

С. П. Ильных, В. И. Гужов, Е. М. Мишина
(Новосибирск)

**ИЗМЕРЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ
В ИНТЕРФЕРОМЕТРАХ СДВИГА**

Рассмотрен способ восстановления волновых фронтов, полученных методом сдвиговой интерферометрии. Устранена некорректность, свойственная известным ранее подходам, используемым при измерении несимметричных волновых фронтов. Предложен алгоритм, позволяющий повысить вычислительную эффективность и расширить область применения сдвиговой интерферометрии.

Классические методы интерферометрии предусматривают сравнение двух волновых фронтов, один из которых является образцовым. Как правило, образцовый фронт представляет собой плоскую или сферическую волну. В случае, когда смещение волнового фронта в смежных точках интерференционной картины превышает длину волны источника излучения, волновой фронт не может быть измерен однозначно. Распределение интенсивности в интерферограмме с плоским опорным волновым фронтом показано на рис. 1, *a*, изофазы (с шагом 20π) разности объектного и плоского волновых фронтов представлены на рис. 1, *b*.

Из рисунка видно, что значительная часть интерференционных полос пространственно не разрешается, так как оптическая разность хода между

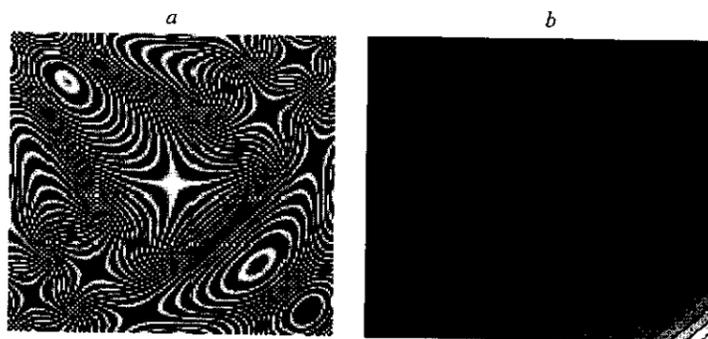


Рис. 1. Эффект пространственной дискретизации поля яркости интерферограммы с плоским волновым опорным фронтом (*a*) и при большой кривизне объектного волнового фронта (*b*)

соседними точками интерференционной картины больше длины волны, что приводит к появлению ложных полос.

Для уменьшения величины смещения используются компенсационные оптические элементы, имеющие кривизну поверхности, сравнимую с кривизной поверхности измеряемого объекта [1]. Однако их применение приводит к усложнению интерференционной системы и не позволяет производить измерение волновых фронтов произвольной формы. Еще одним способом решения этой проблемы является использование интерферометров сдвига, в которых роль опорного волнового фронта выполняет копия объектного волнового фронта.

Например, при смещении волнового фронта $W(x, y)$ на величину s в направлении x разность хода составит $\Delta W = W(x, y) - W(x - s, y)$. Эта величина определяется в интерферометрах бокового сдвига. Разность хода в различных точках волнового поля определяется из простого соотношения $\Delta W(x, y) = n\lambda$, где n – порядок полосы, λ – используемая длина света.

Задача определения формы волнового фронта делится на две.

1. Определение по интерференционной картине фазовой разности хода $\Delta W(x, y)$.

2. Нахождение исходного фазового распределения $W(x, y)$.

Решение второй задачи – основная цель предлагаемой работы.

Как правило, сдвиговая интерферограмма после расшифровки представлена зашумленными фазовыми разностями в узлах прямоугольной сетки для двух направлений (x и y):

$$r_{ij} = \varphi_{ij} - \varphi_{i-1, j} + e_{ij}, \quad c_{ij} = \varphi_{ij} - \varphi_{i, j-1} + h_{ij},$$

где e_{ij} и h_{ij} – отклонения от действительных фазовых разностей (шум в измеренных разностях фаз).

