

С. Э. Воробейчиков, Ю. С. Пономарева

(Тамск)

**ОБ ОБНАРУЖЕНИИ МОМЕНТА ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ***

Рассматривается задача обнаружения изменения параметров случайного процесса, описываемого рекуррентными уравнениями. Предложена последовательная процедура обнаружения момента разладки случайного процесса на основе взвешенного метода наименьших квадратов. Исследованы вероятностные характеристики процедуры (вероятность ложной тревоги и ложного срабатывания), приведены результаты численного моделирования.

Введение. Одной из задач, возникающих при анализе экспериментальных данных, является обнаружение моментов времени, в которые поведение наблюдаемого процесса существенно меняется. В литературе эта задача получила название разладки случайного процесса [1]. Для ее решения применяются два основных подхода. Первый подход связан с анализом всей реализации процесса, и решение о наличии разладки принимается с помощью апостериорных алгоритмов. Второй подход связан с использованием последовательных алгоритмов, когда решение о наличии изменений принимается в ходе наблюдения за процессом. Эти алгоритмы ориентированы на скорейшее обнаружение изменений. Основными характеристиками последовательных алгоритмов являются среднее время между ложными тревогами и среднее время запаздывания в обнаружении разладки. Первая из них характеризует частоту неправильных решений о наличии разладки при ее отсутствии; вторая показывает, сколько требуется наблюдений для обнаружения момента изменения после его появления.

Достаточно хорошо изученной является ситуация, когда наблюдения представляют собой последовательность независимых случайных величин, у которых в момент разладки изменяется среднее. В то же время для описания реальных сигналов часто используются более сложные модели. Одной из часто используемых является модель авторегрессионного типа, которая позволяет достаточно адекватно описывать наблюдения, используя небольшое число параметров. Известен ряд алгоритмов решения задачи обнаружения моментов разладки для такого рода процессов [2–4]. Однако исследование свойств этих методов является весьма сложной проблемой даже в случае, когда известны параметры процесса до и после разладки.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00880).

В данной работе предлагается последовательный метод обнаружения момента изменения параметров случайного процесса авторегрессионного типа, параметры которого после разладки неизвестны.

Постановка задачи. Рассмотрим случайный процесс $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$, который описывается системой стохастических разностных уравнений

$$x(t+1) = A_t \lambda + b \xi_t, \quad t = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Здесь $\{\xi_t\}$ — последовательность независимых случайных величин с нулевым средним $E\xi_t = 0$ и единичной дисперсией $D\xi_t = 1$. Векторная функция A_t размерности $1 \times m$ и скалярная функция $b(t, x)$ могут зависеть от реализаций процесса $x(t)$ до момента t включительно. В момент разладки $\theta > 0$ изменяется вектор параметров λ размерности $m \times 1$:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \mu_0, & t < \theta; \\ \mu, & t \geq \theta. \end{cases} \quad (2)$$

Значение вектора μ неизвестно, однако предполагается, что для некоторого заданного положительного Δ выполняется неравенство $(\mu - \mu_0)^T (\mu - \mu_0) \geq \Delta$ (T — транспонирование). Величина Δ характеризует минимально возможное изменение вектора параметров λ в момент разладки. Задача состоит в определении момента разладки θ по наблюдениям процесса $x(t)$.

Построение решающей процедуры. Для организации процедуры обнаружения момента разладки необходимо построить статистики, поведение которых после разладки существенно изменится. В данной работе предлагается метод обнаружения разладки, основанный на использовании последовательных оценок $\hat{\lambda}(x)$ вектора параметров λ по взвешенному методу наименьших квадратов (МНК). Затем строится статистика, сравнивающая наблюдения процесса $\{x_{n+1}\}$ с линейной комбинацией $\{A_n \hat{\lambda}(x)\}$.

