РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2003, том 39, № 1

УДК 681.5.015

Ю. Г. Булычев, И. В. Бурлай
(Ростов-на-Дону)

АВТОКОМПЕНСАЦИОННЫЙ МЕТОД ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

Решена задача оптимальной обработки измерительных данных при наличии в измерениях сингулярных ошибок на базе одношагового и многошагового метода наименьших квадратов. Полученные решения обеспечивают декомпозицию рассматриваемых задач, поскольку не предполагают традиционного расширения пространства состояний. Приведен иллюстративный пример, подтверждающий эффективность развиваемого подхода.

Введение. При решении широкого круга задач обработки измерительных данных [1–5] возникает необходимость оценивания параметров информационных процессов при наличии в измерениях сингулярных ошибок (СО). Под последними понимаются неизвестные ошибки измерений детерминированной структуры (т. е. неизвестными являются некоторые параметры заданной математической модели СО). Частным случаем таких СО являются постоянные систематические ошибки измерений.

Как правило, решение указанных задач осуществляется на базе линейного одношагового и многошагового метода наименьших квадратов (МНК) с привлечением традиционной процедуры расширения пространства состояний [2, 5]. Очевидно, что применение такой процедуры на практике приводит к известному эффекту «размазывания точности», росту объема вычислительных затрат и усложнению структур систем обработки данных.

Известны попытки решения проблемы оценивания при наличии СО на базе линейного МНК без расширения пространства состояний [6, 7], основанные на принципе инвариантности характеристик вектора состояния по отношению к рассматриваемому классу ошибок. В данном случае искомые коэффициенты линейного преобразования входного наблюдения выбираются из условия минимума дисперсии оценки при выполнении условий несмещенности и инвариантности относительно СО. Однако, как показывает анализ, результаты, полученные в работах [6, 7], сводятся лишь к решению задачи одношагового оценивания и справедливы при очень жестких ограничениях на модели информационных процессов и СО, которые на практике выполняются в редких случаях. Кроме того, в данных работах не учитывается возможность использования априорной информации об оцениваемом процессе, например, в виде некоторой начальной оценки вектора состояния.

В этой работе в рамках системного подхода развивается автокомпенсационный метод обработки результатов измерений, содержащих СО, для различных случаев априорной неопределенности, характеризующейся отсутствием или наличием априорной информации о процессе.

Постановка задачи. В соответствии с принципами системного анализа декомпозируем задачу обработки результатов измерений на две частные подзадачи. Первоначально рассмотрим задачу оценивания вектора состояния $x \in R^n$ на базе одношагового МНК по результатам измерений $z \in R^l$, содержащим СО вида Θa:

$$z = Hx + \Theta a + \mathrm{v}, \tag{1}$$

где $H \in R^{l \times n}$ и $\Theta \in R^{l \times p}$ – известные ненулевые матрицы; $a \in R^p$ – вектор неизвестных параметров СО; $\mathrm{v} \in R^l$ – вектор случайных ошибок измерений с характеристиками

$$M[\mathrm{v}] = 0, \quad M[\mathrm{v}\mathrm{v}^{\mathrm{T}}] = V \tag{2}$$

($M[\cdot]$ – символ математического ожидания, $V \in R^{l \times l}$ – известная положительно-определенная матрица).

Предположим, что известна начальная (априорная) оценка $\bar{x} \in R^n$ вектора x, для которой

$$M[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^{\mathrm{T}}] = \Lambda, \tag{3}$$

где $\Lambda \in R^{n \times n}$ – известная положительно-определенная матрица.

Требуется с учетом (1)–(3) на базе МНК сформировать оптимальную оценку $\hat{x}$ вектора x, не прибегая к расширению пространства состояний в рамках декомпозиционного подхода.

