

СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

УДК 519.24

Е. Л. Кулешов, А. В. Мищенко

(Владивосток)

**ДИСПЕРСИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК
СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА
ПРИ ЕГО СЕГМЕНТАЦИИ**

Получено точное выражение для дисперсии спектральных оценок в методе сегментации с учетом корреляции между сегментами. На примерах показано, что значение дисперсии, вычисленное по точной формуле, может существенно превышать значение, вычисленное по известной приближенной формуле.

Введение. Для вычисления непараметрических спектральных оценок стационарного случайного процесса используется или метод сглаживающих окон, или метод сегментации [1, 2]. Непараметрические спектральные оценки во многих случаях имеют недостаточную разрешающую способность, что особенно проявляется при анализе процессов с линейчатым спектром. Поэтому в последние годы интенсивно развивались новые методы спектрального анализа, обладающие более высокой разрешающей способностью, основанные на представлении исследуемых процессов математическими моделями, заданными с точностью до параметров. Здесь спектральная оценка получается из выражения для спектральной плотности математической модели путем замены параметров модели на их оценки. Несмотря на успехи в этом направлении, в [1] отмечается, что для большого объема данных и при отсутствии информации, необходимой для построения обоснованной модели исследуемого процесса, непараметрические спектральные оценки более устойчивы, чем параметрические, а также имеют большую точность. Один из первых методов получения непараметрической спектральной оценки был предложен Барлеттом [1, 2]. Этот метод основан на разбиении исходной реализации длительности TN на N непересекающихся сегментов одинаковой длительности T . Для каждого сегмента вычисляется периодограмма, и спектральная оценка находится как среднее этих периодограмм. В методе Уэлча [1] выделяются перекрывающиеся сегменты обычно с перекрытием на $T/2$, что увеличивает их число до $2N - 1$ и обеспечивает снижение дисперсии спектральной оценки без увеличения ее смещения. В [1] отмечается, что метод Уэлча наиболее предпочтителен среди непараметрических методов. Это объясняется тем, что с увеличением степени перекрытия сегментов (с

ростом их числа) дисперсия спектральной оценки достигает минимального значения. Таким образом, для заданного T вычислительная схема Уэлча гарантирует оптимизацию дисперсии спектральной оценки при фиксированном смещении, которое определяется величиной T .

Однако использование метода Уэлча осложняется рядом проблем, одна из которых – это низкая точность формулы для вычисления ошибки спектральной оценки. Во-первых, выражение для дисперсии спектральной оценки получено в предположении независимости сегментов [1]. Это условие нарушается для близко расположенных или пересекающихся сегментов. Очевидно, два сегмента не коррелируют, если они разнесены на больший интервал, чем интервал корреляции τ_0 . Поэтому если строятся сегменты с перекрытием на $T/2$ ($T = \tau_0$), то для любого внутреннего сегмента имеются шесть коррелированных с ним сегментов: два смежных (соседних), два перекрывающих данный сегмент на $T/2$ и два удаленных от данного сегмента на $T/2$. Во-вторых, спектральная оценка полагается несмещенной [1]. Это условие также нарушается при выборе малого T (последнее необходимо для получения большого числа сегментов и соответственно малой дисперсии). В данной работе получено точное выражение для дисперсии спектральных оценок с учетом корреляции между сегментами. На примерах показано, что значение дисперсии, вычисленное по точной формуле, может существенно превышать значение, найденное по известной приближенной формуле.

Ковариация конечного преобразования Фурье перекрывающихся сегментов. Пусть $x(t)$ – стационарный в широком смысле случайный процесс с математическим ожиданием $\mathbf{M}x(t) = 0$ (\mathbf{M} – оператор математического ожидания), корреляционной функцией $B(\tau)$ и спектральной плотностью $F(\omega)$. Случайная функция

$$X_k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t_k}^{t_k+T} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

называется конечным преобразованием Фурье случайного процесса $x(t)$ по интервалу $[t_k, t_k + T]$. Для вычисления дисперсии спектральной оценки, основанной на сегментации, необходимо найти ковариацию

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{M}X_k(\omega_1) X_l^*(\omega_2) \quad (2)$$

конечных преобразований Фурье $X_k(\omega_1)$, $X_l(\omega_2)$ по интервалам $[t_k, t_k + T]$, $[t_l, t_l + T]$, где «*» – операция комплексного сопряжения. Подставим (1) в (2), тогда

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_k+T} dt_1 \int_{t_l}^{t_l+T} dt_2 B(t_1 - t_2) e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)}. \quad (3)$$