Оценка вектора λ по взвешенному МНК, построенная по наблюдениям процесса x с момента t_1 до момента t_2 , имеет вид

$$\tilde{\lambda}(t_1, t_2) = C^{-1}(t_1, t_2) \sum_{n=t_1+1}^{t_2} A_n^T x_{n+1} v_n, \quad (3)$$

где

$$C(t_1, t_2) = \sum_{n=t_1+1}^{t_2} A_n^T v_n A_n; \quad (4)$$

$v_n = v_n(x)$ — неотрицательная скалярная функция, зависящая от реализаций процесса x до момента n включительно. Эту оценку можно преобразовать следующим образом:

$$\tilde{\lambda}(t_1, t_2) = \lambda + C^{-1}(t_1, t_2) \varepsilon(t_1, t_2), \quad (5)$$

где

$$\varepsilon(t_1, t_2) = \sum_{n=t_1+1}^{t_2} b A_n^T v_n \xi_n. \quad (6)$$

Определим функционал взвешенного метода наименьших квадратов:

$$I(t) = \sum_{n=1}^t [x_{n+1} - A_n \mu_0]^2 v_n + \sum_{n=t+1}^T [x_{n+1} - A_n \tilde{\lambda}(t+1, n)]^2 v_n$$

и рассмотрим величину $J(t_1, t_2) = I(t_2) - I(t_1)$, характеризующую приращение этого функционала на интервале времени $(t_1, t_2]$:

$$J(t_1, t_2) = \sum_{n=t_1+1}^{t_2} [x_{n+1} - A_n \mu_0]^2 v_n - \sum_{n=t_1+1}^{t_2} [x_{n+1} - A_n \tilde{\lambda}(t_1, t_2)]^2 v_n. \quad (7)$$

Рассмотрим значение статистики $J(t_1, t_2)$ до разладки (для $t_2 < \theta$):

$$\begin{aligned} J(t_1, t_2) &= \sum_{n=t_1+1}^{t_2} [x_{n+1} - A_n \mu_0]^2 v_n - \\ &- \sum_{n=t_1+1}^{t_2} [x_{n+1} - A_n (\mu_0 + C^{-1}(t_1, t_2) \varepsilon(t_1, t_2))]^2 v_n = \\ &= 2 \sum_{n=t_1+1}^{t_2} b \xi_{n+1} A_n v_n C^{-1}(t_1, t_2) \varepsilon(t_1, t_2) - \\ &- \varepsilon^T(t_1, t_2) C^{-1}(t_1, t_2) \sum_{n=t_1+1}^{t_2} A_n^T v_n A_n C^{-1}(t_1, t_2) \varepsilon(t_1, t_2) = \\ &= \varepsilon^T(t_1, t_2) C^{-1}(t_1, t_2) \varepsilon(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Если к моменту t_1 произошла разладка, то согласно (5) получаем

$$\begin{aligned} J(t_1, t_2) &= \sum_{n=t_1}^{t_2} [x_{n+1} - A_n \mu_0]^2 v_n - \sum_{n=t_1}^{t_2} [x_{n+1} - A_n (\mu + C^{-1}(t) \varepsilon(t_1, t_2))]^2 v_n = \\ &= 2 \sum_{n=t_1}^{t_2} b \xi_{n+1} A_n v_n (\mu - \mu_0) + \sum_{n=t_1}^{t_2} (\mu - \mu_0)^T A_n^T v_n A_n (\mu - \mu_0) + \\ &+ 2 \sum_{n=t_1}^{t_2} b \xi_{n+1} A_n v_n C^{-1}(t_1, t_2) \varepsilon(t_1, t_2) - \\ &- \varepsilon^T(t_1, t_2) C^{-1}(t_1, t_2) \sum_{n=t_1}^{t_2} A_n^T v_n A_n C^{-1}(t_1, t_2) \varepsilon(t_1, t_2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon^T(t_1, t_2) C^{-1}(t_1, t_2) \varepsilon(t_1, t_2) + 2(\mu - \mu_0)^T \varepsilon(t_1, t_2) + \\
&\quad + (\mu - \mu_0)^T C(t_1, t_2) (\mu - \mu_0). \tag{9}
\end{aligned}$$

Таким образом, характер поведения статистики после разладки изменился. Следует заметить, что формулы (8) и (9) верны, если интервал наблюдений не включает момент разладки.

