_{xy}^{(1+0)}, \nabla\varphi_{xy}^{(0+1)})$  – плотность распределения градиентов от производных изображения по координатным осям  $x$  и  $y$ .

Корни характеристического уравнения матрицы  $[A^1]$  определяют экстремальные значения средней энергии модуля градиента от производной изображения, взятой по направлениям собственных ее векторов:

$$N_{1,2}^1 = \frac{\overline{(\varphi_{xy}^{(2+0)})^2} + 2\overline{(\varphi_{xy}^{(1+1)})^2} + \overline{(\varphi_{xy}^{(0+2)})^2} \pm \sqrt{\left(\overline{(\varphi_{xy}^{(2+0)})^2} - \overline{(\varphi_{xy}^{(0+2)})^2}\right)^2 + 4\left(\overline{\varphi_{xy}^{(2+0)}\varphi_{xy}^{(1+1)}} + \overline{\varphi_{xy}^{(1+1)}\varphi_{xy}^{(0+2)}}\right)^2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\pm \sqrt{\left(\overline{(\varphi_{xy}^{(2+0)})^2} - \overline{(\varphi_{xy}^{(0+2)})^2}\right)^2 + 4\left(\overline{\varphi_{xy}^{(2+0)}\varphi_{xy}^{(1+1)}} + \overline{\varphi_{xy}^{(1+1)}\varphi_{xy}^{(0+2)}}\right)^2}}{2}, \quad (22)$$

$$\beta_{1,2}^1 = \frac{\overline{(\varphi_{xy}^{(0+2)})^2} - \overline{(\varphi_{xy}^{(2+0)})^2} \pm \sqrt{\left(\overline{(\varphi_{xy}^{(2+0)})^2} - \overline{(\varphi_{xy}^{(0+2)})^2}\right)^2 + 4\left(\overline{\varphi_{xy}^{(2+0)}\varphi_{xy}^{(1+1)}} + \overline{\varphi_{xy}^{(1+1)}\varphi_{xy}^{(0+2)}}\right)^2}}{2\left(\overline{\varphi_{xy}^{(2+0)}\varphi_{xy}^{(1+1)}} + \overline{\varphi_{xy}^{(1+1)}\varphi_{xy}^{(0+2)}}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\pm \sqrt{\left(\overline{(\varphi_{xy}^{(2+0)})^2} - \overline{(\varphi_{xy}^{(0+2)})^2}\right)^2 + 4\left(\overline{\varphi_{xy}^{(2+0)}\varphi_{xy}^{(1+1)}} + \overline{\varphi_{xy}^{(1+1)}\varphi_{xy}^{(0+2)}}\right)^2}}{2\left(\overline{\varphi_{xy}^{(2+0)}\varphi_{xy}^{(1+1)}} + \overline{\varphi_{xy}^{(1+1)}\varphi_{xy}^{(0+2)}}\right)}. \quad (23)$$

Поворот системы координат до совмещения осей с собственными векторами приводит матрицу  $[A^1]$  к диагональному виду, т. е. градиенты от производных, взятых по направлениям осей повернутой системы координат, становятся некоррелированными. Сравнивая (15) и (16) с выражениями (22) и (23) соответственно, получим

$$N_{1,2}^1 / \left( \overline{(\varphi_{xy}^{(1+0)})^2} + \overline{(\varphi_{xy}^{(0+1)})^2} \right) = \mu_{\alpha_{1,2}}^1, \quad \beta_{1,2}^1 = \alpha_{1,2}^1.$$

Таким образом, главный нормированный момент  $\mu_{\alpha_{1,2}}^1$  энергетического спектра градиента изображения равен отношению главного момента плотности распределения градиентов от производных изображения по координат-

ным осям  $W(\nabla\varphi_{xy}^{(l+0)}, \nabla\varphi_{xy}^{(0+1)})$  к энергии модуля градиента изображения.