От переменных интегрирования t_1, t_2 перейдем к новым переменным t_2, τ , причем $\tau = t_1 - t_2$. Последнее равенство определяет в координатах t_2, τ параметрическое семейство прямых с параметром t_1 . Нижняя и верхняя границы этого семейства определяются уравнениями: $\tau = t_k - t_2$ и $\tau = t_k + T - t_2$. Поэтому замена переменных в (3) преобразует область интегрирования в параллелограмм, стороны которого в системе координат t_2, τ определяются пря-

мыми: $t_2 = t_1$, $t_2 = t_1 + T$, $\tau = t_k - t_2$, $\tau = t_k + T - t_2$. Пусть для определенности $t_1 \leq t_k$. Область интегрирования в новых переменных (параллелограмм) разобьем на два треугольника: верхний ($\tau > t_k - t_1$) и нижний. Затем представим выражение (3) в виде суммы двух слагаемых – интегралов по верхнему и нижнему треугольникам, тогда

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{T} \int_{t_k - t_1}^{t_k - t_1 + T} d\tau B(\tau) \int_{t_1}^{t_k + T - \tau} dt_2 e^{-i(\omega_1 \tau + \omega_2^- t_2)} + \frac{1}{T} \int_{t_k - t_1 - T}^{t_k - t_1} d\tau B(\tau) \int_{t_k - \tau}^{t_1 + T} dt_2 e^{-i(\omega_1 \tau + \omega_2^- t_2)}, \quad (4)$$

где $\omega_2^- = \omega_1 - \omega_2$. Интегрирование по переменной t_2 приводит к выражению

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{i\omega_2^- T} \left\{ \int_{t_k - t_1}^{t_k - t_1 + T} d\tau B(\tau) e^{-i\omega_1 \tau} [e^{-i\omega_2^- (t_k + T - \tau)} - e^{-i\omega_2^- t_1}] + \int_{t_k - t_1 - T}^{t_k - t_1} d\tau B(\tau) e^{-i\omega_1 \tau} [e^{-i\omega_2^- (t_1 + T)} - e^{-i\omega_2^- (t_k - \tau)}] \right\}. \quad (5)$$

Пусть корреляционная функция $B(\tau) = 0$ при $|\tau| \geq T$. Если это условие нарушается, то процедура сегментации может привести к ошибкам, обусловленным отсечением «хвостов» корреляционной функции. Введем обозначения:

$$F_j = F(\omega_j) = \int_{-T}^T B(\tau) \cos \omega_j \tau d\tau, \quad (6)$$

$$G_j = G(\omega_j) = \int_{-T}^T B(\tau) \sin \omega_j |\tau| d\tau$$

и F' , G' – производные функций F и G . Отметим, что из (6) следует $F'(0) = 0$, $G(0) = 0$. В работе [3] получены ковариации $A_{kl}(\omega_1, \omega_2)$ при $t_k = t_1$ и при $t_k - t_1 = T$:

$$A_{kk}(\omega_1, \omega_2) = e^{-i\omega_2^- (t_k + T/2)} \left[(F_1 + F_2) \frac{\sin \omega_2^- (T/2)}{\omega_2^- T} + (G_2 - G_1) \frac{\cos \omega_2^- (T/2)}{\omega_2^- T} \right], \quad t_k = t_1, \quad (7)$$

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = \frac{e^{-i\omega_2^- (t_1 + T)}}{2i\omega_2^- T} [(F_2 - F_1) + i(G_1 - G_2)], \quad t_k - t_1 = T. \quad (8)$$

Выражение (7) необходимо при вычислении дисперсии периодограммы, а (8) – при вычислении дисперсии спектральной оценки Бартлетта. Получим выражение для ковариации $A_{kl}(\omega_1, \omega_2)$ при $t_k - t_l = T/2$, необходимое для вычисления дисперсии спектральной оценки Уэлча с перекрытием сегментов на $T/2$. Из (5) при $t_k - t_l = T/2$ следует

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{e^{-i\omega^- t_k}}{i\omega^- T} \left\{ \int_{T/2}^{3T/2} d\tau B(\tau) e^{-i\omega\tau} [e^{-i\omega^-(T-\tau)} - e^{i\omega^-(T/2)}] + \int_{-T/2}^{T/2} d\tau B(\tau) e^{-i\omega\tau} [e^{-i\omega^-(T/2)} - e^{i\omega^-\tau}] \right\}. \quad (9)$$