Значение $J(t_1, t_2)$ зависит от шумов $\varepsilon(t_1, t_2)$. Для осуществления контроля над влиянием шумов предлагается перейти к рассмотрению приращений $J(t_1, t_2)$ на интервалах времени случайной длины $[\tau_{i-1}, \tau_i]$. При этом специальным образом выбираются весовые функции $\{v_n(x)\}$, а последовательность моментов остановки $\{\tau_i\}$ определяется соотношениями

$$\tau_i = \tau_i(H) = \{\inf t \geq s_i: v_{\min}[C(s_i, t)] \geq H\}, \tag{10}$$

где

$$s_i = \begin{cases} 0, & i=1, \\ \tau_{i-1} + 1, & i>1; \end{cases}$$

v_{\min} – минимальное собственное значение матрицы $C(s_i, t) = \sum_{n=s_i}^t A_n^T v_n A_n$; H – некоторое положительное число, являющееся параметром процедуры обнаружения момента разладки.

Обозначим

$$\begin{aligned}
C_i(H) &= \sum_{n=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} A_n^T v_n A_n, & \varepsilon_i(H) &= \sum_{n=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} b A_n^T v_n \xi_n, \\
\lambda_i^*(H) &= C_i^{-1}(H) \sum_{n=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} A_n^T x_{n+1} v_n, \tag{11}
\end{aligned}$$

$$J_i^*(H) = \sum_{n=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} [x_{n+1} - A_n \mu_0]^2 v_n - \sum_{n=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} [x_{n+1} - A_n \lambda_i^*(H)]^2 v_n.$$

Тогда согласно (8) и (9) получим

$$J_i^*(H) = \begin{cases} \varepsilon_i^T(H) C_i^{-1}(H) \varepsilon_i(H), & \tau_i < \theta; \\ \varepsilon_i^T(H) C_i^{-1}(H) \varepsilon_i(H) + 2(\mu - \mu_0)^T \varepsilon_i(H) + \\ + (\mu - \mu_0)^T C_i(H) (\mu - \mu_0), & \tau_{i-1} \geq \theta. \end{cases} \tag{12}$$

Весовые функции $\{v_n(x)\}$ будем выбирать таким образом, чтобы ограничить среднее значение шумовой составляющей статистики $J_i^*(H)$. Определим последовательность весов $\{v_i\}$ из уравнений

$$\sum_{n=\tau_{i-1}+m}^i b^2 A_n v_n^2 A_n^T = v_{\min} [C(\tau_{i-1}+1, t)], \quad \tau_{i-1}+m < t < \tau_i. \quad (13)$$

Так как матрицы $C(\tau_{i-1}+1, \tau_{i-1}+k)$ для $k < m$ вырождены, определим $\{v_{\tau_{i-1}+k}(x)\}_{k < m}$ следующим образом:

$$v_{\tau_{i-1}+k}(x) = \frac{1}{\|A_{\tau_{i-1}+k}(x)\|}, \quad k = 1, \dots, m-1.$$

Для того чтобы обеспечить в момент τ_i равенство $v_{\min} [C(\tau_{i-1}+1, \tau_i)] = H$, введем дополнительное ограничение на $v_{\tau_i}(x)$:

$$\sum_{n=\tau_{i-1}+m}^{\tau_i} b^2 A_n v_n^2 A_n^T \leq v_{\min} [C(\tau_{i-1}+1, \tau_i)]. \quad (14)$$

Таким образом, все величины, входящие в статистику $J_i^*(H)$, определены. Оценим среднее значение этой статистики до и после момента разладки. Обозначим через E_0 и E_1 усреднение по распределению процесса $x(t)$ до и после момента разладки соответственно.

В силу выбора последовательности моментов остановки по правилу (10), равенства (14) и свойств последовательности $\{\xi_i\}$ получим

$$\begin{aligned} E_0 [J_i^*(H)] &= E_0 [\varepsilon_i^T(H) C_i^{-1}(H) \varepsilon_i(H)] \leq \frac{1}{H} E_0 [\varepsilon_i^T(H) \varepsilon_i(H)] = \\ &= \frac{1}{H} E_0 \left[\sum_{n=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} b^2 A_n v_n^2 A_n^T \xi_{n+1}^2 \right] = \frac{1}{H} E_0 \left[(m-1)b^2 + \sum_{n=\tau_{i-1}+m}^{\tau_i} b^2 A_n v_n^2 A_n^T \xi_{n+1}^2 \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{H} [(m-1)b^2 + H] = 1 + \frac{(m-1)b^2}{H} = C_0, \end{aligned} \quad (15)$$

т. е. среднее значение шумовой компоненты статистики до момента разладки ограничено сверху константой.