Можно провести дальнейшую аналогию для  $\lambda = 2$  и т. д.

С использованием разработанной математической модели описания текстуры проведены экспериментальные исследования на множестве тестовых изображений, которые ставили своей целью исследование метрологических аспектов анализа модели и были ограничены нулевым порядком градиентного изображения. Для проведения эксперимента разработан пакет оригинальных программ на основе системы программирования Delphi Borland 5, позволяющий синтезировать тестовые изображения и получать необходимые оценки описания.

Исследования проведены на серии последовательностей тестовых изображений. В качестве модели тестового изображения была использована про-

Номер серии	$L_{np}$	$F$	$L_{cp}$	СКО(L)	СКО(L)/ $L_{cp}$ , %
1	10	0.10000	4.09372	0.153903	3.76
2	20	0.05000	7.17611	0.414517	5.78
3	30	0.03333	10.29632	0.693774	6.74
4	40	0.02500	13.49287	0.979001	7.26
5	50	0.02000	16.76827	1.243588	7.42
6	60	0.01666	19.99594	1.489079	7.45
7	70	0.01428	23.29936	1.746044	7.49
8	80	0.01250	26.58765	1.995315	7.50
9	90	0.01111	29.74133	2.219822	7.46
10	100	0.01000	33.10602	2.486242	7.51
11	110	0.00909	36.61046	2.776909	7.59
12	120	0.00833	39.45186	2.943180	7.46
13	130	0.00769	42.69321	3.177868	7.44
14	140	0.00714	46.56263	3.528264	7.58
15	150	0.00666	50.32415	3.870034	7.69
16	160	0.006250	53.520325	4.108746	7.68
17	170	0.005882	56.234660	4.248438	7.55
18	180	0.005556	58.865133	4.371348	7.43
19	190	0.005263	61.787015	4.556109	7.37
20	200	0.005000	65.261371	4.831430	7.40

пространственная синусоидальная волна, описанная для случая дискретного растра выражением

$$\varphi(k, n) = A \sin 2\pi(f_x k + f_y n).$$

Каждая последовательность состояла из 36 изображений, имеющих одинаковое значение пространственной частоты  $F = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$  и различающихся между собой ориентацией  $\alpha_1^0 = \text{arctg}(f_y/f_x)$  синусоидальной волны на пространственной плоскости. Ориентация волны от изображения к изображению в последовательности изменялась с интервалом  $5^\circ$  от  $-90$  до  $85^\circ$  (по 36 направлениям). Амплитуды волны любого изображения последовательности были одинаковы и задавались равными 100 уровням квантования. Для каждого изображения последовательности была получена глобальная (по всему изображению) оценка среднеквадратической частоты, определяемая формулами (21), (18):

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{N_1^0 / (\Phi - \bar{\Phi})^2} = \sqrt{f_{\alpha_1^0}^2} \quad (24)$$

(изображение центрировано).

Далее по 36 оценкам среднеквадратической частоты, полученным для изображений этой последовательности, вычислялись среднее и среднеквадратическая оценка (СКО) величины  $L$ , обратной (24).

Аналогичным образом получены среднее и СКО величины  $L$  для каждой последовательности изображений. Каждая последовательность изображений отличалась друг от друга значением пространственной частоты. Задаваемое (истинное) значение пространственной длины  $L_{\text{пр}}$  синусоидальной волны изменялось от последовательности к последовательности с шагом 10 элементов растра (от 10 до 200).

