

Н. В. Лаходынова

(Томск)

О ПОРОГАХ ПРОСАЧИВАНИЯ В ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУРАХ

Предложены практически важные результаты, касающиеся определения порогов просачивания в однородных структурах. Их использование позволяет определить пределы надежности однородных вычислительных систем и минимальные требования к надежности процессорных элементов.

Введение. Теория просачивания находит успешное применение в различных дисциплинах: физике, химии, биологии и теории вычислительных систем. Систематическое изложение теории просачивания и библиографию можно найти в [1]. В работе [2] ее результаты применялись для оценки пределов надежности однородных вычислительных структур (ОВС) и систем. В связи с тем, что теория просачивания в приложении к ОВС дает содержательные результаты, представляют интерес величины критических вероятностей для различных структур. Далее предлагаются оригинальные методы определения порогов и областей просачивания и результаты, полученные имитационным моделированием для практически важных конечных структур.

1. Классическая задача просачивания. Задача просачивания была поставлена Хаммерсли [3] еще в 1957 году: просачивание по узлам, когда вероятность исправности узла $p < 1$ и вероятность исправности связи $r = 1$, и просачивание по связям, когда $p = 1$, а $r < 1$. Вторая задача сводится к первой. Основным результатом теории просачивания можно содержательно сформулировать следующим образом.

Основное утверждение. Для всякого периодического графа G , вложенного в R^2 , существует критическая вероятность p_H , такая, что если $p < p_H$, то бесконечный исправный кластер существует в G с вероятностью 0, и если $p \geq p_H$, то с вероятностью 1 в G существует, и притом единственный, бесконечный исправный кластер.

Критические вероятности для некоторых решеток приведены в табл. 1 (Ш, К, Т и K^* – шестиугольная, квадратная, треугольная (квадратная с одной диагональю) и квадратная сопряженная (с двумя диагоналями) решетки). Заметим, что большинство известных значений критических вероятностей определено приблизительно. Точные значения некоторых из этих величин приведены в монографии [1]: $p_H(T) = r_H(K) = 0,5$, $r_H(T) = 2\sin(\pi/18) \cong 0,347$, $r_H(Ш) = 1 - 2\sin(\pi/8) \cong 0,653$.

Т а б л и ц а 1

Критические вероятности просачивания для различных решеток

Размерность	Решетка	Степень узла	По узлам	По связям
2	Ш	3	0,70	0,65
3	Алмаз	4	0,43	0,39
3	Куб	6	0,31	0,25
3	Центрированный куб	8	0,25	0,18
3	Гранецентрированный куб	10	0,20	0,12

Далее предлагаются два метода, позволяющие уточнить и/или быстро получить оценки критической вероятности просачивания в задаче узлов. С этой целью формализуем задачи просачивания по узлам и связям.

Пусть G – периодический граф на плоскости. В задаче узлов каждый узел считается исправным с вероятностью p и неисправным с вероятностью $1 - p$. Вероятность исправности связи $r = 1$. Требуется найти критическую вероятность $p_H(G) = \inf\{p: \theta(p) > 0\}$, где $\theta(p)$ – вероятность того, что узел является частью бесконечного связного подмножества исправных узлов – кластера.

В задаче связей узлы считаются исправными с вероятностью 1, связи исправны с вероятностью r и неисправны с вероятностью $1 - r$, и критическая вероятность просачивания по связям есть $r_H(G) = \inf\{r: \theta(r) > 0\}$, где $\theta(r)$ – вероятность того, что некоторый узел есть часть бесконечного исправного кластера.

Рассмотрим плоский граф $G(X, V)$, в каждом узле которого задана случайная величина $\xi_l \in A = \{0, 1\}$. Будем говорить, что узел l исправен, если $\xi_l = 0$, и неисправен, если $\xi_l = 1$. Пусть $Y = A^{|X|}$. Элементы множества Y – конфигурации на G , так что можно рассматривать вероятностное пространство $\langle Y, F, P_p \rangle$, где F – σ -алгебра на Y , а P_p – вероятностная мера на F , $P_p(\xi_l = 0) = p$ и $P_p(\xi_l = 1) = 1 - p$.

Точно так можно определить вероятностное пространство $\langle U, \Phi, P_r \rangle$ для задачи связей, считая, что ξ_l задано для каждой связи графа G ; U – множество конфигураций связей; Φ – σ -алгебра на U ; P_r – вероятностная мера на Φ , $P_r(\xi_l = 0) = r$ и $P_r(\xi_l = 1) = 1 - r$.