Поскольку $B(\tau) = 0$ при $|\tau| > T$, то интеграл по отрезку $[T, 3T/2]$ равен нулю, поэтому

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{e^{-i\omega^- t_k}}{i\omega^- T} \left\{ e^{-i\omega^- T} \int_{T/2}^T d\tau B(\tau) e^{-i\omega_2\tau} - e^{i\omega^-(T/2)} \int_{T/2}^T d\tau B(\tau) e^{-i\omega_2\tau} + e^{-i\omega^-(T/2)} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau B(\tau) e^{-i\omega_1\tau} - \int_{-T/2}^{T/2} d\tau B(\tau) e^{-i\omega_2\tau} \right\}. \quad (10)$$

Введем функции

$$P_i = P(\omega_i) = \int_{T/2}^T B(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau + \int_{-T}^{-T/2} B(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau, \quad (11)$$

$$Q_i = Q(\omega_i) = \int_{T/2}^T B(\tau) \sin \omega_i |\tau| d\tau + \int_{-T}^{-T/2} B(\tau) \sin \omega_i |\tau| d\tau. \quad (12)$$

Тогда соотношение (10) представляется в виде

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{e^{-i\omega^- t_k}}{i\omega^- T} \left[e^{-i\omega^- T} \left(\frac{P_2}{2} - i \frac{Q_2}{2} \right) - e^{i\omega^-(T/2)} \left(\frac{P_1}{2} - i \frac{Q_1}{2} \right) + e^{-i\omega^-(T/2)} (F_1 - P_1) - (F_2 - P_2) \right]. \quad (13)$$

Выражение (13) довольно сложно использовать в дальнейших вычислениях дисперсии спектральной оценки. Получим более простое выражение при дополнительном условии: $B(\tau) = 0$, если $|\tau| > T/2$. Тогда в (11) $P(\omega) = 0$, в (12) $Q(\omega) = 0$, а из (13) следует

$$A_{kl}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{e^{-i\omega^- t_k}}{i\omega^- T} [e^{-i\omega^-(T/2)} F_1 - F_2] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e^{-i\omega^-(t_k + T/4)}}{i\omega^- T} [e^{-i\omega^-(T/4)} F_1 - e^{i\omega^-(T/4)} F_2] = \\
&= e^{-i\omega^-(t_k + T/4)} \left[(F_1 + F_2) \frac{\sin \omega^-(T/4)}{\omega^- T} + i(F_1 - F_2) \frac{\cos \omega^-(T/4)}{\omega^- T} \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

Это выражение является точным, если выполняется дополнительное условие. Следующий пример дает представление о точности выражения (14) в общем случае. Пусть $B(\tau) = B(0)(1 - |\tau|/T)$, тогда при $\omega_1 = \omega_2$ в (13) малые слагаемые составляют приблизительно 0,1 и 0,2 от главных слагаемых соответственно в реальной и мнимой частях.

Ковариация периодограмм. Пусть x_i ($i=1,2,3,4$) – случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями $\mathbf{M}x_i = 0$. Известно соотношение [2]:

$$\begin{aligned}
\text{cov}(x_1 x_2, x_3 x_4) &= \text{cov}(x_1, x_3) \cdot \text{cov}(x_2, x_4) + \\
&+ \text{cov}(x_1, x_4) \cdot \text{cov}(x_2, x_3) + K, \quad (15)
\end{aligned}$$

где $\text{cov}(x_i, x_j) = \mathbf{M}(x_i - \mathbf{M}x_i)(x_j^* - \mathbf{M}x_j^*) = \mathbf{M}x_i x_j^*$ – ковариация случайных величин x_i и x_j ; K – кумулянт четвертого порядка, причем $K = 0$ для гауссовых величин x_i . Будем полагать $X_k(\omega)$ гауссовыми случайными величинами и $K = 0$. Это справедливо для гауссова процесса $x(t)$, а для негауссова процесса $x(t)$ известно [4], что с увеличением T распределение вероятностей величины $X_k(\omega)$ сходится к нормальному. Из (1) при $\mathbf{M}x(t) = 0$ следует $\mathbf{M}X_k(t) = 0$, поэтому с учетом равенства $X_k^*(\omega) = X_k(-\omega)$ из (15) получаем

$$\begin{aligned}
\text{cov}(|X_k(\omega)|^2, |X_l(\lambda)|^2) &= \mathbf{M}X_k(\omega) X_l(-\lambda) \mathbf{M}X_k(-\omega) X_l(\lambda) + \\
&+ \mathbf{M}X_k(\omega) X_l(\lambda) \mathbf{M}X_k(-\omega) X_l(-\lambda) = \\
&= |\mathbf{M}X_k(\omega) X_l(-\lambda)|^2 + |\mathbf{M}X_k(\omega) X_l(\lambda)|^2. \quad (16)
\end{aligned}$$