После момента разладки характер поведения $J_i^*(H)$ изменяется и для всех i , таких, что $\tau_{i-1} \geq \theta$, статистика включает компоненту ρ_i , которая ограничена снизу:

$$\rho_i(H) = (\mu - \mu_0)^T C_i(H) (\mu - \mu_0) \geq H(\mu - \mu_0)^T (\mu - \mu_0) \geq H\Delta, \quad (16)$$

где Δ – минимально возможный скачок вектора параметров λ в момент разладки процесса x . Шумовая компонента статистики после момента разладки

принимает вид

$$\zeta_i(H) = \varepsilon_i^T(H) C_i^{-1}(H) \varepsilon_i(H) + 2(\mu - \mu_0)^T \varepsilon_i(H)$$

с математическим ожиданием $E_1[\zeta_i(H)] \leq C_0$, оцененным аналогично (15).

Заканчивая построение процедуры обнаружения момента разладки, зададим порог $\delta > 0$. Завершая цикл наблюдений i , принимаем решение о наличии разладки, если выполняется неравенство

$$J_i^*(H) > \delta. \quad (17)$$

Характеристиками построенной процедуры являются вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия. Обозначим их как

$$P_i^0(H, \delta) = P_0\{|J_i^*(H)| > \delta\} = P_0\{|\varepsilon_i^T(H) C_i^{-1}(H) \varepsilon_i(H)| > \delta\},$$

$$P_i^1(H, \delta) = P_1\{|\rho_i(H) + \zeta_i(H)| < \delta\}. \quad (18)$$

Оценим эти вероятности. Используя неравенство Чебышева, получим

$$P_i^0(H, \delta) = P_0\{|J_i^*(H)| > \delta\} \leq \frac{E_0\{|J_i^*(H)|\}}{\delta} \leq \frac{C_0}{\delta} = \frac{1}{\delta} + \frac{(m-1)b^2}{H\delta}. \quad (19)$$

Вероятность ложного спокойствия оценивается с помощью неравенств Чебышева, Коши – Буняковского и с учетом соотношений (15) и (16) следующим образом:

$$P_i^1(H, \delta) = P_1\{|\rho_i(H) + \zeta_i(H)| < \delta\} \leq P_1\{|\zeta_i(H)| > H(\mu - \mu_0)^T(\mu - \mu_0) - \delta\} \leq$$

$$\leq \frac{E_1\{|\zeta_i(H)| \mid \tau_{i-1} \geq \theta\}}{H(\mu - \mu_0)^T(\mu - \mu_0) - \delta} \leq \frac{C_0 + 2E_1\{|\varepsilon_i^T(H) \varepsilon_i(H)|\}}{H(\mu - \mu_0)^T(\mu - \mu_0) - \delta} \leq$$

$$\leq \frac{C_0 + 2\sqrt{E_1\{(\mu - \mu_0)^T \varepsilon_i(H) \varepsilon_i^T(H) (\mu - \mu_0)\}}}{H(\mu - \mu_0)^T(\mu - \mu_0) - \delta} \leq$$

$$\leq \frac{C_0 + 2\sqrt{(\mu - \mu_0)^T(\mu - \mu_0) E_1\{\varepsilon_i^T(H) \varepsilon_i(H)\}}}{H(\mu - \mu_0)^T(\mu - \mu_0) - \delta} \leq \frac{C_0 + 2\|\mu - \mu_0\| \sqrt{H + (m-1)b^2}}{H\|\mu - \mu_0\|^2 - \delta} =$$

$$= \frac{C_0/\|\mu - \mu_0\| + 2\sqrt{H + (m-1)b^2}}{H\|\mu - \mu_0\| - 1/\|\mu - \mu_0\|} \leq \frac{C_0/\sqrt{\Delta} + 2\sqrt{H + (m-1)b^2}}{H\sqrt{\Delta} - \delta/\sqrt{\Delta}} =$$

$$= \frac{C_0 + 2\sqrt{(H + (m-1)b^2)\Delta}}{H\Delta - \delta} = \frac{H + (m-1)b^2 + 2H\delta\sqrt{(H + (m-1)b^2)\Delta}}{H^2\delta\Delta - H\delta^2}. \quad (20)$$