В дальнейшем $G \in \{K, Ш, T\}$, и, если потребуется конкретизировать тип решетки, будем писать $Y(K)$, $U(T)$ и т. п.

1.1. *Метод моделирующей решетки.* Рассмотрим задачу узлов на решетке K . По заданной решетке K построим моделирующую решетку T' , как показано на рис. 1. Связь решетки T' соответствует двум узлам решетки K . Будем считать связь исправной, если соответствующие ей узлы исправные, в противном случае связь считается неисправной. Таким образом, установлено со-

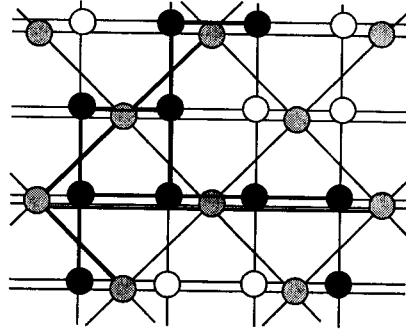


Рис. 1. Моделирование просачивания по узлам в решетке К просачиванием по связям в Γ'

ответствие между $Y(K)$ и $U(\Gamma')$ – множеством конфигураций узлов исходной решетки и множеством конфигураций связей моделирующей решетки. Будем считать, что вероятностная мера P_p на $F(K)$ индуцирует вероятностную меру P'_p на $\Phi(\Gamma')$ так, что $p'_r = p^2$. По построению каждому исправному кластеру в решетке К соответствует исправный кластер в решетке Γ' , просачиванию в К – просачивание в Γ' . При этом $r(\Gamma') = p^2(K)$ и $p(\Gamma') = r(K) = 1$.

При критическом просачивании в Γ' имеет место критическое просачивание в К, и при этом

$$[p_H(K)]^2 = r_H(\Gamma'). \quad (1)$$

Аналогичным образом можно построить моделирующую решетку K' для решетки Ш (рис. 2). Рассуждая таким же образом, имеем

$$[p_H(Ш)]^2 = r_H(K'). \quad (2)$$

Заметим, что по построению величины $r_H(\Gamma')$ и $r_H(K')$ существуют, поскольку существуют $p_H(K)$ и $p_H(Ш)$. Однако в отличие от классических задач просачивания вероятность исправности связей на моделирующих решетках зависит от исправности соседей. Так, если бы связи решетки Γ' (см. рис. 2) выходили из строя независимо, то согласно выражению (1) вероятность исправности связи всегда была бы p^2 . В действительности, если на решетке Γ' одна из связей (например, горизонтальная) исправна, то четыре соседних будут исправными уже с вероятностью p , а не p^2 . Аналогично исправный узел в решетке Ш влияет на исправность двух связей моделирующей решетки K' .

Гипотеза моделирования: $r_H(\Gamma') = r_H(\Gamma)$ и $r_H(K') = r_H(K)$. Непосредственное следствие этой гипотезы:

$$p_H(K) = [2\sin(\pi/18)]^{1/2} = 0,589... \cong 0,59 \text{ (известно из эксперимента),}$$

$$p_H(Ш) = 2^{-1/2} = 0,707 \cong 0,7 \text{ (известно из эксперимента).}$$

Найденные значения хорошо согласуются с экспериментами [1].

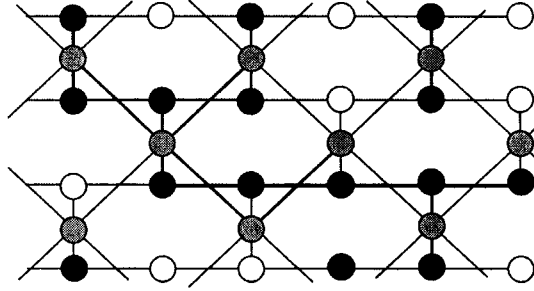


Рис. 2. Моделирование просачивания по узлам в решетке Ш просачиванием по связям в решетке К

Введем в рассмотрение решетку K^* . Известно [1], что $p_H(K) + p_H(K^*) = 1$. Отсюда и из гипотезы моделирования немедленно следует

$$p_H(K^*) = 1 - [2\sin(\pi/18)]^{1/2} = 0,411\dots \cong 0,41.$$

И вообще, рассматривая совокупность вышеприведенных значений критических вероятностей для решеток Ш, К, Т и K^* , можно записать следующую эмпирическую формулу:

$$[p_H(k)]^2 = r_H(k+2), \quad (3)$$

где k – число ближайших соседей одного узла. Отсюда немедленно следует

$$r_H(K^{**}) = [p_H(T)]^2 = (1/2)^2 = 1/4 = 0,25 \text{ (известно из эксперимента).}$$

Это говорит о возможном существовании некоторого моделирующего соответствия между решетками Т и K^* , которое, к сожалению, пока не найдено.