Результаты экспериментальных исследований приведены в таблице. Исследования доказали практическую инвариантность (24) синусоидальной волны к ее ориентации  $\alpha_1^0$  на пространственной плоскости. Это следует из

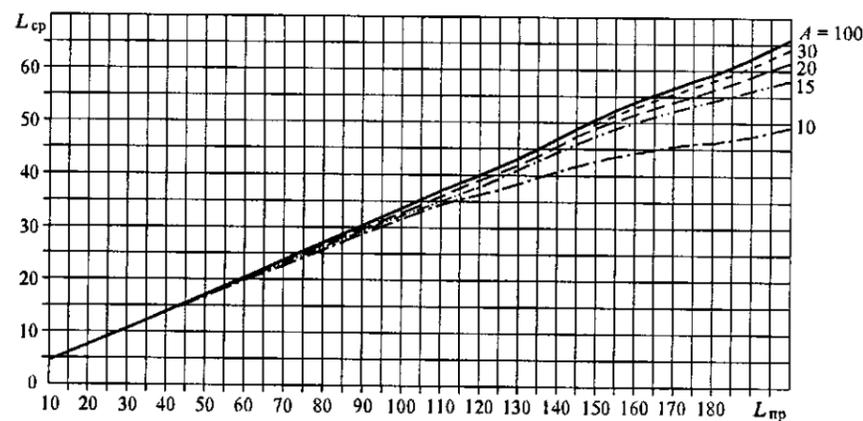


Рис. 2

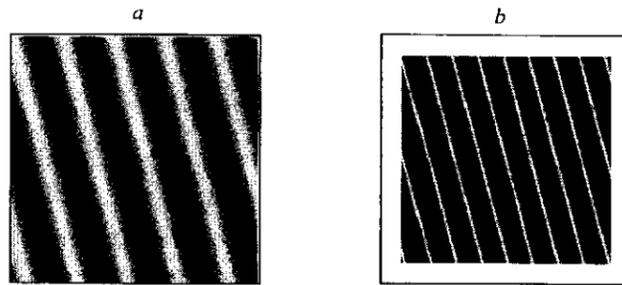


Рис. 3

вычисляемого отношения  $СКО(L)/L_{ср}$ . Видно, что отношение  $СКО(L)/L_{ср}$  не превышает 7,69 % для 15-й серии последовательности.

Полученная зависимость оценки  $L_{ср}$  от задаваемой величины пространственной длины волны  $L_{пр}$  приведена на графике (рис. 2) и имеет линейный характер. Аналогичные зависимости оценки  $L_{ср}$  от задаваемой длины волны  $L_{пр}$  получены для множества изображений, отличающихся амплитудой синусоидальной волны (см. рис. 2). Видно, что с изменением амплитуды синусоидальной волны на порядок (от 100 до 10) на больших длинах волн имеет место незначительное изменение линейной зависимости. Этот фактор, однако, не играет существенной роли при решении практических задач анализа текстуры.

Проведены также исследования локальных оценок среднеквадратической частоты, формируемых в некоторой окрестности каждого элемента изображения. На рис. 3, *a* приведено изображение синусоидальной волны с амплитудой  $A=100$ , ориентацией  $\alpha_1^0=15^\circ$  и пространственной частотой  $F=0,0259$ . На рис. 4, *a* дано то же изображение, но с амплитудой волны  $A=10$ . Позиционное положение локальных оценок среднеквадратической частоты изображений на рис. 3, *a* и рис. 4, *a* иллюстрируют рис. 3, *b* и рис. 4, *b* соответственно. Из анализа рисунков следует, что оценка среднеквадратической частоты практически не зависит от амплитуды и принимает максимальные значения в окрестности линий нулевого уровня синусоидальной волны [11, 12]. Это объясняется тем, что средняя энергия производной изображения, взятой в направлении градиента (направление, перпендикулярное ориентации синусоидальной волны  $\alpha_1^0$ ), принимает экстремальные значения в

