

В. А. Иванов, В. В. Пикалов

(Новосибирск)

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ
КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА
ПО СПЕКТРАМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ**

Описан томографический метод определения двумерной пространственной структуры колебательных процессов в эмиссионных объектах. В сечении объекта регистрируются зависящие от времени линейные интегралы излучения вдоль параллельных лучей наблюдения. По фурье-образам интегральных проекций восстанавливаются пространственные распределения гармоник колебаний. Особенности метода исследуются в вычислительном эксперименте.

Введение. При изучении колебательных и волновых явлений одной из задач является определение картины пространственного распределения амплитуд (или интенсивностей) изменяющихся во времени физических величин. Для нахождения локальных распределений периодических процессов, протекающих в сплошных средах, может быть эффективен томографический подход [1–3]. Он заключается в послойном исследовании трансмиссионным или эмиссионным способом области, где существуют колебания. В частности, при исследовании колебаний в плазме регистрируется временная зависимость одномерных интегральных проекций выходящего из исследуемой области излучения на выбранных спектральных линиях. Преобразованием Фурье проекционных данных по времени находится их частотный спектр. Спектральный анализ осуществляется либо непосредственно при регистрации проекций, либо фурье-спектр проекций вычисляется отдельно. Алгоритмами вычислительной томографии по фурье-образам проекций на частотах представляющих интерес гармоник колебаний восстанавливаются двумерные распределения. Они отражают пространственную структуру выбранных гармоник в исследуемом слое. Потенциальные возможности и особенности применения колебательной эмиссионной томографии изучаются в вычислительном эксперименте. В частности, обсуждается случай приближенного восстановления искомым распределений гармоник по модулю фурье-образа проекций, который может иметь место в реальных измерениях.

Модель колебаний. Рассмотрим модель стационарного периодического процесса. Пусть внутри некоторой области происходят периодические колебания локальных коэффициентов эмиссии светящегося объекта, описываемые функцией $g(x, y, t)$, где x, y – координаты точки пространства в декар-

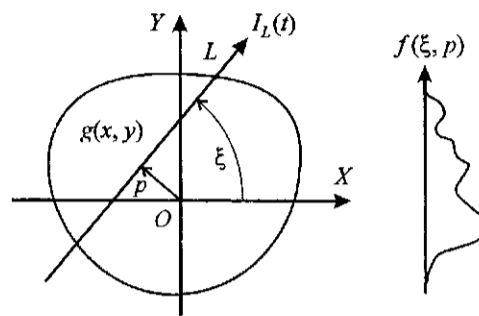


Рис. 1. Томографическая схема регистрации излучения

товой системе координат, t – время. Для фиксированной точки исследуемой области периодический процесс представим в виде суммы конечного числа простых гармонических колебаний:

$$g(x, y, t) = \sum_{i=1}^M g_i(x, y) \cos(2\pi\nu_i t + \varphi_i), \quad (1)$$

где φ_i – начальное значение фазы; $g_i(x, y)$ – начальное распределение амплитуды i -й гармоники (моды) колебаний; M – число гармоник. Спектр Фурье рассматриваемых колебаний состоит из дискретных частот ν_i .

Томографическая задача. Для нахождения в исследуемой плоскости распределения амплитуд переменной составляющей локальных коэффициентов эмиссии с частотой i -й гармоники решается томографическая задача. В разных ракурсах наблюдения регистрируется временная зависимость вышедшего за пределы объекта излучения на фиксированных спектральных линиях. Предположим, что излучение внутри объекта распространяется по прямым линиям. Интенсивность выходящего излучения $I(t)$ в направлении луча наблюдения L (рис. 1) в каждый произвольный момент времени представляет собой интеграл вдоль его траектории от локальных коэффициентов эмиссии:

$$I_L(t) = \int_L g(x, y, t) dL.$$

В рассматриваемой схеме интегральные проекции (синограммы) $I_L(t) \equiv f(\xi, p, t)$ регистрируются в системе параллельных лучей. Каждый луч задается углом ξ с осью OX и расстоянием p до начала координат O . В приближении оптически тонкого объекта проекции описываются классическим интегральным преобразованием Радона R , имеющим вид [1]:

