РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
2002, том 38, № 6

УДК 535.3

П. Е. Твердохлеб, А. А. Малышев
(Новосибирск)

ГРАНИЦЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ БЛОХОВСКИХ МОД В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ*

Исследован характер затухания нормальных блоховских мод в периодических слоистых средах в зависимости от значения угла падения световой волны и от степени расстройки этого угла, что эквивалентно нарушению условия резонансной связи. Путем компьютерного моделирования установлен закон уменьшения/увеличения диапазона допустимых расстроек при изменении угла падения световой волны от 0 до 90°.

Согласно [1] нормальная блоховская мода, возникающая в периодической слоистой среде, имеет вид функции

$$E(z,x,t)=E_K(x)\exp(-iKx)\exp(-ik_{0z}z)\exp(i\omega t). \qquad (1)$$

Здесь $E_K(x)$ – амплитуда моды; K – блоховское волновое число; k_{0z} и ω – продольная волновая компонента и круговая частота падающего света. Для ясности схема слоистой среды, включающей N периодически повторяющихся звеньев, показана на рис. 1. Каждое звено состоит из двух диэлектрических пленок (слоев) толщиной h_2, h_1 с показателями преломления n_2, n_1 соответственно. При этом $n_2 > n_1$. Падающая на среду плоская ТЕ-волна имеет угол наклона θ_i, а возникающие при этом преломленные и отраженные волны распространяются в пленках под углами θ_{2i} и θ_{1i}. В этом случае для компоненты k_{0z} выполняется условие $k_{0z}=k_{2z}=k_{1z}$, где $k_{1z}=kn_1\sin\theta_1$, $k_{2z}=kn_2\sin\theta_2$ – продольные компоненты волн в слоях с показателями преломления n_2 и n_1; $k=2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны света.

Можно видеть, что амплитуда $E_K(x)$ блоховской моды зависит от переменной x и от числа K, которое может быть вещественным или комплексным. Именно волновое число K определяет характер распространения волны в слоистой среде. При вещественных значениях K блоховская мода (1) распространяется без затухания, а при комплексных K – с затуханием амплитуды по экспоненциальному закону. В последнем случае периодическая слоистая среда ведет себя как отражающая зеркальная поверхность, что используется на практике.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-15-99089).

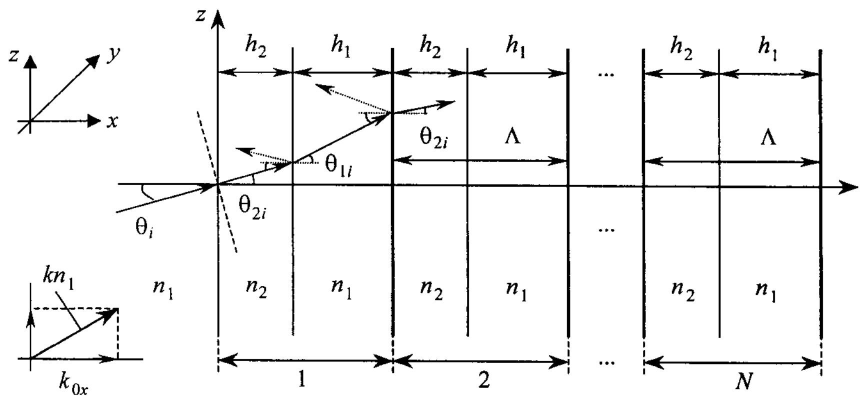

Рис. 1. Характер преломления и отражения световой волны в пленках 2 и 1 слоистой среды

Однако такие поверхности имеют высокую отражательную способность только при заранее фиксированных углах падения света $\theta = \theta_i$, которые могут принимать значения в диапазоне 0–90°. Так, многослойные зеркала лазеров с вертикальным резонатором [2] работают при нормальном падении светового пучка ($\theta_i = 0°$), а многослойные отражающие поверхности направляемых волноводов [1] – при углах падения θ_i, достигающих значений 80° и более. Толщины слоев h_2 и h_1 зависят от углов θ_i и выбираются из условия обеспечения резонансной связи прошедших и отраженных волн, причем так, чтобы выполнялось условие $h_2 n_2 = h_1 n_1 = \lambda/4$. В этом случае нормальная блоховская мода имеет затухающий характер, а сама многослойная среда обладает отражательной способностью, близкой к 1.