Теперь рассмотрим вторую частную задачу стохастической многошаговой фильтрации процесса $x_i \in R^n$, описываемого уравнениями

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + \Gamma_i w_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{4}$$

где $\Phi_i \in R^{n \times n}$ и $\Gamma_i \in R^{n \times r}$ – известные матрицы;

$$\begin{cases} M[x_0] = \bar{x}_0, \quad M[w_i] = 0, \\ M[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}}] = \Lambda_0, \\ M[(w_i - \bar{w}_i)(w_j - \bar{w}_j)^{\mathrm{T}}] = Q_i \delta_{ij}, \\ M[(w_i - \bar{w}_i)(x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}}] = 0 \end{cases} \tag{5}$$

(δ_{ij} – символ Кронекера).

Уравнение для вектора измерений $z_i \in R^l$, содержащего ошибку $\Theta_i a_i$, имеет вид

$$z_i = H_i x_i + \Theta_i a_i + \mathrm{v}_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{6}$$

где $H_i \in R^{l\times n}$ и $\Theta_i \in R^{l\times p}$ – известные матрицы; $a_i \in R^p$ – векторы неизвестных параметров СО; $\mathrm{v}_i \in R^l$ – векторы случайных ошибок измерений с характеристиками

$$\begin{cases} M[\mathrm{v}_i]=0, & M[\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j^{\mathrm{T}}]=V_i\delta_{ij}, \\ M[(w_i-\overline{w}_i)\mathrm{v}_j^{\mathrm{T}}]=0, & M[(x_0-\overline{x}_0)\mathrm{v}_i^{\mathrm{T}}]=0 \end{cases} \qquad (7)$$

($V_i \in R^{l\times l}$ – известная положительно-определенная матрица).

Требуется с учетом (4)–(7) получить рекуррентную процедуру оценивания вектора состояния x_i на базе многошагового МНК без расширения пространства состояний (в рамках декомпозиционного подхода) для различных случаев априорной неопределенности.

Очевидно, что решение первой частной задачи будет использовано как промежуточный результат при решении второй задачи. Кроме того, в дальнейшем будем полагать, что известные условия наблюдаемости для рассматриваемых задач оценивания и фильтрации выполняются.

Решение задачи оценивания без расширения пространства состояний. Решение задачи (1)–(3) на базе МНК сводится к минимизации относительно векторов x и a следующей квадратичной формы:

$$J=2^{-1}[(x-\overline{x})^{\mathrm{T}}\Lambda^{-1}(x-\overline{x})+(z-Hx-\Theta a)^{\mathrm{T}}V^{-1}(z-Hx-\Theta a)]. \qquad (8)$$

Оценки $\hat{x}$, $\hat{a}$ находятся из условия экстремума функционала (8):

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{x}}=\Lambda^{-1}(\hat{x}-\overline{x})-H^{\mathrm{T}}V^{-1}(z-H\hat{x}-\Theta\hat{a})=0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{a}}=-\Theta^{\mathrm{T}}V^{-1}(z-H\hat{x}-\Theta\hat{a})=0. \qquad (10)$$

Непосредственно из (10) находим

$$\hat{a}=(\Theta^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta)^{-1}\Theta^{\mathrm{T}}V^{-1}(z-H\hat{x}). \qquad (11)$$

Используя обозначение

$$K_a=(\Theta^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta)^{-1}\Theta^{\mathrm{T}}V^{-1}, \qquad (12)$$

выражение (11), рассматриваемое как уравнение оценивания СО, запишем в виде

$$\hat{a}=K_a(z-H\hat{x}), \qquad (13)$$

где $K_a \in R^{p\times l}$ может рассматриваться как матрица усиления для канала оценивания параметров СО.

Из (12) следует, что $K_a\Theta = E_p$, где $E_p \in R^{p\times p}$ – единичная матрица. При этом, если $\Theta \in R^{p\times p}$ является квадратной матрицей (в случае $l = p$), то $K_a = \Theta^{-1}$.