$$f(\xi, p, t) = R\{g(x, y, t)\}. \quad (2)$$

По полученным в каждый произвольный момент времени проекциям для некоторого набора углов $\xi \in [0, \pi]$ и набора координат $p \in [-r, r]$ (r – характерный радиус объекта) можно получить оценку искомого решения интегрального уравнения (2) в виде

$$g(x, y, t) = R^{-1}\{f(\xi, p, t)\}, \quad (3)$$

где R^{-1} – приближение к обратному преобразованию Радона. В силу того что преобразование Радона действует только на пространственные переменные, преобразование Фурье по времени применимо к обеим частям выражения (3):

$$\tilde{g}(x, y, v) = R^{-1}\{\tilde{f}(\xi, p, v)\}. \quad (4)$$

Здесь и далее тильдой обозначено фурье-преобразование по времени. Зависимость от частоты функции $\tilde{g}(x, y, v)$ в каждой точке исследуемой области представляет собой спектр гармонических колебаний локальных коэффициентов. Представляет собой две отдельно расположенные в пространстве круговые гауссианы, совершающие синусоидальные колебания во времени с одинаковой частотой в противофазе друг другу (рис. 2, а). Модель описывается следую-

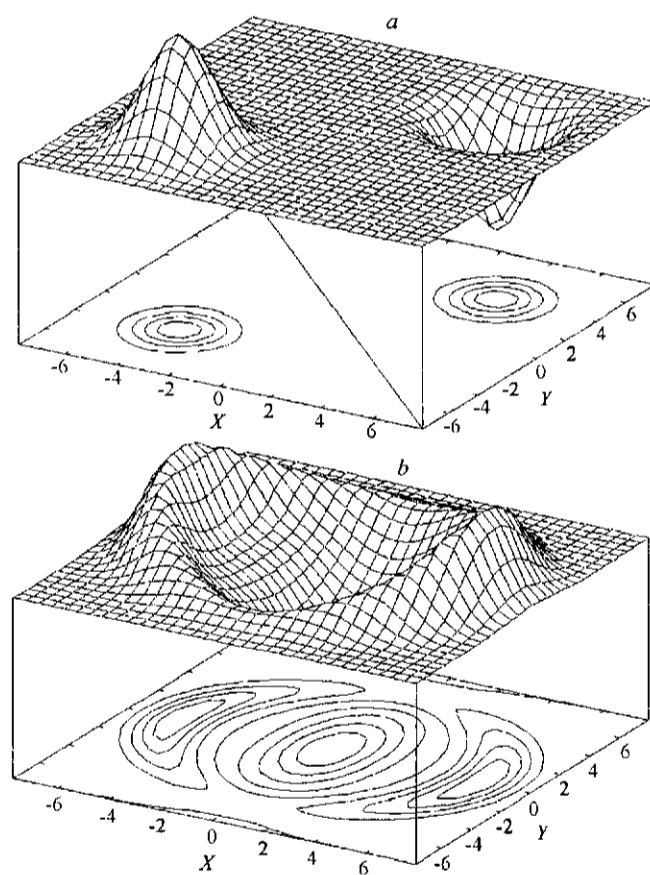


Рис. 2. Модели гармонических колебаний: 1 (а), 2 (б)

щей формулой:

$$g_1(x, y, t) = A \cos v_1 t \cdot \exp[-a^2(x-x_1)^2 - a^2(y-y_1)^2] - \\ - B \cos v_1 t \cdot \exp[-a^2(x-x_2)^2 - a^2(y-y_2)^2],$$

где a^{-1} – полуширина; A, B – амплитуды гауссиан; (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – координаты их центров; v_1 – частота. Вторая модель $g_2(x, y, t)$, имеющая частоту v_2 , (рис. 2, *b*) описывает структуру моды $m=2, n=1$ колебаний плазмы в токамаке [4]. В проведенных расчетах $r=8, x, y \in [-8, 8]$ на регулярной сетке с разбиением 33×33 узлов, $A=B=1, x_1=y_1=4, x_2=y_2=-4, a=4,5, v_1=3,8, v_2=7,6$. Моделировался колебательный процесс, представляющий суперпозицию двух мод гармонических колебаний, описываемых рассмотренными моделями. В последовательные моменты времени $t \in [0, 32]$ с шагом 1 рассчитывался массив данных $g(x, y, t) = g_1(x, y, t) + g_2(x, y, t)$. Начальный фрагмент его модуля показан на рис. 3, *a*.