Нарушение условия резонансной связи путем расстройки угла падения θ_i на величину $\pm\Delta\theta$ приводит к тому, что отражательная способность среды уменьшается, а при некоторых предельных значениях $\pm\Delta\theta'$ теряется полностью. Это означает, что при углах падения $\theta_i \pm \Delta\theta$, где $|\Delta\theta| < |\Delta\theta'|$, степень затухания блоховской моды меняется, а при углах $\theta_i \pm \Delta\theta'$ такая мода из затухающей волны превращается в незатухающую. Таким образом, если исходить из того, что показатели преломления слоев n_2, n_1 и рабочая длина волны падающего света λ являются известными, то угол падения θ_i и величина его расстройки $\pm\Delta\theta$ становятся теми основными параметрами, которые будут определять свойства блоховской нормальной моды.

Изучение таких свойств проведено в данной работе. Нас будут интересовать характер затухания нормальной блоховской моды в зависимости от значения угла падения света θ_i, предельные значения углов расстройки $\theta_i \pm \Delta\theta_i'$, при которых такая мода существует, а также закон изменения предельных значений $\pm\Delta\theta_i'$ при изменении угла падения θ_i в диапазоне 0–90°. На качественном уровне условия затухания нормальных блоховских мод определены в [1]. Однако вопросы о предельных значениях углов расстройки и о законе их изменения в рабочем диапазоне углов падения остаются практически открытыми.

Будем исходить из того, что блоховская мода (1) имеет затухающий характер тогда, когда выполняется условие

$$\left|\frac{1}{2}(A+D)\right| > 1, \tag{2}$$

где A и D, являясь элементами $ABCD$-матрицы трансляции [1], определяются выражениями

$$
\begin{aligned}
A &= \left[\cos k_{2x}h_2 + \frac{1}{2}i\left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}} + \frac{k_{1x}}{k_{2x}}\right)\sin k_{2x}h_2\right]\exp(ik_{1x}h_1), \\
D &= \left[\cos k_{2x}h_2 - \frac{1}{2}i\left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}} + \frac{k_{1x}}{k_{2x}}\right)\sin k_{2x}h_2\right]\exp(-ik_{1x}h_1).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь $k_{2x} = \frac{2\pi}{\lambda}n_2\cos\theta_{2i}$, $k_{1x} = \frac{2\pi}{\lambda}n_1\cos\theta_{1i}$ – поперечные волновые компоненты волн в слоях с показателями преломления n_2 и n_1.

Далее вместо неравенства (2) будем пользоваться эквивалентным ему неравенством $\left|1 + \frac{1}{2}(A + D)\right| > 0$, которое после подстановки значений A, D и учета знака приводится к виду

$$
1 + \cos k_{2x}h_2 \cdot \cos k_{1x}h_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}} + \frac{k_{1x}}{k_{2x}}\right)\sin k_{2x}h_2 \cdot \sin k_{1x}h_1 < 0. \tag{4}
$$

Левая часть неравенства (4) зависит от поперечных волновых компонент k_{2x}, k_{1x}, от толщины слоев h_2, h_1, а также от углов преломления (отражения) θ_{2i}, θ_{1i} волн, распространяющихся в слоях 2 и 1 соответственно. Прохождение световой волны в слоях рассматриваемой среды показано на рис. 1, где θ_i – угол наклона освещающей волны. Условия резонансной связи выполняются тогда, когда толщины слоев являются «четвертьволновыми» и находятся по формулам

$$
h_2 = \frac{\lambda}{4n_2\cos\theta_{2i}}, \qquad h_1 = \frac{\lambda}{4n_1\cos\theta_{1i}}. \tag{5}
$$

Тогда набег фаз

$$
k_{2x}h_2 = k_{1x}h_1 = \frac{\pi}{2}. \tag{6}
$$

Выражая углы преломления θ_{2i} и θ_{1i} через угол падения θ_i, получим

$$
\cos\theta_{2i} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i}, \qquad \cos\theta_{1i} = \cos\theta_i. \tag{7}
$$

Если значения (7) подставить в (5) и в полученные при этом формулы ввести угловую расстройку $\pm\Delta\theta$, то будем иметь

$$
k_{2x} = \frac{2\pi}{\lambda}n_2\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2(\theta_i \pm \Delta\theta)}, \qquad k_{1x} = \frac{2\pi}{\lambda}n_1\cos(\theta_i \pm \Delta\theta), \tag{8}
$$

$$h_2 = \frac{\lambda}{4n_2\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_i}}, \qquad h_1 = \frac{\lambda}{4n_1\cos\theta_i}.$$

В этом случае условие резонансной связи (6) будет выполняться при угловой расстройке $\Delta\theta = 0$, т. е. когда толщины слоев h_2 и h_1 будут согласованы с углом падения θ_i по формулам (8).