Необходимо получить оценку φ_{ij} в каждой точке по зашумленным фазовым разностям. Так как уравнений значительно больше, чем переменных (т. е. система уравнений переопределена), то для нахождения оценок фаз используем метод наименьших квадратов (МНК):

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [(r_{ij} - \varphi_{ij} + \varphi_{i-1, j})^2 + (c_{ij} - \varphi_{ij} + \varphi_{i, j-1})^2]. \quad (1)$$

Дифференцируя (1) по φ_{ij} и приравнявая результаты к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$4\varphi_{ij} - \varphi_{i-1, j} - \varphi_{i+1, j} - \varphi_{i, j-1} - \varphi_{i, j+1} = r_{ij} - r_{i+1, j} + c_{ij} - c_{i, j+1}, \quad (2)$$

где $2 \leq i < N - 1$; $2 < j \leq N - 1$.

Рассматриваемый метод измерения волнового фронта заключается в регистрации фазовых разностей в точках согласно геометрии разбиения сенсорного устройства. Затем по МНК определяется соответствующая система нормальных уравнений относительно неизвестных значений фаз, которая решается любым известным способом. До последнего времени данный подход использовался редко. Это было вызвано высокой трудоемкостью и низ-

кой точностью при решении системы нормальных уравнений большой размерности.

В работе [2] показано, что при оценивании изображения размером $N \times N$ система нормальных уравнений может быть представлена в матричной форме:

$$\mathbf{A}\Phi = \mathbf{V}, \quad (3)$$

где \mathbf{A} – теплицева (симметрическая с одинаковыми диагональными элементами) блочно-диагональная матрица размера $N^2 \times N^2$ вида

$$\mathbf{A} \approx \begin{bmatrix} A_0 & -I & & & 0 \\ -I & A_0 & -I & & \\ & -I & A_0 & -I & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -I & A_0 & -I \\ & & & -I & A_0 & -I \\ 0 & & & & -I & A_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

(здесь

$$A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

I – единичная матрица размера $N \times N$); Φ – вектор-столбец размера N^2 искомого распределения фазы; \mathbf{V} – вектор-столбец размера N^2 , формируемый из значений разностей фаз в соответствии с системой уравнений (2).

Такая система уравнений получается при решении уравнения Пуассона и граничных условиях Дирихле на прямоугольной сетке для стандартной пятиточечной конечно-разностной аппроксимации:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \varphi(0) = 0. \quad (5)$$

Известные эффективные прямые алгоритмы решения уравнения Пуассона (5), например, основанные на быстром преобразовании Фурье [2], требуют периодического продолжения поля разностей фаз, что существенно сужает область их практического применения, позволяя измерять только сравнительно простые симметричные волновые фронты. При несимметричных

волновых фронтах имеют место существенные отличия в граничных точках и матрица (4) системы уравнений (3) принимает вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_0 & -I & & 0 \\ -I & A_1 & -I & \\ & -I & A_1 & -I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -I & A_1 & -I \\ & & & -I & A_1 & -I \\ 0 & & & & -I & A_0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \\ & -1 & 3 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -1 & 3 & -1 \\ & & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \\ & -1 & 4 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица \mathbf{A} в этом случае не является тридиагональной и рассмотренный выше быстрый алгоритм решения неприменим.

При небольшом числе уравнений $N < 10$ для решения (6) можно воспользоваться известным методом матричной прогонки [3]. Однако в практических интерференционных измерительных системах в качестве устройств ввода используются фотоприемники, имеющие 512×512 и более элементов разрешения. Метод матричной прогонки требует хранения в памяти N векторов размера N и N матриц размера $N \times N$, что предъявляет слишком высокие требования к оперативной памяти даже для современной вычислительной техники.