Затем для каждой точки (x_0, y_0) выделялась зависимость функции $g(x_0, y_0, t)$ от времени. Методом быстрого преобразования Фурье вычислялся фурье-образ этой зависимости $\tilde{g}(x_0, y_0, v)$. На рис. 3, *b* показан спектр мощности (модуль) рассчитанного фурье-образа. Видно, что при дискретных значениях частоты, наиболее близких к v_1 (или v_2), компоненты функции $\tilde{g}(x, y, v)$ принимают максимальные значения, а их пространственная структура качественно совпадает со структурой соответствующей модели.

Далее по формуле преобразования Радона $\tilde{f}(\xi, p, v) = R\{\tilde{g}(x, y, v)\}$ вычислялись комплексные проекционные функции (фурье-образы синограмм) $\text{Im} \tilde{f}(\xi, p, v)$ и $\text{Re} \tilde{f}(\xi, p, v)$. Вычисления производились с использованием процедуры билинейной интерполяции в фурье-пространстве томограммы

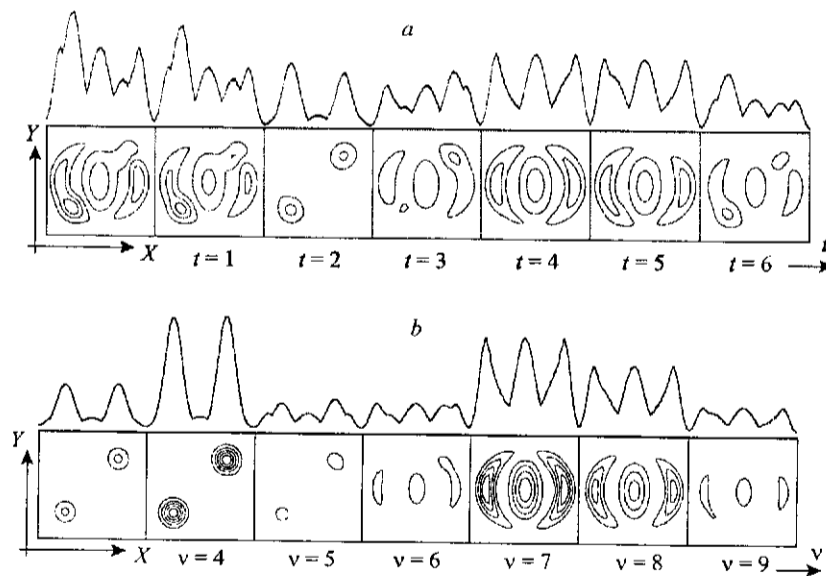


Рис. 3. Фрагменты функций $|g(x, y, t)|$ (*a*) и $|g(x, y, v)|$ (*b*)