Подставляя (13) в (9), после соответствующей группировки слагаемых находим выражение

$$(\Lambda^{-1} + H^{\mathrm{T}}V^{-1}H - H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a H)\hat{x} = \Lambda^{-1}\bar{x} + H^{\mathrm{T}}V^{-1}z - H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a z. \quad (14)$$

Прибавляя к правой части выражения (14) слагаемое

$$[(H^{\mathrm{T}}V^{-1}H - H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a H) - (H^{\mathrm{T}}V^{-1}H - H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a H)]\bar{x} = 0,$$

получим

$$(\Lambda^{-1} + H^{\mathrm{T}}V^{-1}H - H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a H)\hat{x} = (\Lambda^{-1} + H^{\mathrm{T}}V^{-1}H - H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a H)\bar{x} +$$

$$+ (H^{\mathrm{T}}V^{-1}z - H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a z - H^{\mathrm{T}}V^{-1}H\bar{x} + H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a\hat{x}). \quad (15)$$

Последнее выражение в круглых скобках формулы (15) сворачивается так:

$$H^{\mathrm{T}}V^{-1}(z - H\bar{x}) - H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a(z - H\bar{x}) =$$

$$= (H^{\mathrm{T}}V^{-1} - H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a)(z - H\bar{x}) = H^{\mathrm{T}}V^{-1}(E_l - \Theta K_a)(z - H\bar{x}) \quad (16)$$

(здесь $E_l \in R^{l\times l}$ – единичная матрица размера $l \times l$).

Вводя обозначение

$$P_x^{-1} = \Lambda^{-1} + H^{\mathrm{T}}V^{-1}H - H^{\mathrm{T}}V^{-1}\Theta K_a H \quad (17)$$

и подставляя (16) в (15), получаем

$$\hat{x} = \bar{x} + P_x H^{\mathrm{T}}V^{-1}W_a(z - H\bar{x}) = \bar{x} + K_x(z - H\bar{x}), \quad (18)$$

где $W_a = E_l - \Theta K_a$.

Данное выражение может рассматриваться как уравнение оценивания вектора состояния x с матрицей усиления

$$K_x = P_x H^{\mathrm{T}}V^{-1}W_a, \qquad K_x \in R^{n\times l}. \quad (19)$$

Если Λ^{-1} равна нулевой матрице, что свидетельствует об отсутствии априорной оценки $\bar{x}$ вектора x, то в формуле (17) слагаемое Λ^{-1} следует опустить.

Покажем, что величина P_x в уравнении (18) есть корреляционная матрица ошибки оценивания:

$$P_x = M[\varepsilon_x\varepsilon_x^{\mathrm{T}}] = M[(\hat{x} - x)(\hat{x} - x)^{\mathrm{T}}]. \quad (20)$$

Запишем ряд очевидных соотношений:

$$\varepsilon_x = \bar{x} - x + \hat{x} - \bar{x} = \bar{x} - x + K_x[\mathrm{v} - H(\bar{x} - x)] =$$

$$= (E_n - K_x H)(\bar{x} - x) + K_x \mathrm{v}. \qquad (21)$$

Поскольку $\bar{x} - x$ и v независимы, то из (20) и (21) следует, что

$$M[\varepsilon_x \varepsilon_x^{\mathrm{T}}] = (E_n - K_x H)\Lambda(E_n - K_x H)^{\mathrm{T}} + K_x V K_x^{\mathrm{T}}. \qquad (22)$$

Умножая (17) слева на P_x и справа на Λ, получаем

$$\Lambda = P_x + P_x H^{\mathrm{T}} V^{-1} W_a H \Lambda \qquad (23)$$

или

$$P_x = (E_n - K_x H)\Lambda. \qquad (24)$$

Подставляя (23) в (22), имеем

$$M[\varepsilon_x \varepsilon_x^{\mathrm{T}}] = P_x - P_x H^{\mathrm{T}} K_x^{\mathrm{T}} + K_x V K_x^{\mathrm{T}} =$$

$$= P_x - P_x H^{\mathrm{T}} V^{-1} H P_x + P_x H^{\mathrm{T}} V^{-1} H P_x. \qquad (25)$$

Таким образом, $M[\varepsilon_x \varepsilon_x^{\mathrm{T}}] = P_x$, что и требовалось доказать.

