РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2002, том 38, № 6

УДК 517.8 : 519.72

В. В. Савченко, А. А. Шкулев

(Нижний Новгород)

ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА ПРИ НАЛИЧИИ ВЫБРОСОВ

Получено аналитическое выражение для линейной оценки прогнозирования случайного временного ряда при действии одиночных и многократных импульсных помех. Показано, что благодаря предложенной процедуре восстановления «пораженных» отсчетов анализируемой выборки данных удается практически полностью устранить влияние помех на качество получаемых оценок. Выводы подтверждены результатами экспериментальных исследований на персональном компьютере.

Постановка задачи. Пусть некоторый центрированный случайный временной ряд (СВР) $X(t)$, $t=0,1,\ldots$, задается n-вектором своих отсчетов $x(0),x(1),\ldots,x(n-1)$ в ретроспективе относительно текущего момента времени $t=n-1$. Причем его будущий отсчет $x(n)$ заранее неизвестен. Дадим оценку этого отсчета как функцию некоторого конечного числа ($M<\infty$) предыдущих отсчетов:

$$\hat{x}(n)=y(x(n-1),x(n-2),\ldots,x(n-M)). \qquad (1)$$

В зависимости от вида функции y будем иметь различные варианты оценки прогнозирования. При этом наибольший интерес вызывают оценки прогнозирования линейного вида [1, 2]:

$$\hat{x}(n)=a_1x(n-1)+\ldots+a_Mx(n-M), \qquad (2)$$

где $\{a_i\}$ – вектор постоянных коэффициентов, а M – порядок оценки. Данная оценка обычно обосновывается применением авторегрессионной модели наблюдений M-го порядка [3]:

$$x(n)=a_1x(n-1)+a_2x(n-2)+\ldots+a_Mx(n-M)+\eta(n). \qquad (3)$$

Здесь $\eta(n)$ – порождающий белый шум с нулевым математическим ожиданием $\mathbf{M}[\eta(n)]=0$ и постоянной дисперсией $\sigma_\eta^2 = \mathrm{const}$. При справедливости модели (3) для анализируемого процесса $X(t)$ оценка (2) обеспечивает минимум дисперсии ошибки прогнозирования $\sigma_z^2 = \mathbf{M}(x(n)-\hat{x}(n))^2$ [2]. Таким образом, при заданных в ретроспективе M последовательных отсчетах СВР выражение (2) определяет для него оптимальную или близкую к ней оценку прогнозирования.

Ситуация резко меняется, если один или несколько отсчетов в ретроспективе нам достоверно неизвестны, например, поражены импульсными помехами. В таком случае выражение (2) при учете (3) преобразуется к виду

$$\hat{x}(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots + a_i \hat{x}(n-i) + \ldots + a_M x(n-M), \qquad (4)$$

где $\hat{x}(n-i)$ обозначает условное математическое ожидание для пораженного помехой отсчета. В случае неизвестного закона распределения раскрыть в явном виде формулу (4) обычно не удается. В этом и состоит суть рассматриваемой проблемы. Ее решению для некоторого частного случая, связанного с ограничениями на интенсивность потока действующих помех, и посвящена предлагаемая работа.

Синтез алгоритма. Предположим, что интенсивность действующей помехи по частоте ее повторения столь невелика, что в обозримой ретроспективе мы наблюдаем только один пораженный ею отсчет. При этом его номер $(n-i)$ нам заранее известен, т. е. помеха своевременно была обнаружена одним из известных методов. Перепишем в этом случае нашу АР-модель (3) для предыдущего момента времени $t=n-1$:

$$x(n-1) = a_1 x(n-2) + a_2 x(n-3) + \ldots + a_{i-1} x(n-i) + \ldots +$$
$$+ a_M x(n-M-1) + \eta(n-1).$$