1.2. *Метод второй производной.* Метод второй производной позволяет определить критические вероятности для конечных структур. Пусть N – число узлов. Конечную структуру можно рассматривать как часть бесконечного периодического графа. Перефразируем основное утверждение теории просачивания для конечной решетки. Функция $P(N, p)$ – вероятность просачивания информации от левого края к правому.

Утверждение 1. Функция $P(N, p)$ при $N \rightarrow \infty$ приближается к ступенчатой со скачком от 0 до 1 в окрестности критической вероятности p_H – порогу просачивания для соответствующего периодического графа.

Очевидное утверждение, лежащее в основе метода второй производной, гласит.

Утверждение 2. Точка перегиба функции $P(N, p)$ при $N \rightarrow \infty$ стремится к порогу просачивания для соответствующего периодического графа.

Функция $P(N, p)$ – полином N -й степени относительно p :

$$P(N, p) = \sum_{i=1, \dots, N} C_i p^i (1-p)^{N-i},$$

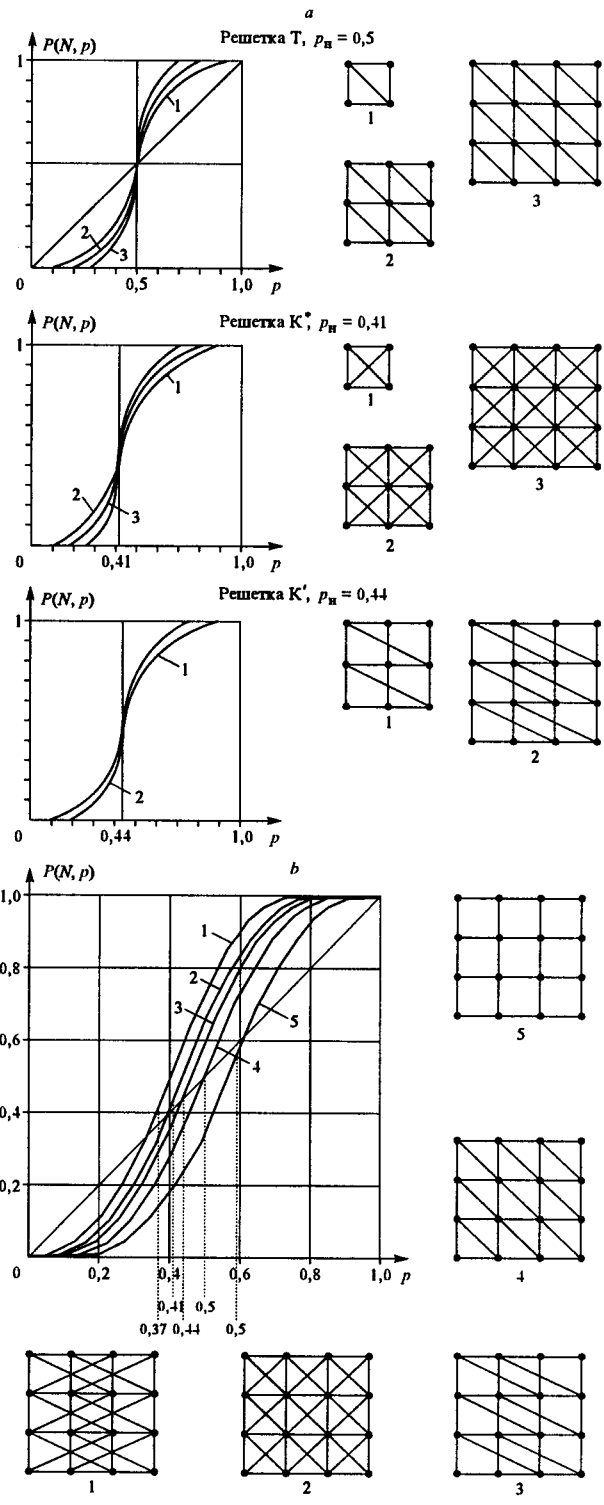


Рис. 3. Результаты вычислений функции $P(N, p)$ для структур одинакового типа (а) и различных структур (б)