Результаты численного моделирования. В качестве примера рассматривался скалярный процесс авторегрессии второго порядка

$$x(t+1) = \lambda_1 x_t + \lambda_2 x_{t-1} + \xi_{t+1}, \quad t=0, 1, \dots, n. \quad (21)$$

Распределение $\{\xi_t\}$ – гауссовское с нулевым средним и дисперсией 1. Здесь

$$A(t) = (x_t, x_{t-1}), \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad b(t, x) = 1.$$

Для данного примера матрица $C(t_1, t_2)$ примет вид

$$C(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \sum_{n=t_1+1}^{t_2} x_n^2 v_n & \sum_{n=t_1+1}^{t_2} x_n v_n x_{n-1} \\ \sum_{n=t_1+1}^{t_2} x_n v_n x_{n-1} & \sum_{n=t_1+1}^{t_2} x_{n-1}^2 v_n \end{bmatrix}$$

и ее минимальное собственное значение вычисляется по формуле

$$v_{\min}[C(t_1, t_2)] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=t_1+1}^{t_2} x_n^2 v_n + \sum_{n=t_1+1}^{t_2} x_{n-1}^2 v_n - \sqrt{\left(\sum_{n=t_1+1}^{t_2} x_n^2 v_n - \sum_{n=t_1+1}^{t_2} x_{n-1}^2 v_n \right)^2 + 4 \left(\sum_{n=t_1+1}^{t_2} x_n v_n x_{n-1} \right)^2} \right\}.$$

Для иллюстрации рассмотрим процесс с параметрами $\lambda_1 = -0,1$, $\lambda_2 = 0,1$ до разладки в момент $n = 70$ и $\lambda_1 = 0,4$, $\lambda_2 = 0,1$ после разладки. Этот пример приведен в [4], в качестве статистики обнаружения были использованы:

- алгоритм CUSUM с порогом обнаружения, равным 4, статистика пересекла порог в точке $n = 99$;
- модель Монте-Карло с порогом 6,665, который достигается в точке $n = 97$.

Для сравнения с этими методами уровень H был взят достаточно большим, чтобы для $0 < n < 200$ значение статистики не превысило H и не начался новый цикл наблюдений. Задано пороговое значение $\delta = 4$. Этот порог был превышен для $n = 97$ (рис. 1).

Если выбрать $H = 10$, тогда процедура сигнализирует о разладке на промежутке $[60, 90]$, $J_{90} = 4,855$.

Поскольку весовые функции $\{v_k(x)\}_{1 \leq k \leq N}$ не превышают 1, для устойчивого процесса авторегрессии можно ожидать, что оценки неизвестных параметров λ_1, λ_2 при больших значениях N будут иметь асимптотически нормальное распределение. При этом «шумовая» компонента статистики $\epsilon_i^T(H) C_i^{-1}(H) \epsilon_i(H)$ будет иметь распределение $\chi^2(2)$. Результаты моделирования показывают, что распределение $\epsilon_i^T(H) C_i^{-1}(H) \epsilon_i(H)$ хорошо аппроксими-