С учетом (8) левую часть неравенства (4) можно представить в виде функции

$$F(\theta_i, \Delta\theta) = F_1(\theta_i, \Delta\theta) - F_2(\theta_i, \Delta\theta), \tag{9}$$

где

$$F_1(\theta_i, \Delta\theta) = 1 + \cos k_{2x}h_2 \cdot \cos k_{1x}h_1,$$

$$F_2(\theta_i, \Delta\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}} + \frac{k_{1x}}{k_{2x}}\right)\sin k_{2x}h_2 \cdot \sin k_{1x}h_1.$$

Тогда граничными будут такие значения $\theta_i \pm \Delta\theta$, при которых $F(\theta_i, \Delta\theta) = 0$.

Исследование зависимости функций F_1, F_2 и F от переменных θ_i и $\Delta\theta$ проведено методом компьютерного моделирования. Численные значения и графики получены для случая, когда слои 2 и 1 периодической среды характеризуются показателями преломления $n_2 = 3{,}43$ и $n_1 = 3{,}35$, а рабочая длина волны света равна 1,5 мкм. Очевидно, что при других возможных значениях параметров n_2, n_1 и λ общий характер поведения функций F_1, F_2 и F меняться не будет.

В случае, если выполняются условия резонансной связи (6) и угловая расстройка $\Delta\theta = 0$, то

$$F_1(\theta_i, \Delta\theta) = 1, \qquad F_2(\theta_i, \Delta\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{k_{2x}}{k_{1x}} + \frac{k_{1x}}{k_{2x}}\right). \tag{10}$$

Отсюда следует, что в условиях резонансной связи функция F_1 не зависит от угла падения θ_i и равна 1. Характер поведения функции F_2 при изменении угла падения от 0 до 90° показан на рис. 2. Можно видеть, что при $\theta_i = 0°$ функция F_2 равна $\frac{1}{2}(n_2/n_1 + n_1/n_2)$, а затем она монотонно возрастает по мере увеличения угла падения. Скорость изменения функции F_2 в диапазоне углов $0 < \theta_i < 45°$ является сравнительно медленной. Резкое увеличение этой скорости наблюдается при углах $45 < \theta_i < 90°$. Однако во всем диапазоне углов падения θ_i значения функции $F_2 > 1$.

Увеличение скорости изменения функции F_2 при углах $\theta_i > 45°$ происходит потому, что при $\theta_i \to \pi/2$ отношение k_{2x}/k_{1x}, как следует из (8), стремится к бесконечности. На этом участке заметно возрастает значение мнимой компоненты блоховского волнового вектора $K = \pi/\Lambda + iK_i$, которая находит-

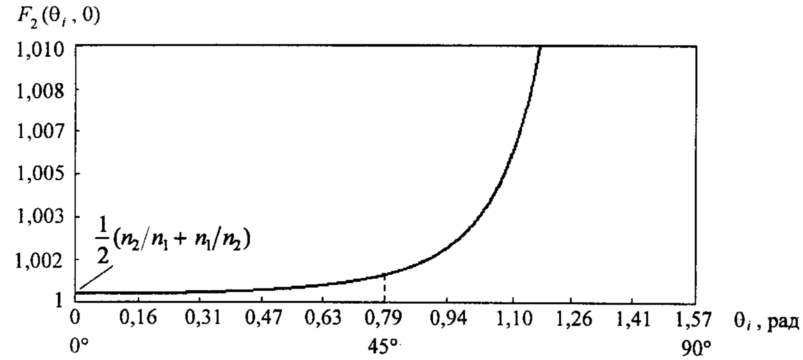

Рис. 2. График зависимости функции $F_2(\theta_i, 0)$ от угла падения света θ_i (штриховой линией показан угол 45°)