Явное выражение для корреляционной матрицы P_x ошибок оценивания вектора x, не зависящее от матрицы усиления K_x, следует из формулы (17):

$$P_x = (\Lambda^{-1} + H^{\mathrm{T}} V^{-1} H - H^{\mathrm{T}} V^{-1} \Theta K_a H)^{-1} = (\Lambda^{-1} + H^{\mathrm{T}} V^{-1} W_a H)^{-1}. \qquad (26)$$

Непосредственно из (23) следует очевидное соотношение $P_x \le \Lambda$, если матрица $H^{\mathrm{T}} V^{-1} W_a H$ по крайней мере положительно полуопределена. Таким образом, проведение измерений улучшает в среднем точность оценивания фазового вектора x несмотря на наличие в векторе z СО.

Найдем теперь корреляционную матрицу ошибок оценивания вектора a:

$$P_a = M[\varepsilon_a \varepsilon_a^{\mathrm{T}}] = M[(\hat{a} - a)(\hat{a} - a)^{\mathrm{T}}], \qquad (27)$$

которая с учетом (13) может быть записана в следующем виде:

$$P_a = M[\{K_a(z - H\hat{x}) - a\}\{K_a(z - H\hat{x}) - a\}^{\mathrm{T}}]. \qquad (28)$$

Так как $\hat{x} - x = \varepsilon_x$, то, подставляя (1) в (28), получим

$$P_a = M[\{K_a(-H\varepsilon_x + \Theta a + \mathrm{v}) - a\}\{K_a(-H\varepsilon_x + \Theta a + \mathrm{v}) - a\}^{\mathrm{T}}]. \qquad (29)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся промежуточным результатом

$$M[\varepsilon_x \mathrm{v}^{\mathrm{T}}] = [\{(E_n - K_x H)(\bar{x} - x) + K_x \mathrm{v}\}\mathrm{v}^{\mathrm{T}}] =$$

$$= (E_n - K_x H) M[(\bar{x} - x)\mathrm{v}^{\mathrm{T}}] + K_x M[\mathrm{v}\mathrm{v}^{\mathrm{T}}]. \qquad (30)$$

Поскольку $M[(\bar{x} - x)\mathrm{v}^{\mathrm{T}}] = 0$ и $M[\mathrm{v}\mathrm{v}^{\mathrm{T}}] = V$, то

$$M[\varepsilon_x \mathrm{v}^{\mathrm{T}}] = K_x V. \qquad (31)$$

Раскрывая выражение (29), с учетом (31) находим

$$P_a = K_a H P_x (K_a H)^{\mathrm{T}} - K_a H K_x V K_a^{\mathrm{T}} + K_a \Theta a (K_a \Theta a)^{\mathrm{T}} - K_a \Theta a a^{\mathrm{T}} -$$

$$- K_a (K_a H K_x V)^{\mathrm{T}} + K_a V K_a^{\mathrm{T}} - a (K_a \Theta a)^{\mathrm{T}} + a a^{\mathrm{T}}. \qquad (32)$$

После несложных преобразований получаем следующее выражение для корреляционной матрицы:

$$P_a = K_a (H P_x H^{\mathrm{T}} - H K_x V) K_a^{\mathrm{T}} + a a^{\mathrm{T}} (E_p - K_a \Theta)(E_p - (K_a \Theta)^{\mathrm{T}}) +$$

$$+ K_a [V - (H K_x V)^{\mathrm{T}}] K_a^{\mathrm{T}}. \qquad (33)$$

Поскольку $K_a \Theta = E_p$, то с учетом обозначений $G_x = H K_x V$ и $F_x = H P_x H^{\mathrm{T}}$ искомая матрица будет иметь вид

