

**И. В. Разин, В. С. Эмдин**

*(Санкт-Петербург)*

### ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ЧЕРЕЗ СТАТИСТИКИ ПЕРЕПАДОВ ЯРКОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Показано, что энергетический спектр изображения может быть описан набором спектральных моментов, используемых в качестве инструментальной оценки спектра при решении ряда задач анализа и классификации изображений. Получено аналитическое выражение, устанавливающее связь между мощностными характеристиками сигналов в пространственной и частотной областях и являющееся обобщением теоремы Рэлея на моменты любого произвольного порядка функции двух переменных. Доказано, что моменту сколь угодно высокого порядка в частотной области всегда соответствует момент второго порядка в области пространственной. Приведен алгоритм вычисления спектральных моментов.

В литературе хорошо известен математический аппарат характеристических функций, предложенный А. Н. Ляпуновым и применяемый при решении ряда задач из области анализа случайных величин. Так, например, его использование позволяет упростить вычисление некоторых числовых характеристик функции распределения случайной величины. Покажем здесь аналогично работе [1], что аппарат характеристических функций может успешно применяться для вычисления моментов энергетического спектра. Полученные при этом результаты (см. далее) позволяют отказаться от анализа в частотной области, что и определяет их привлекательность и практическую ценность (возможность работы в реальном времени) при решении ряда прикладных задач анализа и классификации изображений.

Полагаем, что анализируются изображения, порождаемые источником эргодического сигнала. Разложим в ряд Маклорена по двум переменным  $\tau_1$  и  $\tau_2$  корреляционную функцию изображения, сделав естественное предположение о сходимости степенного ряда:

$$B(\tau_1, \tau_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^{(n+k)}}{\partial \tau_1^{(n)} \partial \tau_2^{(k)}} B(0,0) \frac{\tau_1^n \tau_2^k}{n! k!}. \quad (1)$$

Применив к обеим частям (1) прямое преобразование Фурье и выполнив необходимые преобразования его правой части, получим разложение энергетического спектра в виде бесконечного ряда

$$G(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{(n+k)} \frac{m_{nk}}{n!k!} \delta^{(n)}(\omega_1) \delta^{(k)}(\omega_2), \quad (2)$$

где  $\delta^{(k)}(\omega)$  – производная  $k$ -го порядка дельта-функции;

$$m_{nk} = (2\pi)^2 j^{-(n+k)} \frac{\partial^{(n+k)}}{\partial \tau_1^{(n)} \partial \tau_2^{(k)}} B(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^n \omega_2^k G(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3)$$

– момент  $(n+k)$ -го порядка энергетического спектра.

Отметим, что моменты нечетного  $(n+k)$ -го порядка в этом разложении равны нулю в силу четности функции  $G(\omega_1, \omega_2)$  и симметрии интервалов интегрирования в (3). Если корреляционная функция ограничена по пространству размером  $a \times b$ , то выражение (2) примет вид

$$G(\omega_1, \omega_2) = \frac{ab}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{(n+k)} \frac{m_{nk}}{n!k!} \text{sinc}^{(n)}\left(\omega_1 \frac{a}{2}\right) \text{sinc}^{(k)}\left(\omega_2 \frac{b}{2}\right), \quad (4)$$

где  $\text{sinc}^{(n)}(\omega)$  –  $n$ -я производная функции  $(\sin \omega)/\omega$ .

Из финитности корреляционной функции следует неограниченная протяженность энергетического спектра на частотной плоскости. Таким образом, существование конечных моментов определяется асимптотическим поведением функции  $G(\omega_1, \omega_2)$  при больших значениях частот.

Из выражения (4) видно, что энергетический спектр единственным образом описывается набором спектральных моментов  $m_{nk}$ . Однако практическая применимость разложения (4) ограничена в силу необходимости выполнения трудоемкого преобразования Фурье и последующего, не менее трудоемкого по объему, вычисления спектральных моментов по формуле (3). Покажем, что существует другой метод вычисления моментов, позволяющий получить их оценку без перехода в частотную область анализа.

Как видно из (3), спектральный момент с точностью до множителя равен смешанной производной от корреляционной функции изображения, взятой в начале координат.