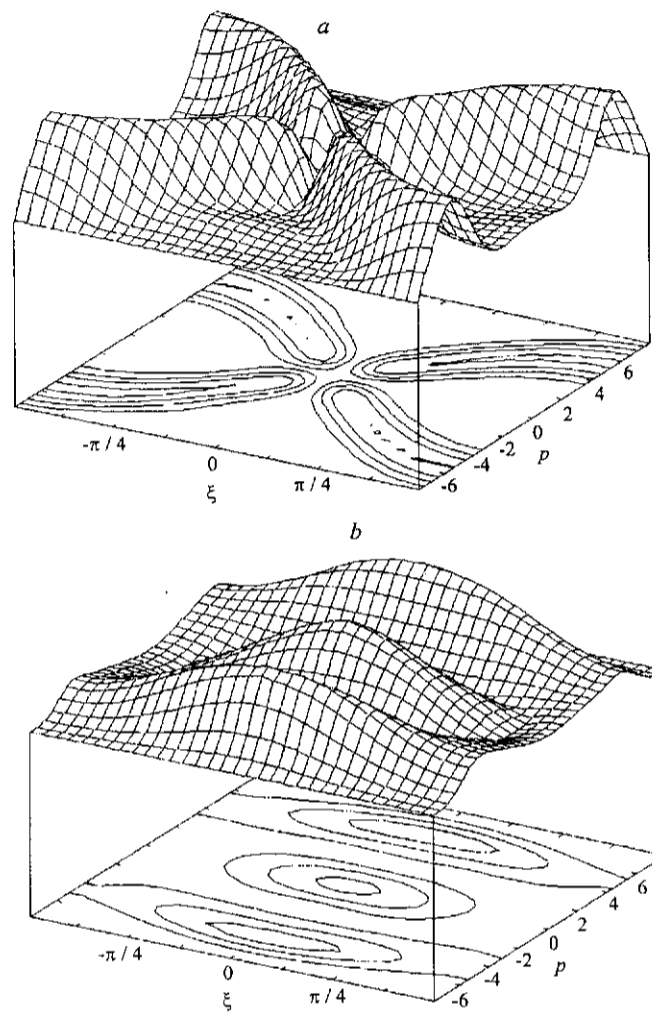


Рис. 4. Модули фурье-образов синогрмм моделей 1 (а) и 2 (б)

[3] на регулярном наборе линий (ξ, ρ) при числе детекторов $N = 33$ и числе ракурсов наблюдения $K = 33$. Модули полученных фурье-образов синогрмм показаны на рис. 4.

На следующем этапе моделировалась последовательность процесса измерения фурье-образов синогрмм по рассматриваемому методу в реальном эксперименте. Для каждого последовательного момента времени по формуле (2) рассчитывался массив временных синогрмм $f(\xi, \rho, t)$. В каждой точке пространства синогрмм (ξ_0, ρ_0) выделялась зависимость функции от времени и вычислялся ее фурье-образ $\tilde{f}(\xi_0, \rho_0, \nu)$. Сравнение показало, что $\tilde{f}(\xi, \rho, \nu)$ и $R\{\tilde{g}(x, y, \nu)\}$ совпадают с большой точностью, и в дальнейшем моделировании можно было использовать любую из двух рассмотренных последовательностей вычисления фурье-образов синогрмм.

Восстановление по полному спектру проекций. Реконструкция томограмм проводилась с помощью алгоритма Шеппа – Логана в пакете про-

грамм TOPAS – MICRO, разработанного для решения задач вычислительной томографии газа и плазмы [3]. Процедуре реконструкции подвергались компоненты фурье-образа синограммы $\text{Im} \tilde{f}(\xi, p, v)$ и $\text{Re} \tilde{f}(\xi, p, v)$, из которых получали соответственно мнимую и действительную части оценки временного фурье-образа томограммы $\tilde{g}(x, y, v)$. На рис. 5 показаны модули реконструированных комплексных томограмм, представляющие распределение энергии колебаний. Действительная и мнимая части оценки фурье-образа томограммы являются вещественными функциями, сохраняющими фазовую структуру соответствующей модели (см. рис. 2). Таким образом, из полного фурье-спектра проекций могут быть найдены локальная фазовая и энергетическая структуры исследуемых гармоник.

Результаты проведенного моделирования показывают, что двумерные структуры имеющихся моделей восстанавливаются достаточно хорошо. Следовательно, вышеописанная методика позволяет для излучающих объектов, связанных со стационарным распределением колебательного процесса, определять с приемлемой точностью их пространственную структуру.