В предположении, что $(M+1)$-й отсчет в ретроспективе нам также известен, возьмем от левой и правой части последнего выражения условное математическое ожидание и в результате будем иметь

$$x(n-1) = a_1 x(n-2) + a_2 x(n-3) + \ldots + a_{i-1} \hat{x}(n-i) + \ldots +$$
$$+ a_M x(n-M-1) + \hat{\eta}(n-1), \qquad (5)$$

где $\hat{\eta}(n-1) = \mathbf{M}[\eta(n-1) \mid x(n-1)]$ обозначает условное математическое ожидание от порождающего процесса в момент времени $(n-1)$. В общем случае определение последнего наталкивается на трудности вычислительного характера. Однако эти трудности легко могут быть преодолены в предположении о сильной коррелированности АР-процесса. В указанном случае, когда спектральная плотность мощности АР-процесса имеет существенно неравномерный характер, между отсчетами $\eta(n-1)$ и $x(n-1)$ корреляционная связь практически отсутствует и, следовательно, условное математическое ожидание порождающего процесса $\{\eta(n)\}$ в первом приближении определяется его безусловным математическим ожиданием, которое равно нулю, т. е. $\hat{\eta}(n-i)=0$. Подставляя последнее равенство в выражение (5), получаем

$$x(n-1)=a_1x(n-2)+a_2x(n-3)+\ldots+a_{i-1}\hat{x}(n-i)+\ldots+a_Mx(n-M-1)=$$

$$=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i-1}}^{M}a_kx(n-k-1)+a_{i-1}\hat{x}(n-i).$$

Полученное выражение представляет собой линейное уравнение относительно одной неизвестной величины: пораженного отсчета в ретроспективе. Решая это уравнение, будем иметь

$$\hat{x}(n-i)=\left[x(n-1)-\sum_{\substack{k=1\\k\neq i-1}}^{M}a_kx(n-k-1)\right]\Bigg/a_{i-1}. \quad (6)$$

Выражение (6) совместно с (4) и определяет в окончательном виде искомую оптимальную (приближенно) оценку линейного прогнозирования для случая действия одиночных помех.

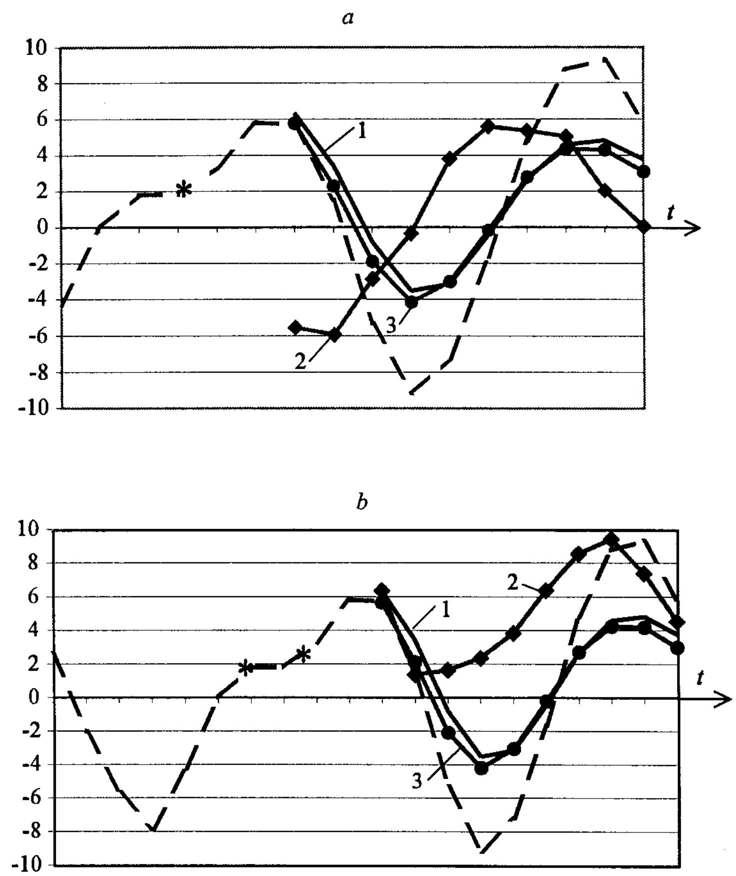
Случай многократных (потока) помех. Распространяя полученный результат (6) по индукции на случаи действия в ретроспективе двух, трех и более импульсных помех в моменты времени $t=n-i_1,\ n-i_2,\ldots,\ n-i_p$, приходим к системе линейных уравнений в матричном виде