Пусть $t_k - t_l = 0$, тогда из соотношений (7), (16) следует

$$\begin{aligned}
&\text{cov}(|X_k(\omega)|^2, |X_k(\lambda)|^2) = \\
&= \left[\frac{\sin(\omega - \lambda)(T/2)}{(\omega - \lambda)T} (F(\omega) + F(\lambda)) + \frac{\cos(\omega - \lambda)(T/2)}{(\omega - \lambda)T} (G(\lambda) - G(\omega)) \right]^2 + \\
&+ \left[\frac{\sin(\omega + \lambda)(T/2)}{(\omega + \lambda)T} (F(\omega) + F(\lambda)) - \frac{\cos(\omega + \lambda)(T/2)}{(\omega + \lambda)T} (G(\lambda) + G(\omega)) \right]^2. \quad (17)
\end{aligned}$$

Отсюда при $\lambda = \omega$ следует выражение для дисперсии:

$$\text{var} |X_k(\omega)|^2 = \begin{cases} \left[F(\omega) - \frac{G'(\omega)}{T} \right]^2 + \left[F(\omega) \frac{\sin \omega T}{\omega T} - G(\omega) \frac{\cos \omega T}{\omega T} \right]^2, & \omega \neq 0; \\ 2 \left[F(0) - \frac{G'(0)}{T} \right]^2, & \omega = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Если $t_k - t_l = T$, тогда из (8), (16) будем иметь

$$\begin{aligned} \text{cov} [|X_k(\omega)|^2, |X_l(\lambda)|^2] &= \left[\frac{F(\lambda) - F(\omega)}{2(\omega - \lambda)T} \right]^2 + \left[\frac{G(\omega) - G(\lambda)}{2(\omega - \lambda)T} \right]^2 + \\ &+ \left[\frac{F(\lambda) - F(\omega)}{2(\omega + \lambda)T} \right]^2 + \left[\frac{G(\omega) + G(\lambda)}{2(\omega + \lambda)T} \right]^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда при $\lambda = \omega$ получаем

$$\text{cov} [|X_k(\omega)|^2, |X_l(\omega)|^2] = \begin{cases} \left(\frac{F'(\omega)}{2T} \right)^2 + \left(\frac{G'(\omega)}{2T} \right)^2 + \left(\frac{G(\omega)}{2\omega T} \right)^2, & \omega \neq 0; \\ 2 \left[\left(\frac{F'(0)}{2T} \right)^2 + \left(\frac{G'(0)}{2T} \right)^2 \right], & \omega = 0. \end{cases} \quad (20)$$

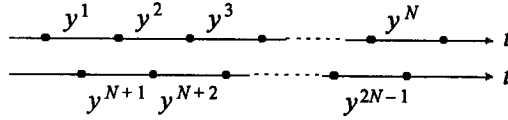
Аналогично при $t_k - t_l = T/2$ из формул (14), (16) следует

$$\begin{aligned} \text{cov} [|X_k(\omega)|^2, |X_l(\lambda)|^2] &= \\ &= \left([F(\omega) + F(\lambda)] \frac{\sin(\omega - \lambda)(T/4)}{(\omega - \lambda)T} \right)^2 + \left([F(\omega) - F(\lambda)] \frac{\cos(\omega - \lambda)(T/4)}{(\omega - \lambda)T} \right)^2 + \\ &+ \left([F(\omega) + F(\lambda)] \frac{\sin(\omega + \lambda)(T/4)}{(\omega + \lambda)T} \right)^2 + \left([F(\omega) - F(\lambda)] \frac{\cos(\omega + \lambda)(T/4)}{(\omega + \lambda)T} \right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда при $\lambda = \omega$ получаем выражение

$$\text{cov} [|X_k(\omega)|^2, |X_l(\omega)|^2] = \begin{cases} \left(\frac{F(\omega)}{2} \right)^2 + \left(\frac{F'(\omega)}{T} \right)^2 + \left(F(\omega) \frac{\sin \omega(T/2)}{\omega T} \right)^2, & \omega \neq 0; \\ 2 \left[\left(\frac{F(0)}{2} \right)^2 + \left(\frac{F'(0)}{T} \right)^2 \right], & \omega = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Дискретные представления для ковариации периодограмм. Пусть $\omega_j = j\pi/T$, $F_j = F(\omega_j)$, $G_j = G(\omega_j)$. Для ковариаций (18), (20) и (22) введем