Авторами предложен быстрый алгоритм для случая, когда матрица \mathbf{A} имеет различные элементы на главной диагонали. Систему уравнений (3) можно факторизовать, если найдется преобразование такое, что

$$\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^T = \mathbf{\Lambda}, \quad (7)$$

где \mathbf{U} – матрица преобразования, а $\mathbf{\Lambda}$ – клеточная диагональная матрица. Из теории матричных вычислений [3] известно, что если матрица \mathbf{U} составлена из собственных векторов U_i матрицы \mathbf{A} , а λ_i – ее собственные числа, то $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица, элементы которой есть собственные числа λ_i :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица (4) примет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & -I & & 0 \\ -I & \Lambda_1 & -I & \\ & -I & \Lambda_1 & -I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & -I & \Lambda_1 & -I \\ & & & -I & \Lambda_1 & -I \\ 0 & & & & -I & \Lambda_0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Путем перестановки столбцов и строк и соответствующих элементов вектора \mathbf{V} (сохраняющих систему уравнений неизменной) матрица A приводится к трехдиагональному виду с плотным расположением диагоналей. При этом система уравнений (3) принимает вид

$$\mathbf{U}A\mathbf{U}^T\Phi = (\mathbf{U}\mathbf{V})^T. \quad (9)$$

Собственные значения λ_0, λ_1 блочных матриц A_0 и A_1 находятся как

$$\lambda_{1k} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \left[4 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \right], \quad k \in [0, N-1],$$

$$\lambda_{0k} = \lambda_{1k} - 1.$$

Собственные векторы \mathbf{U} получаем путем решения системы уравнений

$$A_1\mathbf{U} = \lambda_{1k}A$$

с их последующей нормировкой. Отметим, что собственные векторы \mathbf{U} одни и те же для A_0 и A_1 .

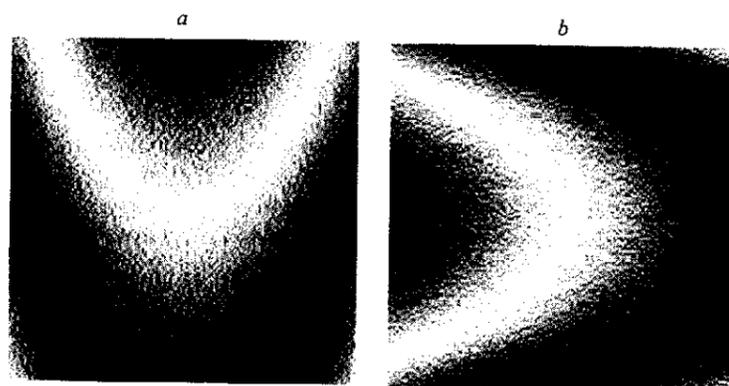


Рис. 2. Сдвиговые интерферограммы в вертикальном (а) и горизонтальном (б) направлениях