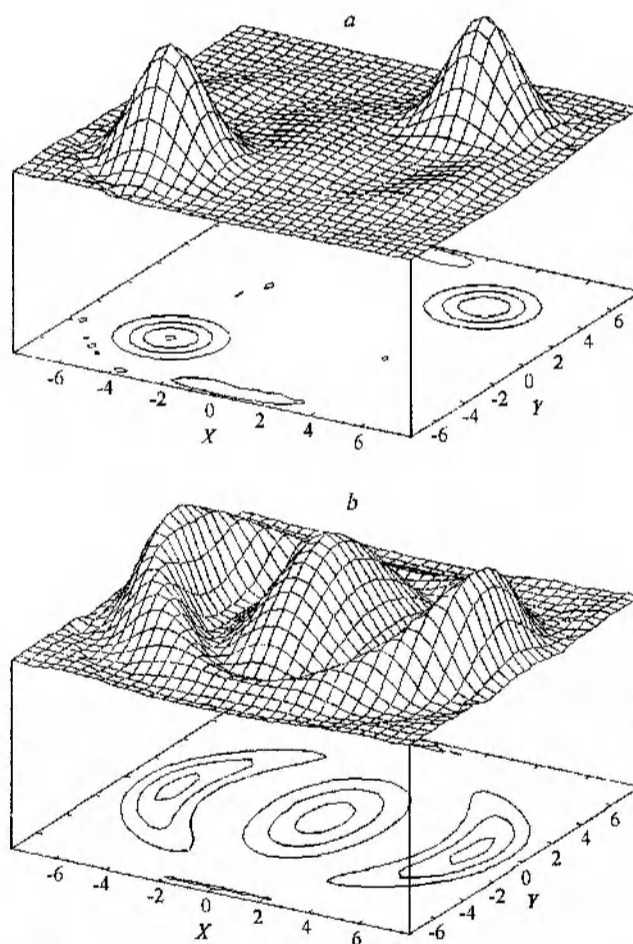


Рис. 5. Модули восстановленных фурье-образов томограмм моделей 1 (a) и 2 (b)

Восстановление по спектру мощности проекций. Существенная проблема может возникнуть при проведении реальных экспериментов по рассматриваемому методу. Она связана с измерением набора проекционных данных $\tilde{f}(\xi, p, \nu)$, представляющего собой комплексную зависящую от частоты функцию. На практике временное фурье-преобразование вышедшего из объекта излучения можно получить различными способами. В их числе применение в экспериментальной схеме анализаторов спектра – приборов, осуществляющих анализ спектра входных электрических сигналов в реальном времени. Однако использование в схеме измерений достаточно широко распространенного типа анализаторов [5], измеряющих только спектр мощности (модуль комплексного спектра) входного сигнала, не позволяет получить полный спектр. В общем случае восстановленная по спектру мощности проекционных данных томограмма не совпадает со спектром мощности исходной функции.

С целью изучения искажений, возникающих при обработке таких проекционных данных, были проведены дополнительные расчеты. Процедура реконструкции подвергались модули фурье-образов синограмм обеих моделей (см. рис. 4). Результаты реконструкции показаны на рис. 6. Полученные

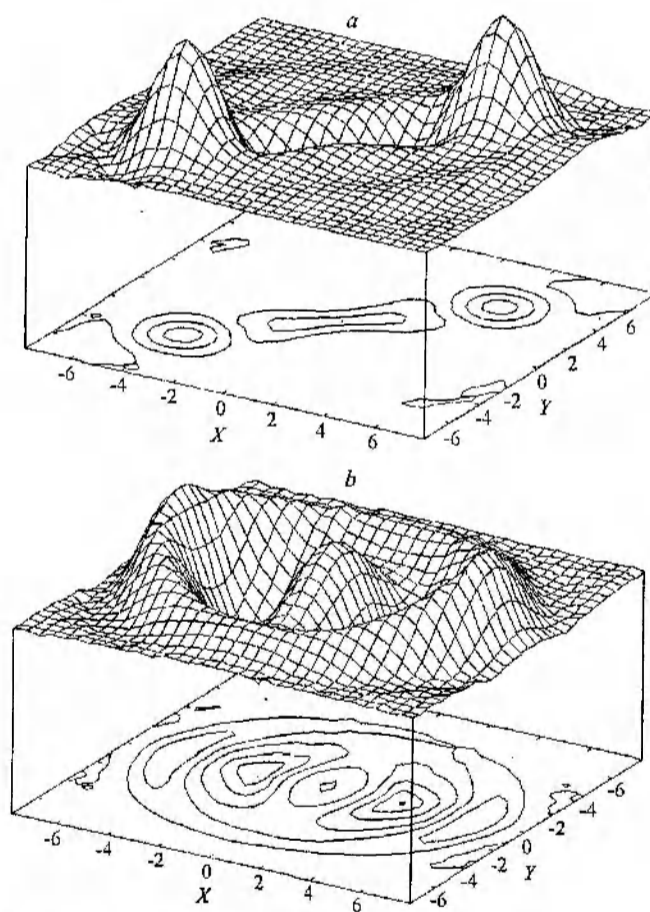


Рис. 6. Томограммы моделей 1 (а) и 2 (б), восстановленные из спектров мощности фурье-образов синограмм

