

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
А В Т О М Е Т Р И Я

---

2003, том 39, № 4

УДК 681.3.06

С. Т. Васьков, В. М. Ефимов, А. Л. Резник

(Новосибирск)

**БЫСТРАЯ ЦИФРОВАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ СИГНАЛОВ  
И ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА ЭНЕРГИИ**

Разработан и описан метод быстрого решения в пространственной области задачи, связанной с восстановлением исходного сигнала (изображения) по набору изображений низкого разрешения, отличающихся взаимным координатным смещением. Предложенные алгоритмы и реализованная на их основе вычислительная схема построены таким образом, что из всего класса цифровых сигналов, удовлетворяющих зарегистрированной системе наблюдений, выбирается сигнал с наименьшей энергией (дисперсией).

**Введение.** Во многих научно-технических областях и практических приложениях информатики возникает необходимость оценивания идеального исходного сигнала (изображения) по результатам измерений, осуществляемых с помощью фотолинеек (фотоматриц) низкого разрешения. Использование фотоматриц с высоким пространственным разрешением зачастую затруднено высокими ценовыми затратами, а иногда (например, для матриц ИК-диапазона) возникающие сложности связаны с технологическими проблемами изготовления таких приемных устройств.

В данной работе эту задачу восстановления исходного сигнала (изображения) с высоким пространственным разрешением предлагается решать с помощью регулируемого субпиксельного сканирования, когда исходный сигнал восстанавливается по набору измерений, каждое из которых получено с помощью траекторного сдвига регистрирующей фотоприемной линейки (фотоматрицы) с дискретностью, меньшей линейных размеров фотоэлемента (линейных размеров интегрирующей апертуры). Таким образом, имея набор цифровых изображений (отсчетов сигнала), сдвинутых одно относительно другого на величину, меньшую линейных размеров интегрирующего элемента фотоматрицы, необходимо с помощью оптимальной обработки оценить исходное изображение, добиваясь максимально высокого пространственного разрешения.

**Постановка задачи.** Задача оценивания исходного изображения в зависимости от применяемого способа регистрации, который в нашем случае описывается двумя характеристиками: траекторией перемещения (сканирования) фотоматрицы и частотой съемки – возникает в различных вариантах. В частности, режим регистрации, рассматриваемый в данной работе, приво-

дит к недоопределенной задаче, когда наблюдавшихся данных в принципе недостаточно для однозначного восстановления сигнала (изображения), но тем не менее его статистически обоснованную оценку необходимо построить. Многие авторы [1–5], занимающиеся исследованиями в области цифровой обработки сигналов и изображений, разработали математические модели, вычислительные схемы и алгоритмы, адаптация которых к условиям конкретно рассматриваемых прикладных проблем позволяет построить достаточно эффективные схемы их решения. Например, при классическом подходе [6] такую статистически обоснованную оценку обычно получают алгебраическими методами посредством псевдообращения матриц. Получаемое в результате решение имеет ряд достоинств, но также обладает и определенными недостатками. Один из них заключается в том, что решение, полученное с помощью псевдообращения, в общем случае не сбалансировано (сумма весовых коэффициентов, с которыми входят в решение отсчеты-наблюдения, различна для различных элементов формируемого сигнала-изображения), а это ведет к увеличению дисперсии восстанавливаемого поля, что не всегда приемлемо.

В отличие от классического подхода, приводящего к решению с минимальной нормой, мы в этой работе ищем решение с минимальной дисперсией (энергией), что в общем случае не одно и то же. Решение с минимальной нормой – это «наименее яркий» сигнал, отвечающий системе проведенных наблюдений, в то время как решение с минимальной дисперсией из всех изображений, удовлетворяющих системе наблюдений, выбирает «наиболее гладкое». Далее будет показано, в каких случаях эти решения совпадают, и приведены конструктивные алгоритмы их ускоренного нахождения в одномерном и двумерном случаях.

**Восстановление цифрового сигнала с минимальной дисперсией (одномерный случай).** Как уже отмечалось в постановочной части, задачи нахождения сигнала с минимальной нормой и минимальной дисперсией, решаемые на основе одних и тех же наблюдавшихся данных, полученных в результате субпиксельного сканирования исходного изображения, вообще говоря, имеют не совпадающие между собой решения.