ся по формуле $K_i = \ln(k_{2x}/k_{1x})$. Поэтому с увеличением угла падения θ_i блоховская нормальная мода все более локализуется в поверхностных слоях среды. Вышеописанное подтверждается результатами моделирования. На рис. 3 показаны графики затухающих блоховских мод, полученные для углов падения $\theta_i = 75$ (*a*), 80 (*b*) и 85° (*c*). Можно видеть, что наибольшую степень локализации имеет мода при угле падения $\theta_i = 85°$, при этом амплитуда элект-

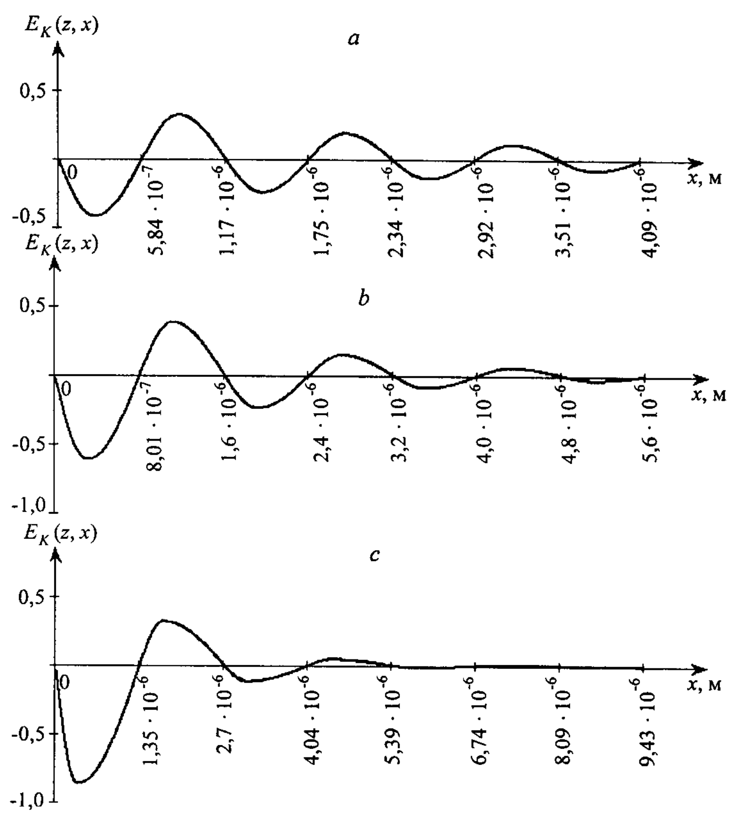

Рис. 3. Графики зависимости степени затухания нормальной блоховской моды от угла падения света θ_i

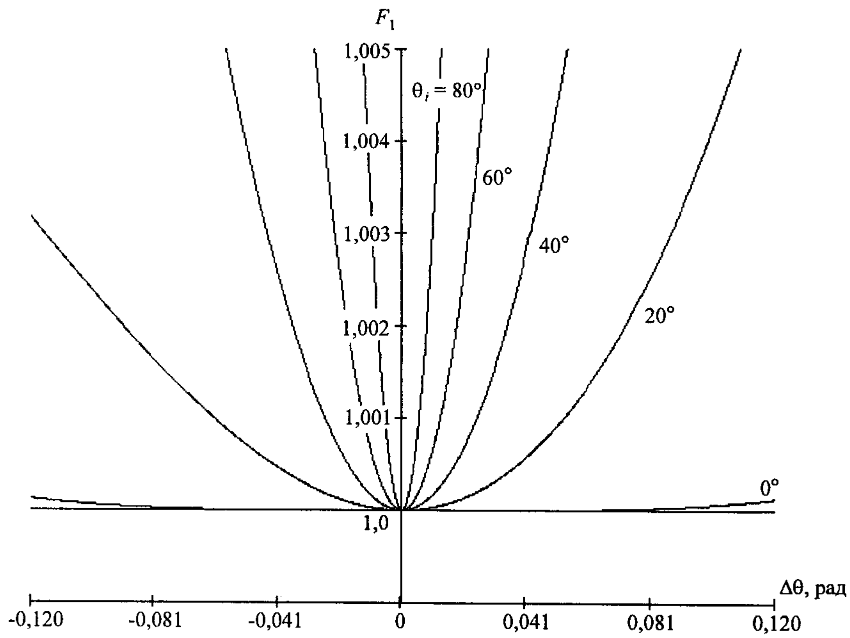

Рис. 4. Графики зависимости функции $F_1(\theta_i, \Delta\theta)$ от значения угла расстройки $\pm\Delta\theta$

рического поля на участке первого периода возрастает. Размеры периодов Λ среды (см. рис. 3, *a–c*) составляли $5{,}84 \cdot 10^{-7}$, $8{,}01 \cdot 10^{-7}$, $1{,}35 \cdot 10^{-6}$ м соответственно. Изменение размера периода обусловлено необходимостью обеспечения условия резонансной связи (6) для каждого из рассматриваемых случаев.