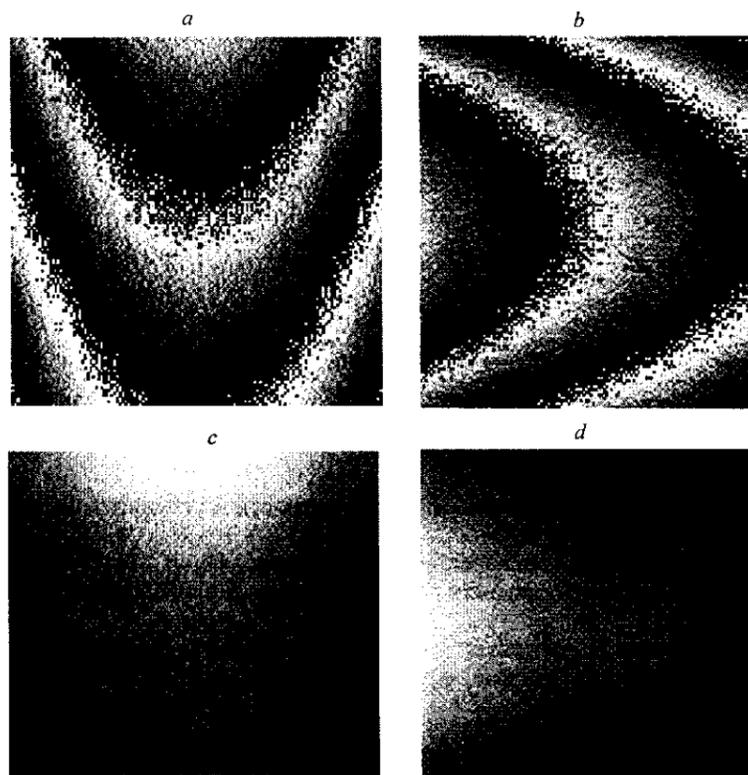


Рис. 3. Восстановление абсолютных разностей фаз: поле разности фаз по y (a), по x (b) и после устранения фазовой неоднозначности (c , d)

Таким образом, для однозначного восстановления комплексной амплитуды оптического волнового фронта необходимо:
 – зарегистрировать отдельно сдвиговые интерферограммы при сдвиге во взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 2);

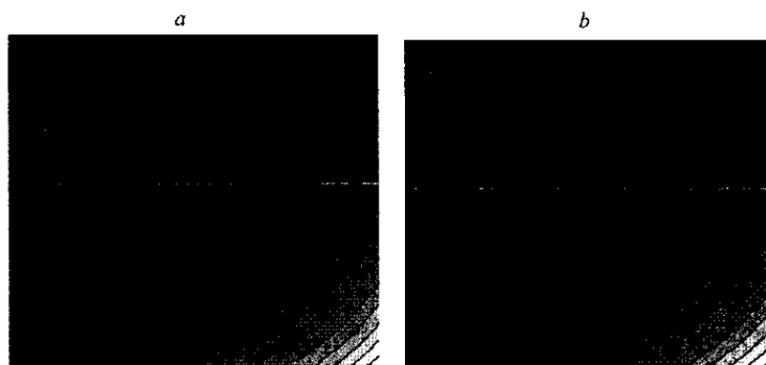


Рис. 4. Картины изофаз волновых фронтов: восстановленный (a) и исходный (b)

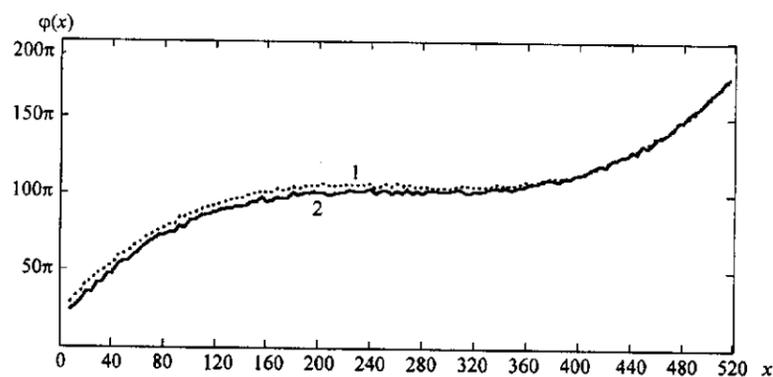


Рис. 5. Результаты восстановления волнового фронта по сдвиговым интерферограммам: восстановленное поле фаз (кривая 1), исходный волновой фронт (2)

– восстановить абсолютные фазовые разности и устранить фазовую неоднозначность (рис. 3);

– рассчитать значения волнового фронта (рис. 4).

На рис. 5 показаны профили волновых фронтов в сечениях, отмеченных на рис. 4.

Предложенный алгоритм позволяет по серии сдвиговых интерферограмм измерять волновые фронты произвольной формы с большой кривизной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Оптический** производственный контроль /Под ред. Д. Малакары. М.: Машиностроение, 1985.
2. Денисюк С. Г., Лопарев Е. Г. Оценка распределения фаз оптического поля по измеренному полю значений разностей фаз // Системы автоматизации обработки оптической информации. Новосибирск: НЭТИ, 1984. С. 121.
3. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.

Новосибирский государственный
технический университет.
E-mail: isp@ftf.nstu.ru

Поступила в редакцию
25 апреля 2002 г.