Расположение сегментов на временной оси

обозначения: $K_j^{t_k - t_l}$ (нижний индекс определяет частоту ω_j , а верхний – разность $t_k - t_l$),

$$K_j^0 = \text{var} |X_k(\omega_j)|^2 = \begin{cases} \left(F_j - \frac{G'_j}{T} \right)^2 + \left(\frac{G_j}{j\pi} \right)^2, & j \neq 0; \\ 2 \left(F_0 - \frac{G'_0}{T} \right)^2, & j = 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$K_j^T = \text{cov} [|X_k(\omega_j)|^2, |X_l(\omega_j)|^2] = \begin{cases} \left[\left(\frac{F'_j}{2T} \right)^2 + \left(\frac{G'_j}{2T} \right)^2 + \left(\frac{G_j}{2j\pi} \right)^2 \right], & j \neq 0; \\ 2 \left[\left(\frac{F'_0}{2T} \right)^2 + \left(\frac{G'_0}{2T} \right)^2 \right], & j = 0, \end{cases} \quad (24)$$

$$K_j^{T/2} = \text{cov} [|X_k(\omega_j)|^2, |X_l(\omega_j)|^2] = \begin{cases} \left[\left(\frac{F_j}{2} \right)^2 + \left(\frac{F'_j}{T} \right)^2 + \left(F_j \frac{\sin j(\pi/2)}{j\pi} \right)^2 \right], & j \neq 0; \\ 2 \left[\left(\frac{F_0}{2} \right)^2 + \left(\frac{F'_0}{T} \right)^2 \right], & j = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Сегментация реализации и дисперсия спектральной оценки. Пусть реализация случайного процесса $x(t)$, $t = 1, 2, \dots, NT$, разбита на N сегментов (без перекрытия) длительностью T каждый. Кроме этого выделим $N - 1$ сегментов, перекрывающих указанные сегменты на интервал $T/2$. Следовательно, всего имеется $2N - 1$ сегментов вида $y^n(t) = x(t + (n-1)T)$, $t \in [1, T]$, $n = 1, \dots, N$, и $y^{N+n}(t) = x(t + (n - (1/2))T)$, $t \in [1, T]$, $n = 1, \dots, N - 1$ (см. рисунок). Пусть Y_j^n – преобразование Фурье на частоте $\omega_j = j\pi/T$ сегмента y^n и $|Y_j^n|^2$ – периодограмма этого сегмента, тогда спектральная оценка

$$f^j = \frac{1}{2N - 1} \sum_{n=1}^{2N-1} |Y_j^n|^2 \quad (26)$$

вычисляется как среднее $2N - 1$ периодограмм. Отсюда ее дисперсия

$$\text{var} f^j = \frac{1}{(2N - 1)^2} \sum_{n=1}^{2N-1} \sum_{m=1}^{2N-1} \text{cov}(|Y_j^n|^2, |Y_j^m|^2). \quad (27)$$

Выделим в (27) сумму по совпадающим индексам $n = m$, тогда в соответствии с (23)

$$\text{var} f^j = \frac{K_j^0}{2N - 1} + \frac{1}{(2N - 1)^2} \sum_{n \neq m} \sum \text{cov}(|Y_j^n|^2, |Y_j^m|^2). \quad (28)$$

Выражение (25) для ковариации периодограмм по двум сегментам, сдвинутым относительно друг друга на интервал $t_k - t_l = T/2$, получено при условии: $B(\tau) = 0$, если $|\tau| \geq T/2$. Это условие используем в последующих вычислениях дисперсии (28). Тогда $\text{cov}(|Y_j^n|^2, |Y_j^m|^2) = 0$ для любых двух сегментов с начальными точками t_k, t_l , такими, что $|t_k - t_l| \geq 3T/2$ (сегменты удалены друг от друга на расстояние не меньше чем $T/2$).