где C_i – число конфигураций с просачиванием, в которых i элементов исправно, а $N - i$ элементов неисправно. Определение точного аналитического выражения для $P(N, p)$ сводится к подсчету коэффициентов C_i . Для небольших N вычисления проводятся на ЭВМ полным перебором всех конфигураций и проверкой их на просачиваемость. Подсчет коэффициентов C_i прост. Вначале $C_i = 0$ для всех i . Если конфигурация содержит i исправных элементов и просачиваема, то C_i увеличивается на единицу. Зная коэффициенты C_i , легко получить аналитические выражения для первой и второй производных $P(N, p)$. Решив уравнение $P''(N, p) = 0$, будем иметь оценку порога просачивания. Рис. 3, *a, b* демонстрирует результаты этих вычислений для некоторых решеток. На рис. 3, *a* показано сравнение функций $P(N, p)$ для решеток Ш, К, Т, К*, видно, что структуры с дальними связями (К' на рис. 3, *a* и кривые 1, 3 на рис. 3, *b*) при том же числе соседей узла имеют более низкие пороги просачивания. Оценка порога просачивания данным методом достаточно хороша уже при $N = 16$.

2. Смешанная задача просачивания. Содержание смешанной задачи просачивания состоит в поиске области просачивания, точнее, такой функции $f(p, r)$, что при $f(p, r) < 0$ исправный кластер отсутствует, а при $f(p, r) \geq 0$ – существует. Смешанная задача просачивания является более адекватной для исследования поведения систем, в которых и узлы и связи могут быть ненадежными. Несмотря на то, что теория просачивания развивается в различных направлениях (задачи с несколькими параметрами, направленное просачивание, задачи, в которых имеется зависимость между состояниями узлов и связей), смешанная задача остается мало изученной. Моделирование задачи просачивания в более общей постановке позволяет экспериментально определить границу области просачивания $f(p, r) = 0$ для разных типов решеток. На рис. 4 показаны критические области просачивания для наиболее популярных решеток Ш, К, Т, К*, полученные для решетки размером 100×100 . Каждой решетке соответствуют две кривые. Полоса, ограниченная этими кривыми, делит координатную плоскость на две непересекающиеся области. Выше полосы просачивание есть с вероятностью, близкой к

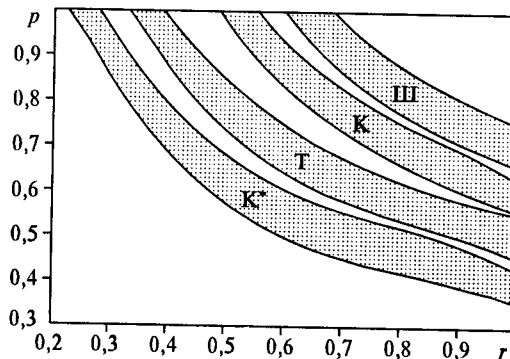


Рис. 4. Области просачивания для решеток К*, Т, К, Ш

1, ниже полосы вероятность просачивания близка к 0. Следует заметить, что на ширину полосы влияет как размер рассматриваемой решетки, так и количество случайных бросаний в эксперименте. С увеличением количества бросаний (например, начиная с 10) для одной и той же решетки полоса сначала расширяется, а затем стабилизируется. Ширина полосы при 80 и 150 бросаниях практически не меняется. Увеличивая же размеры решетки при фиксированном количестве бросаний, можно наблюдать другую картину: полоса становится уже. Напрашивается вывод: чем больше решетка, тем резче переход из состояния просачивания в противоположное.

Моделирование различных решеток показало, что в решетках с одинаковым количеством соседей наличие дальних связей в физической структуре снижает требования к надежности, область просачивания становится больше. Таким образом, требование локальности структуры связей накладывает более жесткие ограничения на величины p и r .

3. Просачивание в структурах с согласием. При исследовании отказоустойчивости параллельных вычислительных систем [4] возникла задача просачивания по согласным элементам.

Будем считать, что два узла согласны друг с другом, если они исправны и связь между ними исправна. Тогда вероятность, что узел имеет хотя бы одного согласного соседа,

$$p_c = p(1 - (1 - pr)^k), \quad (4)$$

где p – вероятность исправности узла, r – вероятность исправности связи, k – количество соседей.