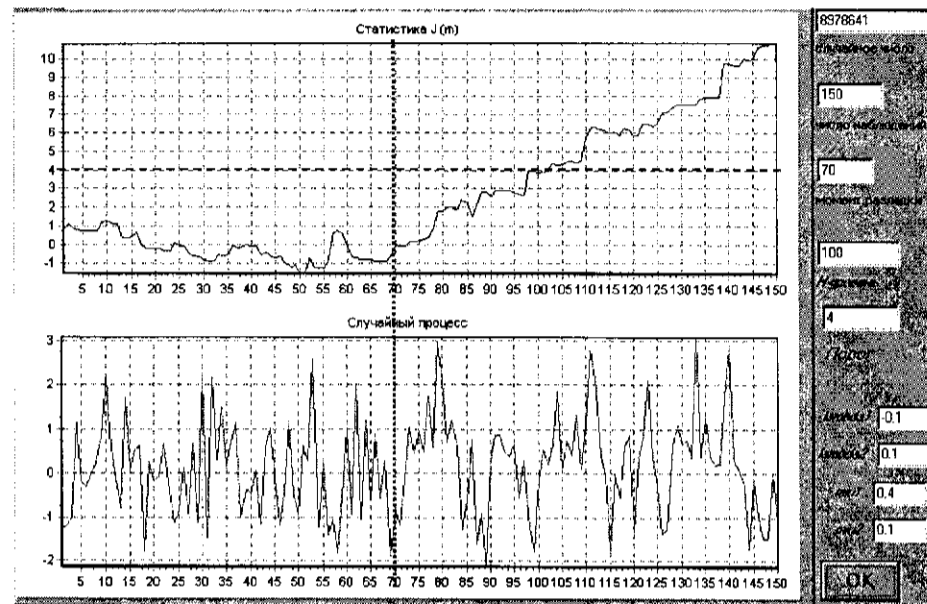


Рис. 1

мируется кривой экспоненциального распределения $F(z) = 1 - e^{-z}$. Соответствующие графики приведены на рис. 2, 3 (кривые 1 – функция $F(z) = 1 - e^{-z}$, 2 – эмпирическая функция распределения величины $\epsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\epsilon_i(H)$). Количество наблюдений процесса $x(t)$, использованных для построения эмпирических функций распределения, составляет 10000 и 1000. Количество моментов останова τ_i , для каждого из которых рассчитывается $\epsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\epsilon_i(H)$, равняется 749 и 78.

С учетом такой аппроксимации для случайного процесса вида (21) можно улучшить оценки характеристик (19) и (20) предложенной процедуры. Вероятность ложной тревоги в интервале наблюдения i будет иметь вид

$$P_i^0(H, \delta) = P_0\{J_i^*(H) > \delta\} = 1 - F(\delta) = e^{-\delta}.$$

Для $\delta = 4$ величина $P_i^0(H, 4) = 0,018$.

Вероятность ложного спокойствия оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} P_i^1(H, \delta) &= P_1\{J_i(H) < \delta\} = P_1\{\epsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\epsilon_i(H) + \\ &+ 2(\mu - \mu_0)^T\epsilon_i(H) + (\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0) < \delta\} \leq \\ &\leq P\{\epsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\epsilon_i(H) - 2|(\mu - \mu_0)^T\epsilon_i(H)| + (\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0) < \delta\} = \\ &= P\{\epsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\epsilon_i(H) - 2\sqrt{(\mu - \mu_0)^T\epsilon_i(H)} + (\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0) < \delta\} = \end{aligned}$$

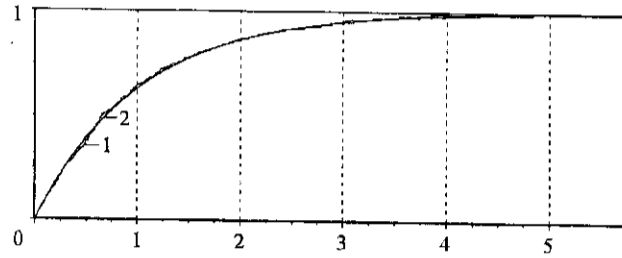


Рис. 2

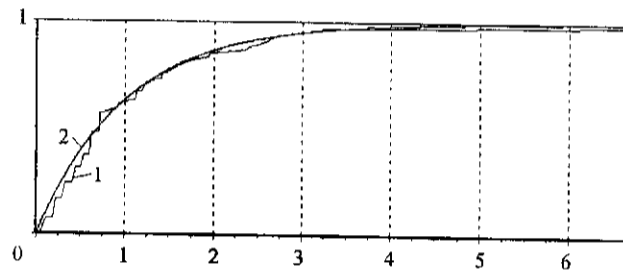


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 &= P\{\varepsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\varepsilon_i(H) - 2\sqrt{(\mu - \mu_0)^T[C_i(H)]^{1/2}[C_i^{-1}(H)]^{1/2}\varepsilon_i(H)} + \\
 &\quad + (\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0) < \delta\} \leq P\{\varepsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\varepsilon_i(H) - \\
 &\quad - 2\sqrt{(\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0)}\sqrt{\varepsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\varepsilon_i(H)} + \\
 &\quad + (\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0) < \delta\} = \\
 &= P\left\{\left(\sqrt{(\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0)} - \sqrt{\varepsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\varepsilon_i(H)}\right)^2 < \delta\right\} = \\
 &= P\left\{\left|\sqrt{(\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0)} - \sqrt{\varepsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\varepsilon_i(H)}\right| < \sqrt{\delta}\right\} = \\
 &= P\left\{\sqrt{(\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0)} - \sqrt{\delta} < \sqrt{\varepsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\varepsilon_i(H)} < \right. \\
 &\quad \left. < \sqrt{(\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0)} + \sqrt{\delta}\right\} \leq \\
 &\leq P\left\{\sqrt{\varepsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\varepsilon_i(H)} > \sqrt{(\mu - \mu_0)^T C_i(H)(\mu - \mu_0)} - \sqrt{\delta}\right\} \leq
 \end{aligned}$$

λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	$(\mu - \mu_0)^T \times$ $\times (\mu - \mu_0)$	H	δ	T_0	T_1	P_0	P_1
до разладки		после разладки								
0,3	-0,4	0,1	-0,4	0,04	300	3	–	218	0,0498	0,0498
0,3	-0,4	0,1	-0,4	0,04	350	4	–	292	0,0183	0,0482
-0,1	0,1	0,4	0,1	0,25	70	5	–	203	0,0067	0,0226
-0,1	0,1	0,4	0,1	0,25	50	5	24950	171	0,0067	0,1848
-0,1	0,3	0,4	0,1	0,29	60	4	14257	181	0,0183	0,0090
-0,1	0,3	0,4	0,1	0,29	70	5	–	206	0,0067	0,0058
0,7	-0,4	0,1	-0,4	0,36	60	7	49900	128	0,0009	0,0182
0,3	-0,1	-0,1	0,4	0,41	70	6	99800	159	0,0025	0,0002
0,3	-0,1	-0,1	0,4	0,41	60	7	–	167	0,0009	0,0047
0,3	-0,1	-0,1	0,4	0,41	25	7	33450	95	0,0009	0,7342
0,2	-0,4	0,2	0,3	0,49	40	4	4158	100	0,0183	0,0028
0,2	-0,4	0,2	0,3	0,49	30	5	7676	87	0,0067	0,0778
0,2	-0,4	0,2	0,3	0,49	35	5	9072	96	0,0067	0,0265
0,2	-0,4	0,2	0,3	0,49	45	7	49900	134	0,0009	0,0150
0,2	-0,4	0,2	0,3	0,49	30	4	2935	81	0,0183	0,0346
-0,2	-0,4	0,2	0,3	0,65	40	4	3441	96	0,0183	0,0001

$$\leq P\left\{\sqrt{\varepsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\varepsilon_i(H)} > \sqrt{H\Delta} - \sqrt{\delta}\right\} =$$

$$= P\{\varepsilon_i^T(H)C_i^{-1}(H)\varepsilon_i(H) > (\sqrt{H\Delta} - \sqrt{\delta})^2\} = 1 - F((\sqrt{H\Delta} - \sqrt{\delta})^2) = e^{-(\sqrt{H\Delta} - \sqrt{\delta})^2}$$

Приведем данные результатов моделирования для различных значений вектора параметров λ и различных параметров процедуры H, δ . Данные сведены в таблицу, где T_0 – среднее время между ложными тревогами; T_1 – среднее время между моментом разладки и ее обнаружением, или задержка объявления разладки; P_1 и P_0 – вероятность ложного спокойствия и ложной тревоги соответственно. T_0 , равное 0, в данном случае означает, что ложной тревоги не появилось за 160000 наблюдений.

Заключение. В данной работе предложен метод обнаружения скачка параметров случайного процесса рекуррентного типа. Процедура основана на методе наименьших квадратов, в котором вместо неизвестных параметров используются их последовательные оценки с гарантированным среднеквад-

ратическим уклонением. Данные моделирования показывают работоспособность предложенной процедуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ширяев А. Н.** Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
2. **Бородкин Л. И., Мотгль В. В.** Алгоритм обнаружения момента изменения параметров уравнения случайного процесса // *АиТ*. 1976. № 6. С. 23.
3. **Бассвиль М., Вилски А., Банвенист А. и др.** Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем. М.: Мир, 1989.
4. **Lai T. Z.** Sequential changepoint detection in quality control and dynamical systems // *Journ. Res. Statist. Soc. B*. 1995. **57**. N 4. P. 613.

*Томский государственный университет,
E-mail: sev@vmm.tsu.ru*

*Поступила в редакцию
11 апреля 2002 г.*

Подписка на наш журнал – залог Вашего успеха!