В двойной сумме (28) слагаемое при $n = 1$ представляет собой сумму по индексу m от $m = 2$ до $m = 2N - 1$, в которой отличны от нуля только два слагаемых при $m = 2$ и $m = N + 1$, поскольку сегменты y^m , за исключением y^2, y^{N+1} , удалены от y^1 на интервал, не меньший чем $T/2$ (см. рисунок). Поэтому с учетом (24), (25) эта сумма имеет вид

$$\sum_{m=2}^{2N-1} \text{cov}(|Y_j^1|^2, |Y_j^m|^2) = K_j^T + K_j^{T/2}. \quad (29)$$

Этим же выражением определяется слагаемое в (28) при $n = N$, поскольку сегмент y^N коррелирует только с сегментами y^{N-1} и y^{2N-1} (см. рисунок). Таким образом, выражением (29) определяются два слагаемых в (28). Аналогично слагаемое в (28) при $n = 2$ имеет вид

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq 2}}^{2N-1} \text{cov}(|Y_j^2|^2, |Y_j^m|^2) = 2(K_j^T + K_j^{T/2}), \quad (30)$$

поскольку сегмент y^2 коррелирует только с сегментами $y^1, y^3, y^{N+1}, y^{N+2}$ (см. рисунок). Выражением (30) определяются слагаемые в (28) для индекса n от 2 до $N - 1$ ($N - 2$ слагаемых), а также для n от $N + 2$ до $2N - 2$ ($N - 3$ слагаемых): всего $2N - 5$ слагаемых. Наконец, последний тип слагаемых в (28) при $n = N + 1$ имеет вид

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N+1}}^{2N-1} \text{cov}(|Y_j^{N+1}|^2, |Y_j^m|^2) = K_j^T + 2K_j^{T/2}, \quad (31)$$

поскольку сегмент y^{N+1} коррелирует только с ближайшими y^{N+2}, y^1, y^2 . Выражением (31) определяется еще одно слагаемое в (28) при $n = 2N - 1$.

Подставим полученные результаты (29)–(31) в формулу (28), тогда

$$\text{var} f^j = \frac{K_j^0 + 2K_j^T + 2K_j^{T/2}}{2N - 1} - \frac{4K_j^T + 2K_j^{T/2}}{(2N - 1)^2}. \quad (32)$$

Для спектральной оценки Бартлетта $f_b^j = (1/N) \sum_{n=1}^N |Y_j^n|^2$ аналогичный вывод ее дисперсии $\upsilon_b^j = \text{var} f_b^j$ приводит к выражению

$$\upsilon_b^j = \text{var} f_b^j = \frac{K_j^0 + 2K_j^T}{N} - \frac{2K_j^T}{N^2}. \quad (33)$$

Если в (32) пренебречь корреляциями между периодограммами по смежным и перекрывающимся на $T/2$ сегментам, т. е. положить $K_j^T = 0$, $K_j^{T/2} = 0$, то получим приближенное значение для $\text{var} f^j$, которое обозначим $\upsilon_0^j = K_j^0 / (2N - 1)$. Отсюда заменой величины K_j^0 на ее приближенное значение F_j^2 получаем $\upsilon_1^j = F_j^2 / (2N - 1)$ – формулу для расчета дисперсии спектральной оценки f^j , известную в [1]. На практике вычисляется оценка величины υ_1^j подстановкой спектральной оценки f^j вместо спектральной плотности F_j . При этом неявно учитывается функция $-G_j' / T$, поскольку оценка f^j имеет смещение $-G_j' / T$, и таким образом фактически вычисляется оценка величины υ_0^j . Поэтому дальнейший интерес представляет отношение

$$\gamma = \frac{\text{var} f^j}{\upsilon_0^j} = 1 + 2 \frac{K_j^T + K_j^{T/2}}{K_j^0} - 2 \frac{2K_j^T + K_j^{T/2}}{(2N - 1)K_j^0} \quad (34)$$

дисперсии спектральной оценки f^j , вычисленной по точной формуле (32), к величине υ_0^j – результату вычисления дисперсии без учета корреляций K_j^T , $K_j^{T/2}$, но с учетом смещения спектральной оценки. Из (34) получим приближенное, но более простое выражение, полагая, что $N \geq 10$ и частота ω_j достаточно удалена от нулевой частоты. При этом последнее слагаемое в (34) является малым, им можно пренебречь, а также в соотношениях (23)–(25) малымя являются слагаемые, пропорциональные $1/j^2$. В этом приближении из (34) следует

$$\gamma = 1 + \frac{F_j^2 + 5(F_j'/T)^2 + (G_j'/T)^2}{2(F_j - G_j'/T)^2}. \quad (35)$$

Дисперсия спектральной оценки белого шума. Пусть спектральная плотность $F(\omega) = N_0$ – постоянная величина для любого ω . Тогда корреляционная функция $B(\tau) = N_0 \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ – дельта-функция, и в соответствии с

(6) $G(\omega) = 0$. Поэтому $F' = 0$, $G' = 0$ и согласно (35) $\gamma = 1,5$ – значение дисперсии, вычисленной по формуле (32), в 1,5 раза больше значения v_0^j , найденного по формуле, представленной в литературе.