Можно показать, что смешанная производная произвольного  $(n+k)$ -го порядка от корреляционной функции изображения  $\varphi(x, y)$  выражается следующим образом:

$$\frac{\partial^{(n+k)}}{\partial \tau_1^{(n)} \partial \tau_2^{(k)}} B(\tau_1, \tau_2) = (-1)^{(n+k)} B_{\varphi_{xy}^{(n+k)}}(\tau_1, \tau_2), \quad (5)$$

где  $B_{\varphi_{xy}^{(n+k)}}(\tau_1, \tau_2)$  – взаимная корреляционная функция смешанных производных изображения;  $\varphi_{xy}^{(n+k)}$  – смешанная производная изображения

$(n1 + k1)$ -го порядка, взятая в направлениях координатных осей  $x$  и  $y$ ;  $(n + k) = 0, 2, 4, 6, \dots$  – четное число;  $n = n1 + n2$ ;  $k = k1 + k2$ ;  $n1, n2, k1, k2 = 0, 1, 2, 3, \dots$  – любое целое положительное число.

Покажем справедливость (5) на примере смешанной производной второго порядка от корреляционной функции. Определим с этой целью взаимную корреляционную функцию конечных разностей изображения, взятых в направлениях  $x$  и  $y$ :

$$B_{\Delta\varphi_x\Delta\varphi_y}(x_1, x_2, y_1, y_2) = M\{[\varphi(x_1 + \Delta x, y_1) - \varphi(x_1, y_1)][\varphi(x_2, y_2 + \Delta y) - \varphi(x_2, y_2)]\}, \quad (6)$$

где  $M$  – среднее по ансамблю изображений.

В силу предположения об эргодичности сигнала усреднение по множеству заменим усреднением по пространственным координатам. При таком предположении выражение (6) примет вид

$$B_{\Delta\varphi_x\Delta\varphi_y}(\tau_1, \tau_2) = B(\tau_1 - \Delta x, \tau_2 + \Delta y) - B(\tau_1, \tau_2 + \Delta y) - B(\tau_1 - \Delta x, \tau_2) + B(\tau_1, \tau_2), \quad (7)$$

где  $\tau_1 = x_2 - x_1$ ,  $\tau_2 = y_2 - y_1$ .

Определим с помощью предельного перехода взаимную корреляционную функцию производных изображения в направлениях  $x$  и  $y$ :

$$B_{\varphi_y^{(1+0)}\varphi_y^{(0+1)}}(\tau_1, \tau_2) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{B_{\Delta\varphi_x\Delta\varphi_y}(\tau_1, \tau_2)}{\Delta x \Delta y}. \quad (8)$$

Вычислим этот предел, раскладывая слагаемые числителя в правой части (8) в ряд Тейлора по двум переменным и ограничивая разложение членом  $\Theta$  более высокого порядка малости, чем  $(\Delta x \Delta y)$ :

$$B(\tau_1 - \Delta x, \tau_2 + \Delta y) = B(\tau_1, \tau_2) - \Delta x \frac{\partial B(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} + \Delta y \frac{\partial B(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \Delta x^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} - 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \Delta y^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} \right) B(\tau_1, \tau_2) + \Theta,$$

$$B(\tau_1, \tau_2 + \Delta y) = B(\tau_1, \tau_2) + \Delta y \frac{\partial B(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} + \frac{\Delta y^2}{2} \frac{\partial^2 B(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2^2} + \Theta,$$

$$B(\tau_1 - \Delta x, \tau_2) = B(\tau_1, \tau_2) - \Delta x \frac{\partial B(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 B(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^2} + \Theta.$$

Подставляя эти выражения в (7) и приводя подобные члены, получим с учетом (8) следующий результат:

$$B_{\varphi_{xy}^{(l+0)} \varphi_{xy}^{(0+l)}}(\tau_1, \tau_2) = -\frac{\partial^2 B(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} = -\frac{\partial^{(l+1)} B(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}. \quad (9)$$

Таким образом, взаимная корреляционная функция производных изображения по направлениям координатных осей  $x$  и  $y$  равна взятой с обратным знаком смешанной производной от корреляционной функции изображения.

Сделаем следующее замечание: здесь и далее производная изображения понимается в среднеквадратическом смысле. Но если случайное поле (изображение) ведет себя достаточно «правильно», то производные изображения являются в то же время и почти достоверными производными. Поэтому с вероятностью, равной единице, их можно отождествить с производными в том смысле, как они понимаются в анализе.

При сравнении выражений (5) и (9) видно, что порядки производных в (9) равны следующим значениям:  $n = k = n_1 = k_2 = 1$ ,  $k_1 = n_2 = 0$ .