Покажем, что при соблюдении определенных условий на линейные размеры восстанавливаемого поля эти решения совпадают, и приведем конструктивный алгоритм ускоренной реконструкции такого сигнала, не требующий в отличие от классического подхода обращения сверхбольших матриц.

Рассмотрим схему регистрации, приведенную на рис. 1. Здесь число  $N$ , соответствующее размерности восстанавливаемого вектора  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , кратно количеству элементов разрешения  $l$ , попадающих в интегрирующую апертуру, т. е. размер поля (в одномерном случае размер интервала) сканирования в целое число раз превосходит размер апертуры:  $N = n \times l$ .

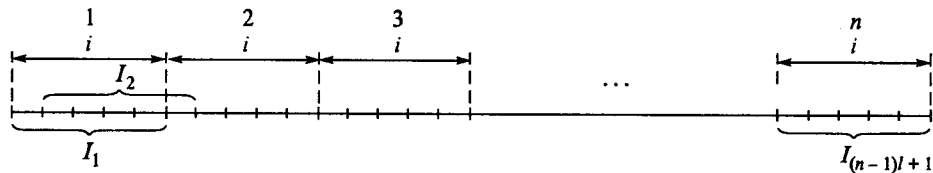


Рис. 1. Схема регистрации одномерного сигнала ( $l$  – размер сканирующей апертуры-интегратора;  $I_1, I_2, \dots, I_{(n-1)l+1}$  – результаты измерений)

Запишем систему уравнений, отвечающую вектору наблюдений  $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_{(n-1)l+1})$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_l = I_1, \\ x_2 + x_3 + \dots + x_{l+1} = I_2, \\ \vdots \\ x_{(n-1)l+1} + x_{(n-1)l+2} + \dots + x_{nl} = I_{(n-1)l+1}. \end{cases} \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что в этом случае среднее значение сигнала

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \\ &= \frac{(x_1 + \dots + x_l) + (x_{l+1} + \dots + x_{2l}) + \dots + (x_{(n-1)l+1} + \dots + x_{nl})}{N} = \\ &= \frac{I_1 + I_{l+1} + I_{2l+1} + \dots + I_{(n-1)l+1}}{N} \end{aligned} \quad (2)$$

является константой, выражающейся через элементы вектора наблюдений  $\mathbf{I}$  и не зависящей от переменных  $x_i$ . Теперь, используя (2), можно непосредственно доказать, что поиск решения, минимизирующего норму, эквивалентен поиску решения, минимизирующего дисперсию.

Напомним, что при поиске решения с минимальной нормой должно минимизироваться выражение

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \Rightarrow \min. \quad (3)$$

Аналогично запишем и преобразуем выражение для дисперсии

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i^2 - 2\langle x \rangle x_i + \langle x \rangle^2) = \\ &= \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \frac{1}{N-1} \frac{(I_1 + I_{l+1} + I_{2l+1} + \dots + I_{(n-1)l+1})^2}{N} = \\ &= \frac{1}{N-1} \|x\|^2 - \text{const} \Rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4)$$

Полученное выражение отличается от соотношения (3) лишь постоянным множителем и дополнительным слагаемым, не зависящим от переменных  $x_i$ , поэтому задачи (3) и (4) имеют одно и то же решение. Таким образом, при размерах восстанавливаемого поля  $N = n \times l$  задача минимизации нормы решения (3) и задача минимизации его дисперсии (4) полностью эквивалентны.