При моделировании просачивания по согласным узлам вероятность просачивания $P(N, p_c)$, так же как и в классической задаче узлов, приближается к ступенчатой при увеличении N . Точки перегиба соответствующих кривых дают приближенные значения $p_{сн}$. Также существует критическое значение доли узлов $p_{сн}$, имеющих хотя бы одного согласного соседа. Если $p_c < p_{сн}$, то функция $P(N, p_c)$ близка к 0, в противном случае $P(N, p_c)$ приближается к 1. В табл. 2 приводятся результаты моделирования просачивания по согласным узлам для некоторых типов решеток при $N = 20$.

Порог просачивания по согласным узлам характеризует живучесть системы с учетом ненадежности узлов и связей, как и в смешанной задаче. Следующие рассуждения позволяют перейти от просачивания по согласным узлам к смешанной задаче и получить оценки вероятности просачивания.

Вероятность, что узел имеет хотя бы одного согласного соседа, p_c является функцией от p и r – вероятностей исправности узла и связи соответственно. Используя формулу (4), можно построить кривые при $p_c = c = \text{const}$, вдоль которых вероятность просачивания через структуру $P(N, p, r)$ постоянна и равна $P(N, p_c)$. Таким образом, аппроксимировав значения $P(N, p_c)$ (например, методом наименьших квадратов), можно получить значения $P(N, p, r)$ для любых p и r .

В табл. 3 приводятся значения $P(20, p, r)$ для решетки К. Три знака после запятой в значениях $P(20, p, r)$ получены в результате аппроксимации. Для

Т а б л и ц а 2
Пороги просачивания
для структур с согласием

Решетка	Порог просачивания $p_{сн}$
Ш	0,64
К	0,53
Т	0,46
К*	0,39

Т а б л и ц а 3

Значения $P(20, p, r)$ для квадратной решетки

p	r									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,0	0,034	0,118	0,228	0,348	0,469	0,585	0,694	0,799	0,900	1,000
0,9	0,031	0,109	0,215	0,333	0,454	0,573	0,687	0,795	0,899	0,999
0,8	0,028	0,100	0,200	0,315	0,435	0,556	0,674	0,787	0,895	0,998
0,7	0,025	0,091	0,183	0,293	0,411	0,532	0,653	0,770	0,883	0,992
0,6	0,022	0,080	0,164	0,267	0,380	0,499	0,621	0,742	0,860	0,974
0,5	0,019	0,069	0,143	0,236	0,342	0,456	0,575	0,696	0,818	0,938
0,4	0,015	0,057	0,120	0,201	0,295	0,400	0,512	0,629	0,749	0,870
0,3	0,012	0,044	0,094	0,160	0,239	0,329	0,427	0,533	0,644	0,759
0,2	0,008	0,003	0,067	0,113	0,172	0,240	0,317	0,402	0,493	0,590
0,1	0,004	0,015	0,034	0,060	0,093	0,132	0,176	0,227	0,283	0,344

оценки значений вероятности просачивания нужны только два знака после запятой. Следует заметить, что данные, приведенные в таблице, получены попутно при моделировании волнового алгоритма [5] и при определенных предположениях. Значения вероятности просачивания при $p = 1$ выглядят несколько завышенными и могут быть использованы в качестве грубых верхних оценок; при $r = 1$ результаты совпадают с результатами для задачи узлов из работы [1]. Более точные результаты может дать непосредственное моделирование смешанной задачи просачивания.

Заключение. Итак, пороги просачивания являются характеристиками, жестко связанными с типом структуры, и позволяют определить минимальные требования к надежности ее элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кестен Х. Теория просачивания для математиков. М.: Мир, 1986.
2. Воробьев В. А., Лаходынова Н. В. Пределы надежности однородных структур // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 3. С. 110.
3. Hammersley J. M. Percolation processes lower bounds for critical probability // Ann. Math. Statist. 1957. 28. P. 790.
4. Воробьев В. А., Лаходынова Н. В. Реконфигурация отказоустойчивой процессорной матрицы на основе сигналов согласия // Автоматрия. 1997. № 6. С. 108.
5. Лаходынова Н. В. Анализ алгоритмов реконфигурации структуры процессорной матрицы на основе сигналов согласия // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. 2001. № 2. С. 98.

Томский архитектурно-строительный университет,
E-mail: lax@tomsk.su

Поступила в редакцию
19 марта 2003 г.