$$P_a = K_a (F_x - G_x + V - G_x^{\mathrm{T}}) K_a^{\mathrm{T}}. \qquad (34)$$

Полученные выше соотношения полностью задают одношаговый алгоритм оценивания вектора состояния x при наличии в измерениях СО. При этом решение получено на базе МНК без расширения пространства состояний. В предложенном варианте оценивания учитывается наличие априорной информации в виде начального значения $\bar{x}$. При отсутствии такой информации уравнения оптимального оценивания (18) и (26) примут следующий вид (полагая $\bar{x} = 0$ и $\Lambda^{-1} = 0$):

$$\hat{x}\big|_{a \neq 0} = P_x H^{\mathrm{T}} V^{-1} W_a z, \qquad (35)$$

$$P_x\big|_{a \neq 0} = (H^{\mathrm{T}} V^{-1} W_a H)^{-1}. \qquad (36)$$

Кроме того, если принять $a = 0$, то непосредственно из (35) и (36) получим известные уравнения одношагового линейного несмещенного оценивания с минимальной среднеквадратической ошибкой [2]:

$$\hat{x}\big|_{a = 0} = P_x H^{\mathrm{T}} V^{-1} z, \qquad (37)$$

Соотношения (8)–(38) составляют основу декомпозиционного одношагового МНК для различных случаев априорной неопределенности.

Оптимальная обработка многошаговых процессов. Рассмотрим задачу оценивания состояния многошагового процесса (4) по результатам измерений (6), содержащим не только случайную ошибку, но и неизвестную СО заданного вида.

Без учета СО оценку $\hat{x}_{i+1}$ вектора состояния x_{i+1} можно получить, используя фильтр Калмана для линейных многошаговых процессов [2]:

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i + K_{x,i}(z_i - H_i\bar{x}_i), \quad i = 0,1,\ldots,N, \tag{39}$$

$$\hat{x}_{i+1} = \Phi_i\hat{x}_i, \quad \hat{x}_0 = \bar{x}_0, \tag{40}$$

$$K_{x,i} = P_{x,i}H_i^{\text{т}}V_i^{-1}, \tag{41}$$

$$P_{x,i} = (\Lambda_i^{-1} + H_i^{\text{т}}V_i^{-1}H_i)^{-1} = \Lambda_i - \Lambda_i H_i^{\text{т}}(H_i\Lambda_i H_i^{\text{т}} + V_i)^{-1}H_i\Lambda_i, \tag{42}$$

где

$$\Lambda_{i+1} = \Phi_i P_{x,i}\Phi_i^{\text{т}} + \Gamma_i Q_i \Gamma_i^{\text{т}}. \tag{43}$$

Очевидно, что при учете СО искомая оценка $\overset{*}{x}_{i+1}$ вектора состояния x_{i+1} должна находиться с учетом результатов, полученных в предыдущем разделе:

$$\overset{*}{x}_i = \overset{*}{\bar{x}}_i + \overset{*}{K}_{x,i}(z_i - H_i\overset{*}{\bar{x}}_i), \quad i = 0,1,\ldots,N, \tag{44}$$

где символ «*» указывает на то, что все элементы, входящие в уравнение (44), построены с использованием соотношений (11), (12), (18), (19), (26) и (34).

Так, с учетом (12), (18) и (26) оценка экстраполяции находится по правилу

$$\overset{*}{\bar{x}}_{i+1} = \Phi_i\overset{*}{x}_i, \quad i = 0,1,\ldots,N-1, \tag{45}$$

где начальное условие задается в виде (полагая $W_{a,0} = E_l - \Theta_0\bar{x}_0$)

$$\overset{*}{x}_0 = \bar{x}_0 + \overset{*}{P}_{x,0}H_0^{\text{т}}V_0^{-1}W_{a,0}(z_0 - H\bar{x}_0), \tag{46}$$

$$\overset{*}{P}{}^{-1}_{x,0} = \Lambda_0^{-1} + H_0^{\mathrm{T}} V_0^{-1} H_0 - H_0^{\mathrm{T}} V_0^{-1} \Theta_0 \overset{*}{K}_{a,0} H_0, \tag{47}$$

$$\overset{*}{K}_{a,0} = (\Theta_0^{\mathrm{T}} V_0^{-1} \Theta_0)^{-1} \Theta_0^{\mathrm{T}} V_0^{-1}. \tag{48}$$