$$A(i_1,\ldots,i_p)\tilde{x}=b(i_1,\ldots,i_p), \quad (7)$$

где матрица A размера $(p\times p)$ и вектор-столбец b размера $(p\times 1)$ зависят от моментов действия импульсных помех $n-i_1,\ n-i_2,\ldots,\ n-i_p$. Например, при $t_1=n-3,\ t_2=n-4$ $(p=2)$ и $M=5$ получаем систему двух уравнений относительно двух неизвестных:

$$\begin{cases}x(n-1)=a_1x(n-2)+a_2\hat{x}(n-3)+a_3\hat{x}(n-4)+a_4x(n-5)+a_5x(n-6),\\[2ex] x(n-2)=a_1\hat{x}(n-3)+a_2\hat{x}(n-4)+a_3x(n-5)+a_4x(n-6)+a_5x(n-7).\end{cases}$$

Экспериментальные исследования. Выводы теоретических исследований подтверждены результатами проведенного эксперимента над анализируемым процессом $X(n)$ типа авторегрессия. Его порядок M^* установлен равным 10. Для расчета оценки прогнозирования (4) использовалась АР-модель такого же порядка $M=10$. При этом для настройки коэффициентов применялся известный метод Берга. Для моделирования импульсных помех использовались отсчеты БГШ с дисперсией $\sigma_{\text{ш}}^2=200$. Моменты действия помех на рисунке, a, b показаны символами $(*)$. Результаты эксперимента проиллюстрированы рядом кривых прогнозирования на рисунке для случаев действия одной импульсной помехи в момент времени $t=n-3\,(a)$ и двух



помех в моменты $t = n - 3$, $t = n - 4(b)$. На графиках пунктирной линией отображен участок входного процесса, а кривые 1 соответствуют прогнозам на 10 шагов в будущее в отсутствие помех. Кривые 2 и 3 отвечают прогнозам входного процесса без устранения помех и с восстановлением пораженных отсчетов соответственно.

Заключение. Таким образом, благодаря предложенной процедуре восстановления «пораженных» отсчетов анализируемой выборки данных удается практически полностью устранить влияние импульсных помех на качество получаемых линейных оценок прогнозирования в случае действия как однократных, так и многократных помех. При этом наибольшая эффективность предложенного алгоритма достигается в условиях сильной коррелированности случайного временного ряда.

Еще одно ограничение на его эффективность связано с предположением об априорном знании моментов появления импульсных помех. На практике оно реализуется за счет применения эффективного обнаружителя помех. Задача в общем случае сводится к обнаружению разладки случайного процесса, например, по методу обеляющего фильтра [4]. Разумеется, точность такого обнаружения в любом случае ограничена. Однако в контексте решаемой здесь задачи указанное ограничение существенно ослабляется следующим очевидным соображением: чем выше интенсивность разладки анализируемого процесса и, следовательно, выше степень ее влияния на точность его прогнозирования, тем надежнее она регистрируется нашим обнаружителем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. **Савченко В. В.** Теоретико-информационное обоснование линейных оценок прогнозирования // Автометрия. 2001. № 5. С. 68.
3. **Савченко В. В.** Адаптивные методы нелинейного спектрального оценивания на основе принципа минимакса энтропии: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Н. Новгород: НГТУ, 1993.
4. **Савченко В. В.** Обнаружение и прогнозирование разладки случайного процесса на основе спектрального оценивания // Автометрия. 1996. № 2. С. 77.

Нижегородский государственный лингвистический университет,
E-mail: svv@lunn.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию
4 июня 2002 г.