Рассмотрим теперь поведение функций F_1 и F_2 при нарушении условий резонансной связи, т. е. когда $\Delta\theta$ является переменной величиной и не равной нулю. На рис. 4, 5 приведены графики зависимости функций F_1 и F_2 от углов

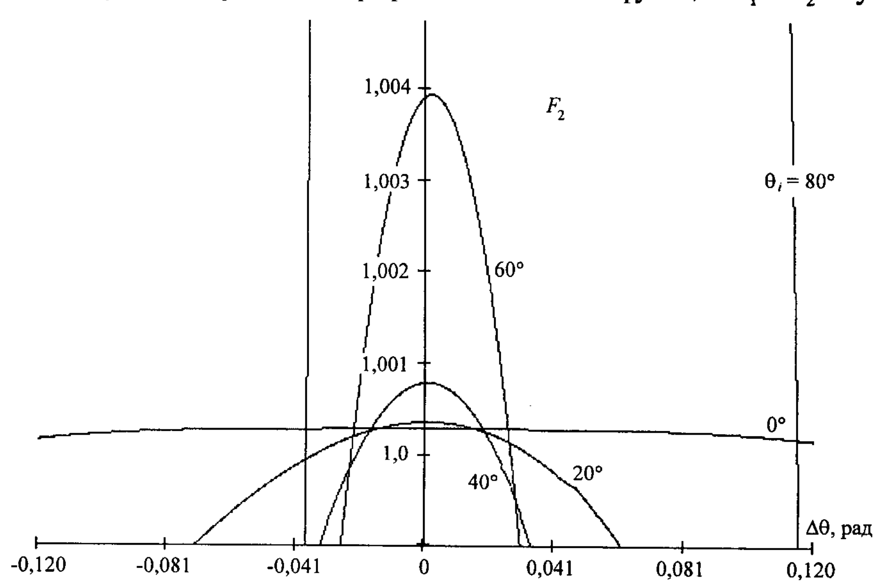

Рис. 5. Графики зависимости функции $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ от угловой расстройки $\pm\Delta\theta$

расстройки $\pm\Delta\theta$ для различных значений угла падения θ_i. Диапазон изменения $\Delta\theta$ в обоих случаях не превышал $\pm 6{,}8°$ ($\pm 0{,}12$ рад).

Из рис. 4 следует, что с увеличением значения угловой расстройки $\pm\Delta\theta$ вклад функции F_1 в выражение (9) повышается в тем большей степени, чем больше угол падения θ_i. Так, при угле $\theta_i = 0°$ функция $F_1(0, \Delta\theta)$ в диапазоне $-4{,}6 < \Delta\theta < +4{,}6°$ меняется настолько мало, что при принятом масштабе графиков эта зависимость практически совпадает с уровнем, равным 1. Заметные изменения функции $F_1(\theta_i, \Delta\theta)$ происходят при углах падения $\theta_i = 20$; 40; 60; 80°. При этом функция $F_1(\theta_i, \Delta\theta)$ является симметричной относительно оси ординат. Обострение ее левой и правой ветвей «вверх» происходит по мере увеличения угла падения θ_i.

Иначе ведет себя в тех же условиях функция $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ (см. рис. 5). Здесь обратим внимание на три важных фактора.

Прежде всего, отметим, что с увеличением угла падения θ_i амплитуда функции $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ при $\Delta\theta = 0$ повышается. Характер изменения этой амплитуды показан на рис. 2. Общим для всех кривых является то, что амплитуды по абсолютному значению превышают 1.

Далее значения функции $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ при углах $\theta_i = 20$; 40; 60; 80° начинают убывать по мере увеличения значений $\pm\Delta\theta$ в тем большей степени, чем больше угол падения θ_i. Функция $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ в отличие от функции $F_1(\theta_i, \Delta\theta)$ обостряется «вниз».