При этих значениях порядков производных выражение (5) представляет собой не что иное, как выражение (9).

Справедливость (5) может быть доказана для любого произвольного  $(n+k)$ -го порядка производной корреляционной функции изображения, однако громоздкость выкладок не позволяет сделать это в рамках данной работы.

Отметим два частных случая, когда порядки производных  $k$  или  $n$  принимают нулевые значения. Тогда выражение (5) приводится соответственно к выражениям вида

$$\frac{\partial^{(n+0)}}{\partial \tau_1^{(n)} \partial \tau_2^{(0)}} B(\tau_1, \tau_2) = (-1)^n B_{\varphi_{xy}^{(n+0)} \varphi_{xy}^{(n+0)}}(\tau_1, \tau_2), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^{(0+k)}}{\partial \tau_1^{(0)} \partial \tau_2^{(k)}} B(\tau_1, \tau_2) = (-1)^k B_{\varphi_{xy}^{(0+k)} \varphi_{xy}^{(0+k)}}(\tau_1, \tau_2). \quad (11)$$

Выражения (10) и (11) являются обобщением на случай двух переменных приведенного в [2] выражения, связывающего производную от корреляционной функции стационарного в широком смысле случайного процесса со взаимной корреляционной функцией его производных.

При равных значениях порядков производных  $n_1 = n_2 = n/2$  и  $k_1 = k_2 = k/2$  выражения (10) и (11) преобразуются соответственно к выражениям вида

$$\frac{\partial^{(n)}}{\partial \tau_1^n} B(\tau_1, \tau_2) = B_{\varphi_x^{(n/2)}}(\tau_1, \tau_2), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^{(k)}}{\partial \tau_2^k} B(\tau_1, \tau_2) = B_{\varphi_y^{(k/2)}}(\tau_1, \tau_2). \quad (13)$$

Подставляя выражения (5), (12) и (13) в (3), получим следующие выражения для моментов энергетического спектра:

$$m_{nk} = (-1)^{(n1+k1)} j^{-(n+k)} (2\pi)^2 B_{\varphi_{xy}^{(n1+k1)} \varphi_{xy}^{(n2+k2)}}(0, 0), \quad (14)$$

$$m_{n0} = (2\pi)^2 B_{\varphi_x^{(n/2)}}(0, 0), \quad (15)$$

$$m_{0k} = (2\pi)^2 B_{\varphi_y^{(k/2)}}(0, 0). \quad (16)$$

Физическая сущность спектральных моментов наглядно проявляется в видоизмененной форме записи этих выражений. С учетом ограниченности размеров изображения выражения (14)–(16) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} m_{nk} &= \frac{(-1)^{(n1+k1)}}{ab} j^{-(n+k)} \int_{-(a/2)}^{a/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} \varphi_{xy}^{(n1+k1)}(x, y) \varphi_{xy}^{(n2+k2)}(x, y) dx dy = \\ &= (-1)^{(n1+k1)} j^{-(n+k)} \overline{\varphi_{xy}^{(n1+k1)} \varphi_{xy}^{(n2+k2)}}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} m_{n0} = \frac{1}{ab} \int_{-(a/2)}^{a/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} (\varphi_x^{(n/2)}(x, y))^2 dx dy = \overline{(\varphi_x^{(n/2)})^2}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} m_{0k} = \frac{1}{ab} \int_{-(a/2)}^{a/2} \int_{-(b/2)}^{b/2} (\varphi_y^{(k/2)}(x, y))^2 dx dy = \overline{(\varphi_y^{(k/2)})^2}, \quad (19)$$

где черта сверху – знак усреднения по пространственным координатам.

Как было отмечено выше, выражение (17) – более общая запись выражений (18) и (19). Его можно представить в виде таблицы, которая с точностью до постоянного множителя наглядно отражает связь между спектральным моментом  $m_{nk}$  и усредненным значением произведения частных производных изображения (см. в таблице строку и столбец 1).

Выражение (17) является обобщением на моменты любого порядка функции двух переменных теоремы Рэлея, устанавливающей связь между полными энергиями сигналов во временной и частотной областях.