Для нахождения этого решения зафиксируем свободные переменные  $x_1, \dots, x_{l-1}$  и, используя соотношения (1), выразим через них остальные переменные  $x_l, x_{l+1}, \dots, x_N$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_l = I_1 - x_1 - \dots - x_{l-1}, \\ x_{l+1} = x_1 + (I_2 - I_1), \\ x_{l+2} = x_2 + (I_3 - I_2), \\ \vdots \\ x_{2l-1} = x_{l-1} + (I_l - I_{l-1}), \\ x_{2l} = I_1 - x_1 - \dots - x_{l-1} + (I_{l+1} - I_l), \\ \\ x_{2l+1} = x_1 + (I_2 - I_1) + (I_{l+2} - I_{l+1}), \\ x_{2l+2} = x_2 + (I_3 - I_2) + (I_{l+3} - I_{l+2}), \\ \vdots \\ x_{3l-1} = x_{l-1} + (I_l - I_{l-1}) + (I_{2l} - I_{2l-1}), \\ x_{3l} = I_1 - x_1 - \dots - x_{l-1} + (I_{l+1} - I_l) + (I_{2l+1} - I_{2l}), \\ \\ x_{(n-1)l+1} = x_1 + (I_2 - I_1) + (I_{l+2} - I_{l+1}) + \dots + (I_{(n-2)l+2} - I_{(n-2)l+1}), \\ x_{2l+2} = x_2 + (I_3 - I_2) + (I_{l+3} - I_{l+2}) + \dots + (I_{(n-2)l+3} - I_{(n-2)l+2}), \\ \vdots \\ x_{nl-1} = x_{l-1} + (I_l - I_{l-1}) + (I_{2l} - I_{2l-1}) + \dots + (I_{(n-1)l} - I_{(n-1)l-1}), \\ x_{nl} = I_1 - x_1 - \dots - x_{l-1} + (I_{l+1} - I_l) + (I_{2l+1} - I_{2l}) + \dots + (I_{(n-1)l+1} - I_{(n-1)l}). \end{array} \right. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3) и приравнявая к нулю частные производные полученного выражения по переменным  $x_1, \dots, x_{l-1}$ , получим набор из  $(l-1)$  соотношений:

$$\begin{aligned} nx_1 + nx_2 + \dots + 2nx_i + \dots + nx_{l-1} = \\ = nI - [(n-1)(I_{i+1} - I_i) + (n-2)(I_{l+i+1} - I_{l+i}) + \dots + \\ + (I_{(n-2)l+i+1} - I_{(n-2)l+i})] + \\ + [(n-1)(I_{l+1} - I_l) + (n-2)(I_{2l+1} - I_{2l}) + \dots + \\ + (I_{(n-1)l+1} - I_{(n-1)l})] \quad (i=1, \dots, l-1), \end{aligned} \quad (6)$$

или после несложных преобразований

$$nx_i = nx_1 - \{(n-1)[(I_{l+1} - I_l) - (I_2 - I_1)] +$$

$$\begin{aligned}
& + (n-2)[(I_{l+i+1} - I_{l+i}) - (I_{l+2} - I_{l+1})] + \dots + \\
& + [(I_{(n-2)l+i+1} - I_{(n-2)l+i}) - (I_{(n-2)l+2} - I_{(n-2)l+1})] \quad (i=2, \dots, l-1). \quad (7)
\end{aligned}$$

Последовательно применяя соотношение (7) к переменным  $x_2, \dots, x_{l-1}$  и подставляя затем полученные выражения в первое уравнение системы (6), получим решение для элемента  $x_1$ :

$$\begin{aligned}
x_1 = & \left[ \frac{2n-1 + (l-2)(n-1)}{nl} \right] I_1 + \left[ -\frac{n-1}{n} \right] I_2 + \left[ \frac{1}{nl} \right] I_{(n-1)l+1} + \\
& + \sum_{i=1}^{n-2} \left\{ \left[ \frac{(n-i-1)l+1}{nl} \right] I_{il+1} + \left[ -\frac{n-i-1}{n} \right] I_{il+2} \right\}. \quad (8)
\end{aligned}$$

Далее из (7) находим решение для элементов  $x_2, \dots, x_{l-1}$ :

$$x_i = x_1 - \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-2} (n-s-1) [(I_{sl+i+1} - I_{sl+i}) - (I_{sl+2} - I_{sl+1})] \quad (i=2, \dots, l-1). \quad (9)$$

И, наконец, используя (1), последовательно получаем решение для всех остальных элементов фотолинейки:

$$x_j = I_{j-l+1} - \sum_{q=j-l+1}^{j-1} x_q \quad (j=l, \dots, N). \quad (10)$$

**Восстановление изображения с минимальной дисперсией (двумерный случай).** Задача восстановления двумерного поля, обладающего минимальной дисперсией, по набору смещенных относительно друг друга изображений низкого разрешения формулируется следующим образом.