Наконец, при больших углах падения θ_i (см., например, графики для $\theta_i = 60$; 80°) происходит заметное смещение максимума функции $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ вправо, в силу чего она становится асимметричной оси ординат. Эффект асимметрии функции $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ можно наблюдать на рис. 6, где приведе-

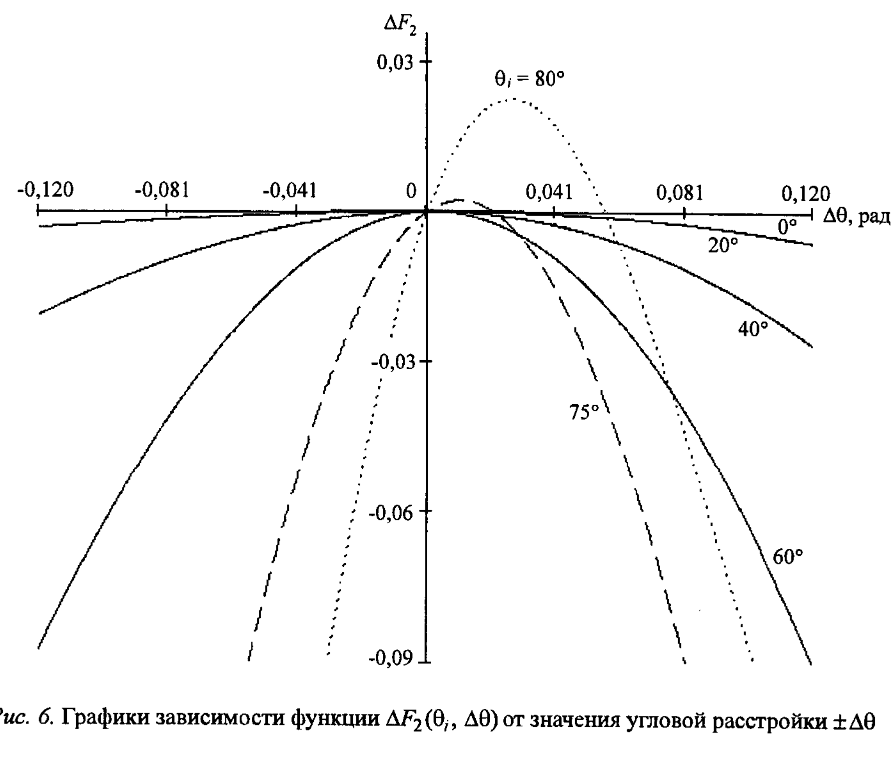

Рис. 6. Графики зависимости функции $\Delta F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ от значения угловой расстройки $\pm\Delta\theta$

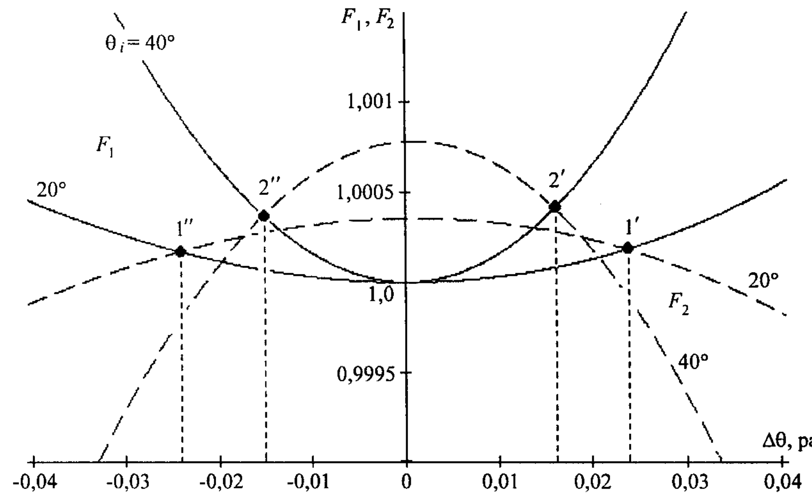

Рис. 7. Совместные графики зависимости функций $F_1(\theta_i, \Delta\theta)$ и $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ от угловой расстройки $\pm\Delta\theta$

ны графики зависимости разностной функции

$$\Delta F_2(\theta_i, \Delta\theta) = F_2(\theta_i, \Delta\theta) - F_2(\theta_i, 0) \tag{11}$$

от значений переменной $\pm\Delta\theta$ при углах падения $\theta_i = 0$; 20; 40; 60; 75; 80°. Вычитание значений $F_2(\theta_i, 0)$ из функции $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ приводит к тому, что все графики на рис. 5, имеющие разные амплитуды $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ при $\Delta\theta = 0$, совмещаются в начале координат.