В свою очередь, матрица усиления $\overset{*}{K}_{x,i}$ с учетом (19) рассчитывается по формуле

$$\overset{*}{K}_{x,i} = \overset{*}{P}_{x,i} H_i^{\mathrm{T}} V_i^{-1} W_{a,i}, \tag{49}$$

где корреляционная матрица ошибок оценивания вектора состояния x_i находится следующим образом (полагая $W_{a,i} = E_l - \Theta_i K_{a,i}$):

$$\overset{*}{P}_{x,i} = \Lambda_i - \Lambda_i H_i^{\mathrm{T}} (H_i \Lambda_i H_i^{\mathrm{T}} + V_i^{-1} W_{a,i})^{-1} H_i \Lambda_i, \tag{50}$$

$$\overset{*}{K}_{a,i} = (\Theta_i^{\mathrm{T}} V_i^{-1} \Theta_i)^{-1} \Theta_i^{\mathrm{T}} V_i^{-1}. \tag{51}$$

Оптимальная оценка $\overset{*}{a}_i$ вектора коэффициентов a_i, фигурирующего в модели (6), отвечает уравнению

$$\overset{*}{a}_i = \overset{*}{K}_{a,i}(z_i - H_i \overset{*}{x}_i), \tag{52}$$

где матрица усиления $\overset{*}{K}_{a,i}$ находится по формуле (51).

Несложно показать, что корреляционная матрица ошибок оценивания вектора a_i задается выражением

$$\overset{*}{P}_{a,i} = \overset{*}{K}_{a,i}(F_{x,i} - G_{x,i} + V_i - G_{x,i}^{\mathrm{T}}) \overset{*}{K}{}_{a,i}^{\mathrm{T}}, \tag{53}$$

в котором смысл входящих в (53) элементов проясняется формулой (34).

Ошибка оценки состояния многошагового процесса с использованием разработанного подхода находится с учетом (4), (6), (44) и (45):

$$\begin{aligned} \overset{*}{\varepsilon}_{i+1} &= \overset{*}{x}_{i+1} - x_{i+1} = \overset{*}{\bar{x}}_{i+1} + \overset{*}{K}_{x,i+1}(z_{i+1} - H_{i+1}\overset{*}{\bar{x}}_{i+1}) - \Phi_i x_i - \Gamma_i w_i = \\ &= \Phi_i \varepsilon_i - \overset{*}{K}_{x,i+1}(H_{i+1}\Phi_i \varepsilon_i - H_{i+1}\Gamma_i w_i - \Theta_{i+1} a_{i+1} - \mathrm{v}_{i+1}) = \\ &= (\Phi_i - \overset{*}{K}_{x,i+1} H_{i+1} \Phi_i)\varepsilon_i + \overset{*}{K}_{x,i+1}(H_{i+1}\Gamma_i w_i + \Theta_{i+1} a_{i+1} + \mathrm{v}_{i+1}). \end{aligned} \tag{54}$$

Если положить $a_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, N$, то из (54) получаем известную формулу для ошибки линейной многошаговой фильтрации при отсутствии СО [2]:

$$\hat{\varepsilon}_{i+1} = \hat{x}_{i+1} - x_{i+1} = (\Phi_i - K_{x,i+1} H_{i+1} \Phi_i)\varepsilon_i + K_{x,i+1}(H_{i+1}\Gamma_i w_i + \mathrm{v}_{i+1}). \quad (55)$$