Требуется построить оценку для элементов изображения  $X = (x_{mn})$ , которая удовлетворяла бы следующим условиям:

$$\sum_{p=i}^{i+l-1} \sum_{q=j}^{j+l-1} x_{pq} = I_{ij} \quad (i=1, \dots, M-l+1, j=1, \dots, M-l+1); \quad (11)$$

$$\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N (x_{pq} - \langle x \rangle)^2 \Rightarrow \min,$$

где

$$\langle x \rangle = \frac{1}{MN} \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N x_{pq}.$$

В дискретном случае (рис. 2) для восстановления поля  $\mathbf{X} = (x_{mn})$  ( $m=1, \dots, M$ ,  $n=1, \dots, N$ ) по наблюдавшимся данным, представляющим собой матрицу  $I = (I_{ij})$  ( $i=1, \dots, M-l+1$ ,  $j=1, \dots, N-l+1$ ) при условии, что размеры поля кратны линейному размеру  $l$  интегрирующей апертуры, т. е. когда  $M = ml$  и  $N = nl$ , решение находится с помощью факторизации путем двукратного

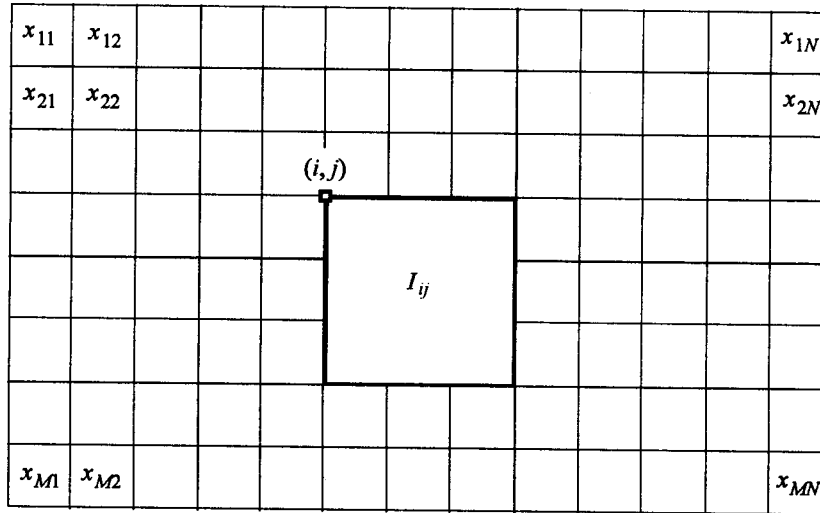


Рис. 2. Схема регистрации изображения, состоящего из  $M \times N$  пикселей, которые подлежат восстановлению. (Интегрирующая апертура имеет размер  $l \times l$  элементов:  $I_{ij}$  – результаты измерений)

последовательного применения описанной выше одномерной процедуры. Для этого сначала формируются новые векторы  $y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jM})$ ,  $j = 1, \dots, N - l + 1$ :

$$y_{jk} = \sum_{r=1}^l x_{k, j+r-1} \quad (k=1, \dots, M), \quad (12)$$

а далее для каждого из  $j = 1, \dots, N - l + 1$  решается одномерная задача (по уже описанному алгоритму)

$$\sum_{i=1}^l y_{j, k+i-1} = I_{kj} \quad (k=1, \dots, M-l+1); \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^M (y_{ij} - \langle y_j \rangle)^2 \Rightarrow \min,$$