	$\varphi_{xy}^{(1+0)}$	$\varphi_{xy}^{(0+1)}$	$\varphi_{xy}^{(2+0)}$	$\varphi_{xy}^{(1+1)}$	$\varphi_{xy}^{(0+2)}$	$\varphi_{xy}^{(3+0)}$	$\varphi_{xy}^{(2+1)}$	$\varphi_{xy}^{(1+2)}$	$\varphi_{xy}^{(0+3)}$	...
$\varphi_{xy}^{(1+0)}$	$m_{20}$	$m_{11}$	0	0	0	$-m_{40}$	$-m_{31}$	$-m_{22}$	$-m_{13}$	
$\varphi_{xy}^{(0+1)}$	$m_{11}$	$m_{02}$	0	0	0	$-m_{31}$	$-m_{22}$	$-m_{13}$	$-m_{04}$	
$\varphi_{xy}^{(2+0)}$	0	0	$m_{40}$	$m_{31}$	$m_{22}$	0	0	0	0	
$\varphi_{xy}^{(1+1)}$	0	0	$m_{31}$	$m_{22}$	$m_{13}$	0	0	0	0	
$\varphi_{xy}^{(0+2)}$	0	0	$m_{22}$	$m_{13}$	$m_{04}$	0	0	0	0	
$\varphi_{xy}^{(3+0)}$	$-m_{40}$	$-m_{31}$	0	0	0	$m_{60}$	$m_{51}$	$m_{42}$	$m_{33}$	
$\varphi_{xy}^{(2+1)}$	$-m_{31}$	$-m_{22}$	0	0	0	$m_{51}$	$m_{42}$	$m_{33}$	$m_{24}$	
$\varphi_{xy}^{(1+2)}$	$-m_{22}$	$-m_{13}$	0	0	0	$m_{42}$	$m_{33}$	$m_{24}$	$m_{15}$	
$\varphi_{xy}^{(0+3)}$	$-m_{13}$	$-m_{04}$	0	0	0	$m_{33}$	$m_{24}$	$m_{15}$	$m_{06}$	
...										

Для рассматриваемого в этой работе случая анализа двумерных полей выражения (17)–(19) устанавливают связь между спектральными моментами и моментами частных производных изображения соответствующих порядков:

$$m_{nk} = (2\pi)^2 (-1)^{(n1+k1)} j^{-(n+k)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}^{(n1+k1)} \varphi_{xy}^{(n2+k2)} \times \\ \times W(\varphi_{xy}^{(n1+k1)}, \varphi_{xy}^{(n2+k2)}) d\varphi_{xy}^{(n1+k1)} d\varphi_{xy}^{(n2+k2)}, \quad (20)$$

где  $W(\varphi_{xy}^{(n1+k1)}, \varphi_{xy}^{(n2+k2)})$  – двумерная плотность распределения производных изображения  $(n1+k1)$ -го и  $(n2+k2)$ -го порядков, взятых соответственно в направлениях координатных осей  $x$  и  $y$ ;

$$m_{n0} = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_x^{(n/2)})^2 W(\varphi_x^{(n/2)}) d\varphi_x^{(n/2)}, \quad (21)$$

где  $W(\varphi_x^{(n/2)})$  – плотность распределения производной изображения порядка  $(n/2)$ , взятой в направлении координатной оси  $x$ ;

$$m_{0k} = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_y^{(k/2)})^2 W(\varphi_y^{(k/2)}) d\varphi_y^{(k/2)}, \quad (22)$$