Представим формулу (54) с учетом (49) в следующем виде:

$$\overset{*}{\varepsilon}_{i+1} = (E_n - \overset{*}{P}_{x,i+1} H^{\mathrm{T}}_{i+1} V^{-1}_{i+1} W_{a,i+1})\Phi_i \varepsilon_i +$$

$$+ \overset{*}{P}_{x,i+1} H^{\mathrm{T}}_{i+1} V^{-1}_{i+1} W_{a,i+1}(H_{i+1}\Gamma_i w_i + \Theta_{i+1} a_{i+1} + \mathrm{v}_{i+1}). \quad (56)$$

Данная формула позволяет моделировать работу линейного фильтра для различных условий функционирования с целью выбора таких его параметров, которые обеспечат требуемую точность фильтрации. Анализ выражения (56) показывает, что точность фильтрации существенно зависит от величины СО $\Theta_{i+1} a_{i+1}$ и ее коэффициента усиления $\overset{*}{K}_{a,i+1}$.

Соотношения (39)–(56) составляют основу системного подхода к линейной фильтрации при наличии СО для различных случаев априорной неопределенности.

Результаты моделирования. По аналогии с [2, с. 405] рассмотрим задачу определения координат местоположения летательного аппарата (ЛА) по измерениям углов α_i $(i = \overline{1,6})$, производимым из шести точек визирования (ТВ_i, $i = \overline{1,6}$), расположенных на оси OY (см. рисунок).

Углы α_i связаны с координатами y и z очевидными соотношениями:

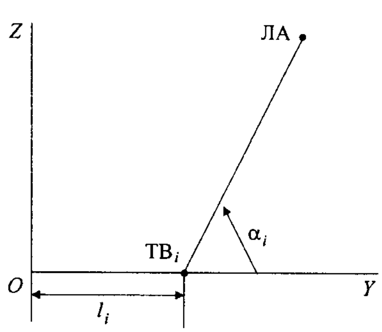
$$\alpha_i = \operatorname{arctg}(z/(y - l_i)). \quad (57)$$

Полагая известными приближенные координаты $\bar{y}$ и $\bar{z}$ местоположения ЛА, воспользуемся следующими обозначениями:

$$x_1 = y - \bar{y}, \qquad x_2 = z - \bar{z}, \qquad \Delta\alpha = \alpha_i - \bar{\alpha}_i, \quad (58)$$

где $\bar{\alpha}_i = (\alpha_i)_{\substack{y = \bar{y} \\ z = \bar{z}}}$.

Предполагаем, что реальные измерения углов α_i осуществляются в соответствии с моделью



$$\hat{\alpha}_i = \alpha_i + \mathrm{v}_i + s_i, \quad (59)$$

где s_i – систематическая ошибка измерений.

Используя (58), перейдем к центрированным измерениям

$$z_i = \hat{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i = \alpha_i + \mathrm{v}_i + s_i - \bar{\alpha}_i =$$

$$= \Delta\alpha_i + \mathrm{v}_i + s_i. \quad (60)$$

С учетом линеаризации соотношения (57) в окрестности опорной точки $(\bar{y}, \bar{z})$ запишем как

$$z_i = \Delta\alpha_i + v_i + s_i \approx H_i x + \bar{s}_i + v_i + s_i, \tag{61}$$

где $\bar{s}_i$ – неизвестная постоянная ошибка линеаризации; $H_i = [h_{i1}, h_{i2}]$; $h_{i1} = \left(\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial y}\right)_{\substack{y=\bar{y}\\ z=\bar{z}}}$; $h_{i2} = \left(\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial z}\right)_{\substack{y=\bar{y}\\ z=\bar{z}}}$.

С учетом (57)–(61) можно записать уравнение измерений (1), в котором слагаемое Θa позволяет в некоторой степени скомпенсировать вредное суммарное действие ошибок $\bar{s}_i$ и s_i.