Согласно (9) искомая функция F находится путем вычитания функций F_1 и F_2 и определения знака этой разности. Выполним эти операции графически. Для этого совместим графики функций F_1 и F_2, как показано на рис. 7. Для наглядности здесь представлены только две пары функций F_1 и F_2, при этом первая из них получена при угле падения $\theta_i = 20°$, а вторая – при $\theta_i = 40°$. Ветви функции F_1 уходят вверх, ветви функции F_2 – вниз. Они пересекаются в точках 1′, 1″ ($\theta_i = 20°$) и 2′, 2″ ($\theta_i = 40°$), в которых значения функций $F_1 > 1$, $F_2 > 1$ и левая часть неравенства (4) становится равной 0. Эти точки позволяют найти предельные пары значений ($\Delta\theta_1''$, $\Delta\theta_1'$) и ($\Delta\theta_2''$, $\Delta\theta_2'$), при которых затухающая блоховская мода исчезает. Она переходит в незатухающую волну. В областях допустимых углов расстройки, т. е. когда $\Delta\theta_1' < \Delta\theta_1 < \Delta\theta_1''$ при $\theta_i = 20°$ и $\Delta\theta_2' < \Delta\theta_2 < \Delta\theta_2''$ при $\theta_i = 40°$, затухающие блоховские моды существуют. Из графиков также следует, что допустимый диапазон изменения углов расстройки $\pm\Delta\theta$ при $\theta_i = 40°$ меньше того же диапазона при $\theta_i = 20°$.

Значения допустимых углов расстройки $\pm\Delta\theta$ для ряда фиксированных углов падения θ_i приведены в таблице. Можно видеть, что при угле падения $\theta_i = 0°$, когда левые и правые ветви функций F_1 и F_2 являются практически симметричными, затухающая блоховская мода существует при углах расстройки $\Delta\theta$, не превышающих $\pm 7°$. Этот диапазон изменения угла расстройки является максимальным. С увеличением угла падения θ_i границы диапазона допустимого изменения $\Delta\theta$ уменьшаются и достигают минимальных значений порядка $\pm 0{,}9°$ при 45°, а затем при углах $\theta_i > 45°$ снова увеличиваются. Эффект расширения границ диапазона при углах падения $\theta_i > 45°$ можно объяснить сильно возрастающим характером функции $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ на участке 45 (0,78) $< \theta_i < 90°$ (1,57 рад), как это следует из рис. 2. «Купол» функции $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$, показанной на рис. 5, начинает ускоренно перемещаться по отношению к функции $F_1(\theta_i, \Delta\theta)$ вверх и вправо, в результате чего левые и правые ветви этих функций пересекаются на более высоком уровне. Очевидно, что смещение максимума функции $F_2(\theta_i, \Delta\theta)$ по отношению к оси ординат вправо ведет к тому, что диапазон допустимых изменений углов расстройки становится асимметричным. Факт такого смещения уже отмечался при обсуждении графиков на рис. 6. Это означает, что при углах падения $45 < \theta_i < 90°$ влияние одинаковых по абсолютному значению отрицательных и положительных углов расстройки $\Delta\theta$ на значения функции (9) является неравноценным.

θ_i, град	$\Delta\theta$ общая, град	$-\Delta\theta$	$+\Delta\theta$
0	14	-7,162	7,162
10	5,324	-2,977	2,347
20	2,739	-1,391	1,348
30	2,067	-1,029	1,038
40	1,83	-0,9	0,93
45	1,803	-0,881	0,922
50	1,829	-0,887	0,942
60	2,035	-0,964	1,071
70	2,745	-1,22	1,525
80	5,442	-1,757	3,685

Диапазоны угловой расстройки $\pm\Delta\theta$ при различных углах падения θ_i можно также находить графически. На рис. 8 показаны «колоколообразные» графики функции $F(\theta_i, \Delta\theta)$ из (9), полученные при углах падения $\theta_i = 0; 20; 40; 45; 50; 60; 80°$. Графики находятся в положительной полуплоскости значений F и удовлетворяют условию $F > 0$. Отсюда точки пересечения ветвей этих функций с осью абсцисс определяют граничные значения $\pm\Delta\theta$, при которых затухающая блоховская мода переходит в распространяющуюся незатухающую волну. Можно видеть, что наибольший диапазон измене-