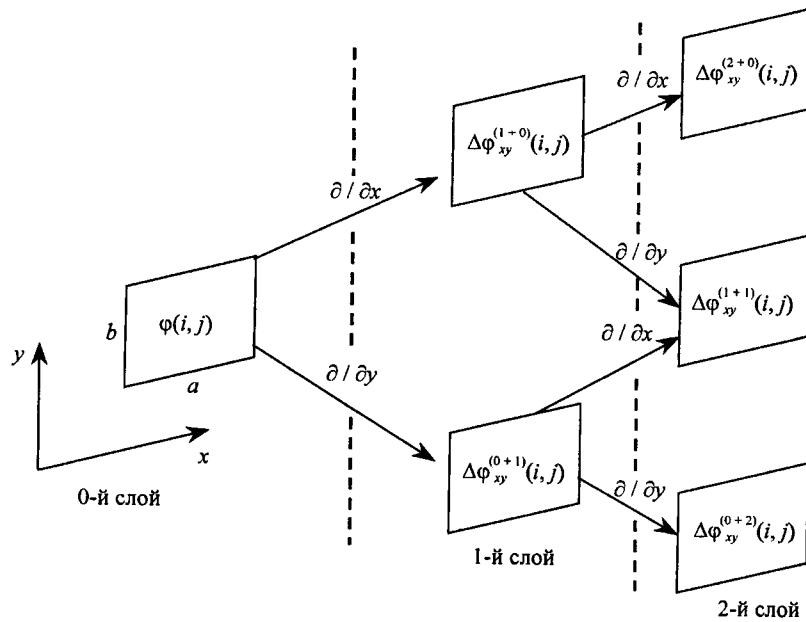


Рис. 1

где  $W(\varphi_y^{(k/2)})$  – плотность распределения производной изображения порядка  $(k/2)$ , взятой в направлении координатной оси  $y$ .

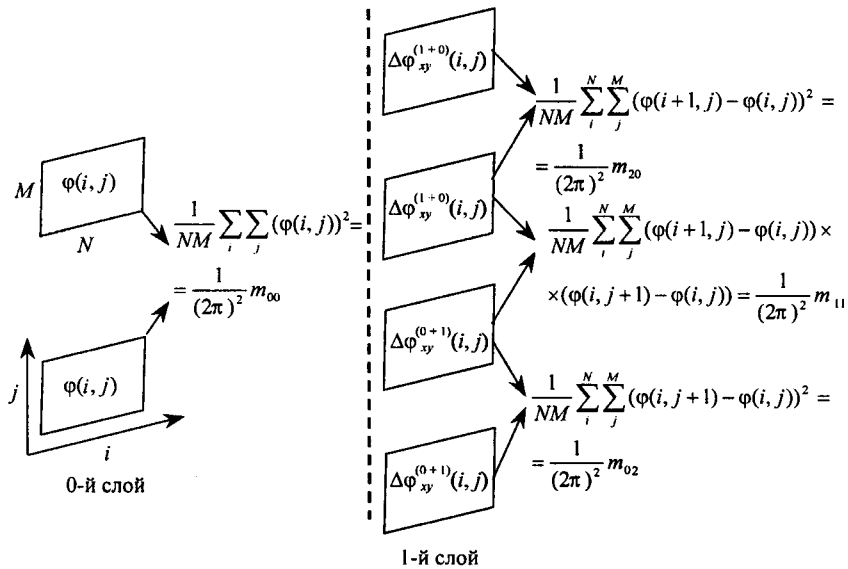
Из выражений (20)–(22) видно, что моменту сколь угодно высокого порядка в частотной области всегда соответствует момент второго порядка в области пространственных переменных.

Поскольку на реальном изображении скорость изменения яркости ограничена, то существуют и конечны средние мощности (в том числе взаимные) любой производной изображения, а следовательно, конечны и значения спектральных моментов. Практическое вычисление спектральных моментов, как это следует из (17)–(19), удобно осуществить в области пространственных переменных.

Для этого изображение подвергают многослойной обработке. На каждом слое обработки (рис. 1) исходное изображение с помощью дифференциальных операторов преобразуют в последовательность производных изображения по координатным осям. Используя, например, цифровые методы обработки, производные изображения в конечных разностях  $\Delta\varphi$  можно получить с помощью дифференциальных операторов Собела, Превитта и т. д. [3]. В данной работе использован простейший дифференциальный оператор. Полученные конечные разности перемножают, как это показано на рис. 2, результаты умножения суммируют по всем координатам, а конечную сумму усредняют.

Полученные оценки спектральных моментов используют в качестве первичных признаков для последующего нахождения характеристик, инвариантных к разного рода преобразованиям изображения.

Изложенное выше позволяет сделать вывод о перспективности использования моментов в качестве инструментальной меры оценивания спек-



ральных характеристик при решении практических задач автоматического экспресс-анализа и классификации изображений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлова В. А., Разин И. В., Тетерин В. В. Представление пространственного спектра через плотности перепадов яркости // Оптико-мех. пром-сть. 1982. № 12. С. 3.
2. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1974. Кн. 1. С. 549.
3. Абду И. Э., Прэйтт У. К. Количественный расчет детекторов контуров, основанных на подчеркивании перепадов яркости с последующим пороговым ограничением // ТИИЭР. 1979. 67, № 5. С. 59.

Санкт-Петербургский государственный  
университет телекоммуникаций им. М. А. Бонч-Бруевича,  
E-mail: kochan@sut.ru

Поступила в редакцию  
24 января 2003 г.