Моделирование дисперсии спектральной оценки белого шума. В машинном эксперименте каждая реализация исследуемого процесса вычислялась как последовательность на выходе датчика случайных чисел с равномерным распределением вероятностей на интервале $[-5, 5]$. С увеличением длины реализации наблюдалась сходимость спектральных оценок Бартлетта и Уэлча к числу $8,333\dots$ – теоретическому значению спектральной плотности. Так, для последовательности из $5 \cdot 10^5$ чисел значения спектральных оценок находились в интервале $8,33 \pm 0,01$. Вычисление дисперсии по формуле (32) с подстановкой (23)–(25) при $N = 10$, $F = 8,333$, $G = 0$, $F' = 0$, $G' = 0$ и равенстве нулю слагаемых, пропорциональных $1/j^2$, приводит к результату: $\text{var} f^j = 5,38$. При этих же условиях дисперсия спектральной оценки Бартлетта $v_b^j = F_j^2 / N = 6,94$, следовательно, $v_0^j = v_b^j N / (2N - 1) = 3,65$. Отсюда $\gamma = 1,47$. Формулы (23)–(25) справедливы для гауссовых величин X_k . Поэтому равномерное распределение вероятностей датчика случайных чисел приводит к необходимости выбора достаточно большой длительности сегмента, например $T = 200$. Это обеспечивает близкое к нормальному распределение вероятностей величин X_k , а также снижает в формулах (23)–(25) влияние тех ошибок датчика, которые приводят к отличию его спектральной плотности от постоянной и, следовательно, к отличным от нуля функциям G , F' , G' .

Моделирование дисперсии выполнялось следующим образом. На первом шаге вычислялась первая реализация, состоящая из 2000 отсчетов. По этой реализации при фиксированном j вычислялась спектральная оценка Уэлча f^j для $T = 200$, $N = 10$. Затем находилась величина $d_1 = (f^j - 8,333)^2$. На втором шаге вычислялась вторая реализация из 2000 отсчетов, затем величина d_2 , и оценка дисперсии спектральной оценки f^j находилась как среднее D_2 двух величин d_1 и d_2 и т. д. С увеличением числа реализаций n наблюдалась сходимость среднего $D_n = (d_1 + \dots + d_n) / n$ к значению $\text{var} f^j = 5,38$ – дисперсии, вычисленной по формулам (23)–(25), (32) для белого шума. Например, при $n = 5 \cdot 10^4$ и $j = 6, 49, 177$ значение D_n составило соответственно 5,35, 5,38, 5,34. На каждом шаге аналогично вычислялась оценка дисперсии спектральной оценки Бартлетта, которая при $n = 5 \cdot 10^4$ и $j = 6, 49, 177$ была равна соответственно 6,90, 6,90, 6,86. При этом оценки величины v_0^j равны 3,63, 3,63, 3,61 и оценки параметра γ равны 1,47, 1,48, 1,48. Отметим, что с уменьшением длины сегмента T оценка дисперсии спектральной оценки уменьшается. Так, при фиксированном ω_j для $T = 200, 50, 10$ (соответственно $j = 160, 40, 8$), $N = 10$ и $n = 5 \cdot 10^4$ оценки дисперсии спектральных оценок Уэлча и Бартлетта равны 5,35, 5,25, 4,52 и 6,90, 6,80, 6,12 соответственно. При этом значение параметра γ остается практически постоянным: 1,47, 1,47, 1,41.

Дисперсия спектральной оценки квазигармонического процесса. Если спектральная плотность $F(\omega)$ – функция, отличная от постоянной, тогда являются ненулевыми функции F' , G , G' , K_j^T . При этом γ может существенно превышать значение этого параметра для белого шума. Рассмотрим при-

мер вычисления γ для квазигармонического процесса с корреляционной функцией

$$B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \quad (36)$$

где σ^2 , α , ω_0 – числовые параметры. Выражение (36) позволяет вычислить аналитически функции F , F' , G , G' и затем γ по формуле (35). Пусть параметр α удовлетворяет условию: $e^{-\alpha T} < 0,1$ (или $\alpha T > \ln 10 = 2,3$), тогда значения $B(\tau)$ при $\tau > T$ являются малыми по сравнению с $B(0)$ в смысле выполнения неравенства $|B(\tau)| < 0,1B(0)$. При этом область интегрирования $[-T, T]$ в (6) можно заменить на $(-\infty, \infty)$ и, следовательно,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{\alpha \sigma^2}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha \sigma^2}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2}, \quad (37)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \sin \omega |\tau| d\tau = \frac{(\omega - \omega_0) \sigma^2}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{(\omega + \omega_0) \sigma^2}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2}. \quad (38)$$