где

$$\langle y_j \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_{ji}.$$

Когда найдены все элементы решения (13) по «столбцам», т. е. определены все переменные  $y_{jk}$  ( $j = 1, \dots, N - l + 1$ ,  $k = 1, \dots, M$ ), восстановление исходного поля происходит в результате независимого решения  $M$  одномерных задач для каждого  $k = 1, \dots, M$ :

$$\sum_{r=1}^l x_{k, j+r-1} = y_{jk} \quad (j=1, \dots, N-l+1); \quad (14)$$

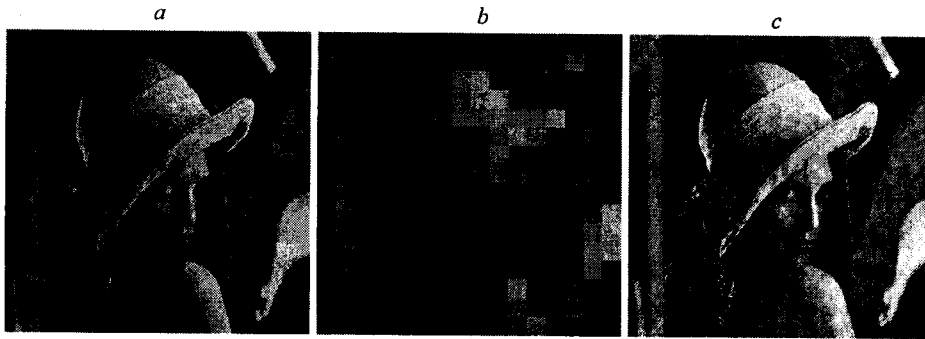


Рис. 3. Пример реконструкции изображения с минимальной энергией: исходное изображение (а); одно из наблюдавшихся изображений низкого разрешения (b); восстановленное изображение с минимальной энергией (с)

$$\sum_{q=1}^N (x_{kq} - \langle x_k \rangle)^2 \Rightarrow \min,$$

где

$$\langle x_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N x_{kq}.$$

Изложенный метод проверен на большом числе реальных и искусственно сгенерированных контрольных цифровых изображений. Продемонстрировано высокое качество восстановления на подавляющем большинстве тестовых изображений. Отметим, что повышение пространственного разрешения восстанавливаемого изображения по сравнению с пространственным разрешением наблюдаемых изображений требует квадратичного увеличения количества измерений, но эта трудность не является решающей по двум причинам: во-первых, время восстановления изображений объемом  $512 \times 512$  элементов на персональных ЭВМ средней производительности не превышает нескольких секунд, а, во-вторых, при выполнении расчетов на спецвычислителях матрицы-шаблоны, необходимые для проведения всех требуемых математических операций, могут быть рассчитаны заранее, что существенно снижает вычислительную емкость алгоритмов. Один из примеров восстановления изображения в соответствии с описанной методикой приведен на рис. 3.

**Заключение.** Разработан и программно реализован быстрый алгоритм восстановления исходного изображения с повышенным пространственным разрешением, не требующий обращения сверхбольших матриц. В основу алгоритма положен поиск сигнала (изображения) с минимальной энергией. Развитие приведенной в данной работе методики повышения пространственного разрешения «смазанных» изображений, сдвинутых одно относительно другого, проводится в нескольких направлениях. Рассматривается задача, когда апертура интегрирования неоднородна. Также достигнуты обнадеживающие результаты в построении оптимальных алгоритмов обработки для произвольных размеров восстанавливаемого поля. Это позволит успешно применять разработанную методику на практике при проектировании оп-

тико-электронных приборов и систем для повышения их пространственного разрешения исключительно алгоритмическими средствами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Peleg Sh., Keren D., Schweitzer L.** Improving image resolution using subpixel motion // Pattern Recogn. Lett. 1987. 5. P. 223.
2. **Choi H., Munson D. C.** Analysis and design of minimax-optimal interpolators // IEEE Trans. on Signal Processing. 1998. 46, N 6. P. 1571.
3. **Stromer Th.** Computationally attractive recognition of bandlimited images from irregular samples // IEEE Trans. on Signal Processing. 1997. 6, N 4. P. 540.
4. **Marvasti F.** Nonuniform Sampling // Advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory /Ed. by R. J. Marks II. N. Y.: Springer-Verlag, 1993. P. 121.
5. **Yen J. L.** On nonuniform sampling of bandlimited signals // IRE Trans. Circuit Theory. 1956. CX-3. P. 251.
6. **Pratt W. K.** Digital Image Processing. N. Y.: John Willey and Sons, 1978.

*Институт автоматизи и электрометрии СО РАН,  
E-mail: reznik@iae.nsk.su*

*Поступила в редакцию  
27 марта 2003 г.*