Для моделирования процесса оценивания с учетом флуктуационных и систематических ошибок измерений воспользуемся следующими исходными данными: $y=375$; $\bar{y}=369$; $z=220$; $\bar{z}=213{,}5$; $l_1=0$; $l_2=152{,}5$; $l_3=280$; $l_4=368{,}5$; $l_5=369{,}3$; $l_6=450$; $V=\mathrm{diag}[0{,}2,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}5,\ 0{,}5,\ 0{,}1]$; $\Lambda=\mathrm{diag}[0{,}1,\ 0{,}2]$; $\Theta^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $v^{\mathrm{T}} = [0{,}63, 0{,}49, -0{,}35, -0{,}91, 0{,}59, 0{,}31]$; $a^{\mathrm{T}} = [15, 20]$. Здесь и далее линейные величины выражены в метрах, а угловые – в градусах.

Анализ исходных данных показывает, что в этом случае требуется скомпенсировать действие СО в измерениях, полученных с ТВ_4 и ТВ_5.

Предложенный в работе подход позволяет получить следующие результаты:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}26 \\ 0{,}45 \end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}+\hat{x}_1 \\ \bar{z}+\hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 369{,}26 \\ 213{,}95 \end{bmatrix};\quad P_x = \begin{bmatrix} 0{,}09 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}18 \end{bmatrix};$$

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 15{,}65 \\ 21{,}99 \end{bmatrix};\quad \|[y-\hat{y},\ z-\hat{z}]\| = 8{,}34;\quad \|[a_1-\hat{a}_1,\ a_2-\hat{a}_2]\| = 2{,}09.$$

Для сравнения моделировался алгоритм оценивания на базе МНК с расширением пространства состояний [8]. При этом были получены следующие данные:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}19 \\ -0{,}09 \\ 15{,}72 \\ 22{,}06 \end{bmatrix};\quad P_{x,a} = \begin{bmatrix} 0{,}09 & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}01 & 0{,}19 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}01 & 0{,}50 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}51 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}+\hat{x}_1 \\ \bar{z}+\hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 369{,}19 \\ 213{,}41 \end{bmatrix};$$

$$\|[y-\hat{y},\ z-\hat{z}]\| = 8{,}79;\quad \|[a_1-\hat{a}_1, a_2-\hat{a}_2]\| = 2{,}18,$$

где $P_{x,a}$ – расширенная корреляционная матрица ошибок измерений.

Некоторое ухудшение точности в данном случае можно объяснить эффектом «размазывания точности», обусловленным расширением пространства состояний.

В этом примере, иллюстрирующем лишь частный вопрос компенсации систематических ошибок, вычислительные процедуры векторно-матричной обработки результатов измерений достаточно просты, поскольку исходные матрицы имели диагональный вид. Для задачи оценивания при наличии СО общего вида с недиагональными матрицами имеет место некоторое усложнение процедуры получения результирующих оценок вектора состояния.

Заключение. Разработанный авторами подход является дальнейшим развитием результатов, полученных в [6, 7], и позволяет с системных позиций подойти к проблеме построения оптимальных оценок вектора состояния, обладающих свойством инвариантности к сингулярным погрешностям при различных уровнях априорной неопределенности. Главным достоинством развитого метода является то, что полученные решения не требуют в отличие от абсолютного большинства известных подходов расширения пространства состояний.

Достоинством метода также является его универсальность, поскольку полученные аналитические соотношения допускают удобную векторно-матричную форму записи, что весьма важно при реализации вычислительных процедур обработки больших массивов измерительных данных на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Цапенко М. П.** Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование. М.: Энергоатомиздат, 1985.
2. **Брайсон А., Хо Ю-Ш.** Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
3. **Вапник В. Н.** Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979.
4. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф.** Алгоритмы определения дисперсии и погрешностей, вызываемых помехами случайных сигналов // Автометрия. 1997. № 3. С. 80.
5. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
6. **Булычев Ю. Г., Бурлай И. В.** Методы контроля и коррекции результатов нелинейного оценивания состояния стохастических объектов с учетом моделирующей среды // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 30.
7. **Леонов В. А., Поплавский Б. К.** Фильтрация ошибок измерений при оценивании линейных преобразований полезного сигнала // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1992. № 1. С. 82.
8. **Жданюк Б. Ф.** Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.

Поступила в редакцию 22 апреля 2002 г.