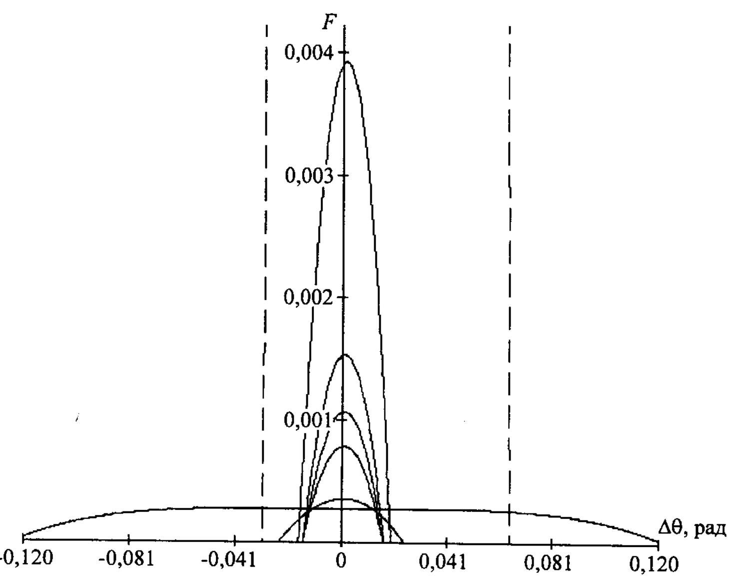

Рис. 8. Графики зависимости функции $F(\theta_i, \Delta\theta)$ от значений угловой расстройки $\pm\Delta\theta$

ния $\pm\Delta\theta$ имеет место при угле падения $\theta_i = 0°$, наименьший – при $\theta_i = 45°$. Законы сужения границ этого диапазона при углах $0 < \theta_i < 45°$ и последующего расширения при углах $45 < \theta_i < 90°$ соответствуют данным таблицы. Кроме того, из сравнения графиков следует, что при увеличении углов падения θ_i рост амплитуды функции $F(\theta_i, \Delta\theta)$ при $\theta_i = 0°$ сильно ускоряется. Так, при $\theta_i = 0°$ значение функции F меньше 0,0005, при $\theta_i = 60°$ оно возрастает до 0,004, а при $\theta_i = 80°$ – до 0,12831 и, как следствие, выходит за пределы масштаба рисунка. Сильный рост амплитуды функции $F(\theta_i, \Delta\theta)$ при $\theta_i = 80°$ сопровождается также смещением границ допустимой угловой расстройки $\pm\Delta\theta$ вправо.

Отметим, что при необходимости границы допустимой угловой расстройки $\pm\Delta\theta$ могут быть расширены. Для этого разность между показателями преломления n_2 и n_1 нужно выбирать большую.

Таким образом, исследование характера затухания нормальной блоховской моды, возникающей в периодической слоистой среде, в зависимости от угла наклона падающей световой волны θ_i и от степени расстройки этого угла $\pm\Delta\theta_i$ позволяет сделать следующие выводы.

1. С увеличением угла наклона θ_i от 0 до 90° степень затухания нормальной блоховской моды увеличивается, а ее световая мощность все более концентрируется в поверхностных слоях периодической среды.

2. При нормальном падении световой волны ($\theta_i = 0°$) допустимый диапазон расстройки этого угла ($\pm\Delta\theta$) является наибольшим.

3. При увеличении угла падения θ_i границы допустимого диапазона расстройки начинают уменьшаться и принимают минимальное значение при углах, близких к 45°.

4. При дальнейшем увеличении угла падения от 45 до 90° границы допустимой расстройки этого угла $\pm\Delta\theta$ увеличиваются, однако при этом влияние «положительной» ($+\Delta\theta$) расстройки на условие существования нормальной блоховской моды оказывается более сильным, чем «отрицательной» ($-\Delta\theta$). Это приводит к тому, что максимумы отражательной способности периодической слоистой среды становятся асимметричными и смещаются в сторону больших углов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ярив А., Юх П.** Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.
2. **Giboney K., Aronson L., Lemoff B.** The ideal light source for datanets // IEEE Spectrum. February. 1998. P. 43.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: peter@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
4 сентября 2002 г.