Согласно формулам (37), (38) $F(\omega)$ – четная функция, а $G(\omega)$ – нечетная, что соответствует их общим свойствам. Спектральная плотность (37) представлена двумя слагаемыми: $F(\omega) = F_+(\omega) + F_-(\omega)$. Введем дополнительное условие на параметр ω_0 , состоящее в том, что функции $F_+(\omega)$, $F_-(\omega)$ практически не перекрываются, т. е. $F_+(\omega) \approx 0$ при $\omega < 0$ и $F_-(\omega) \approx 0$ при $\omega \geq 0$. Например, таким условием может быть неравенство $F_+(0) < 0,1F_+(\omega_0)$ или $\omega_0 > 3\alpha$. Тогда в (37), (38) вместо двух слагаемых можно рассматривать только одно: $F(\omega) = F_+(\omega)$ для $\omega \geq 0$, аналогично $G(\omega) = G_+(\omega)$ для $\omega \geq 0$, а значения $F(\omega)$, $G(\omega)$ при $\omega < 0$ определяются условиями четности $F(\omega)$ и нечетности $G(\omega)$ соответственно. Введем безразмерную функцию $\varphi(\omega) = \alpha^2 / (\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2)$, тогда $F = \sigma^2 \varphi / \alpha$, $(\omega - \omega_0)^2 = \alpha^2 (1 - \varphi) / \varphi$, $(\varphi')^2 = 4\varphi^3 (1 - \varphi) / \alpha^2$, $(F')^2 = 4F^2 \varphi (1 - \varphi) / \alpha^2$, $G' = F(2\varphi - 1) / \alpha$. Подставив полученные результаты в (35), имеем

$$\gamma = 1 + 0,5 \frac{(\alpha T)^2 + 20\varphi(1 - \varphi) + (2\varphi - 1)}{(\alpha T)^2 - 2\alpha T(2\varphi - 1) + (2\varphi - 1)^2}. \quad (39)$$

Поскольку $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \varphi = 1$, то $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \gamma = 1,5$, что совпадает со значением γ для белого

шума. Рассмотрим (39) при $\omega = \omega_0$. Так как $\varphi(\omega_0) = 1$, то $\gamma = 1 + 0,5 \frac{(\alpha T)^2 + 1}{(\alpha T - 1)^2}$.

Откуда при $\alpha T = 2, 3, 4, 5$ получаем соответственно $\gamma = 3, 5, 2, 25, 1, 9, 1, 75$. Если $\omega = \omega_0 \pm \alpha$, тогда $\varphi(\omega_0 \pm \alpha) = 0,5$ и $\gamma = 1,5 + 2,5 / (\alpha T)^2$. При $\alpha T = 2, 3, 4, 5$ получаем $\gamma = 2, 13, 1, 78, 1, 66, 1, 60$. Таким образом, отношение γ в данном примере при $\alpha T = 2$ достигает 3,5 в точке $\omega = \omega_0$. Хотя случай $\alpha T < 2$ выходит за область применимости соотношения (39), имеются основания полагать, что дальнейшее уменьшение αT приведет к увеличению γ , поскольку при этом

увеличивается число соседних сегментов, коррелирующих с заданным сегментом.

Заключение. Основным результатом работы состоит в получении формулы (32) для вычисления дисперсии спектральной оценки Уэлча с учетом корреляций между сегментами. На примерах показано, что значение дисперсии, вычисленное по точной формуле, может существенно превышать значение дисперсии, вычисленное по известной приближенной формуле. Возможен также простейший вариант учета корреляций между сегментами: значение дисперсии без учета корреляций умножается на 1,5. Однако такая поправка дает точный результат только для дисперсии спектральной оценки белого шума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. Вып. 2.
3. Кулешов Е. Л. Непараметрические спектральные оценки с высоким разрешением // Автометрия. 1984. № 2. С. 17.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1975. Кн. 2.

*Дальневосточный государственный университет,
Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,
E-mail: kuleshov@lemoi.phys.dvgu.ru*

*Поступила в редакцию
18 января 2002 г.*