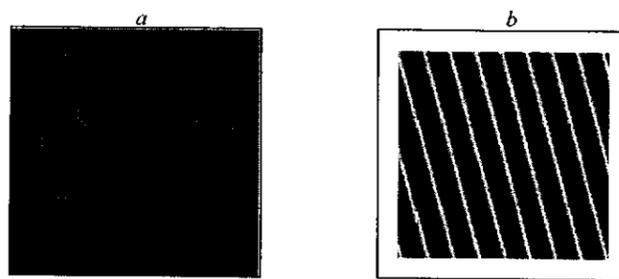


Рис. 4

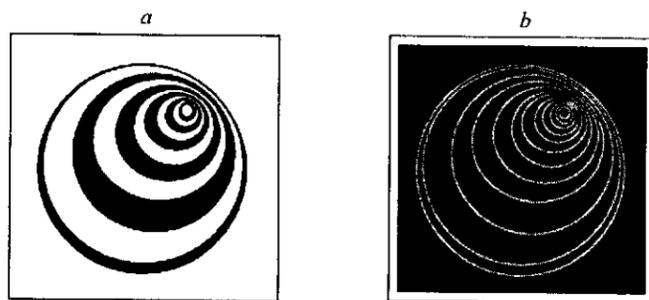


Рис. 5

окрестности линий нулевого уровня. Это подтверждается следующим результатом. На рис. 5, *a, b* представлены исходное изображение и позиционное положение его локальных оценок среднеквадратической частоты соответственно. Сравнительный анализ изображений показывает, что оценка среднеквадратической частоты принимает максимальные значения на контурных элементах изображения (см. рис. 5, *a*) там, где велико значение градиента. Причем величина оценки не зависит от ориентации контурного отрезка. Таким образом, оценивание локальной среднеквадратической частоты эквивалентно операции оконтуривания изображения, а сама оценка отражает степень высокочастотного характера структуры изображения. Можно предположить, что среднеквадратические частоты будут выявлять все более тонкую структуру анализируемого исходного изображения по мере увеличения порядка  $\lambda$  градиентного оператора.

Предложенная модель описания текстуры потенциально позволяет сформировать бесконечную систему инвариантных пространственных статистик. На практике же размерность признакового пространства ограничена. Расширение его объясняется желанием достичь более высоких вероятностных оценок при решении задач классификации текстуры.

Экспериментальные исследования показали, что использование оценок инвариантных среднеквадратических частот спектров градиентных изображений при решении ряда прикладных задач анализа и классификации текстуры позволит получить, с одной стороны, компактные оценки для изображений одного класса и, с другой – оценки для изображений разных классов, которые будут отличаться друг от друга.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харалик Р. М. Статистический и структурный подходы к описанию текстур // ТИИЭР. 1979. 67, № 5. С. 98.
2. Прэтт У. К., Фожра О. Д. Применение моделей стохастических структур для обработки изображений // ТИИЭР. 1981. 69, № 5. С. 54.
3. Ярославский Л. П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии. М.: Радио и связь, 1987.
4. Баждрова И. Б., Разин И. В., Тетерин В. В. Анализ изображений с помощью градиентных операций. Тбилиси: Изд-во ГПИ, 1980.

5. Laws K. I. Textured image segmentation // Image Procession Institute, Univ. Southern California, 1980. Rep. 940.
6. Эндрюс Г. Применение вычислительных машин для обработки изображений. М.: Энергия, 1977.
7. Эндрюс Г., Коулмен Г. Сегментация изображений при помощи автоматической классификации // ТИИЭР. 1979. 67, № 5. С. 82.
8. Ну М. К. Visual pattern recognition by moment invariants // IRE Trans. Inf. Theory. 1962. IT-8, N 2. P. 179.
9. Разин И. В., Эмдин В. С. Оценка спектральных моментов через статистики перепадов яркости изображения // Автометрия. 2003. 39, № 2. С. 100.
10. Разин И. В., Тетерин В. В. Математическая модель для экспресс-анализа степени сходства изображений // Оптический журнал. 2001. 68, № 11. С. 33.
11. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М.: Мир, 1976.
12. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967.

*Санкт-Петербургский государственный  
университет телекоммуникаций им. М. А. Бонч-Бруевича,  
E-mail: kochan@sut.ru*

*Поступила в редакцию  
26 июня 2003 г.*