томограммы представляют собой вещественные функции. Их структура отличается от модулей фурье-образов точных томограмм (см. рис. 5) главным образом наличием характерных «провалов» – областей с отрицательными значениями. Тем не менее геометрическая структура полученных томограмм в целом отражает особенности пространственной структуры тестовых объектов (см. рис. 2). Например, количество глобальных максимумов и их расположение можно определить на томограммах достаточно точно. Хотя подобные томограммы могут существенно отличаться по амплитудам от реальных распределений гармоник колебаний, они вполне пригодны для качественного анализа.

Погрешность восстановления томограммы теоретически можно уменьшить за счет восстановления значений спектра утраченной фазы проекционных данных по известному модулю их фурье-преобразования. Эта задача известна в литературе как фазовая проблема [6–8], для решения которой разработаны специальные методы и алгоритмы, требующие наличия дополнительной априорной информации об исследуемом объекте. Другой способ решения задачи колебательной эмиссионной томографии – это совершенствование систем детектирования проекционных данных (см., например, схемы, предлагаемые для задач вибро томографии [9]).

Заключение. В данной работе рассматривается метод измерения двумерной структуры колебаний в сложных средах – метод колебательной эмиссионной томографии. В его основе лежит эмиссионная томография излучающих объектов – исследование локальных характеристик по выходящему излучению. В работе проведено численное моделирование задач колебательной томографии. В вычислительном эксперименте использовались модели двух мод гармонических колебаний, обладающих различной пространственной структурой. Результаты показывают, что при измерении либо вычислении фурье-спектра проекционных данных получаются комплексные синограммы, соответствующие разным гармоникам колебаний. Восстановленные по этим синограммам двумерные фурье-образы томограмм с хорошей точностью отражают пространственные распределения исследуемых гармоник.

Значительные проблемы возникают, когда необходимо восстановить пространственное распределение колебаний из спектра мощности проекционных данных, а не из их полного фурье-преобразования. Существуют различные подходы к приближенному восстановлению фазы комплексной функции по ее амплитуде, применение которых, по-видимому, может помочь в дальнейшем развитии методов колебательной томографии. Использование в схеме регистрации интегральных проекций анализатора, измеряющего модуль комплексного спектра, без дополнительного извлечения фазы ограничивается лишь качественным анализом исследуемого распределения колебательного процесса.

В схеме трансмиссионной томографии рассмотренный метод применим для исследования пространственной структуры периодических процессов, протекающих в других средах, например, колебаний в твердых телах, вибрационных характеристик сложных механических конструкций. В настоящее время описанный метод применяется для исследования пространственной структуры ионно-звуковых колебаний в плазме ионного лазера [10].

Авторы выражают благодарность В. И. Донину за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
2. Левин Г. Г., Вишняков Г. Н. Оптическая томография. М.: Радио и связь, 1989.
3. Пикалов В. В., Мельникова Т. С. Томография плазмы. Новосибирск: Наука, 1995.
4. Navarro A. P., Paré V. K., Dunlap J. L. Two-dimensional spatial distribution of volume emission from line integral data // Rev. Sci. Instrum. 1981. **52**, N 11. P. 1634.
5. Аналоговые электроизмерительные приборы /Под. ред. А. А. Преображенского. М.: Высш. шк., 1979.
6. Обратные задачи в оптике /Под. ред. Г. П. Болтса. М.: Машиностроение, 1984.
7. Кузнецова Т. И. О фазовой проблеме в оптике // УФН. 1988. **154**, вып. 4. С. 677.
8. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. Восстановление и реконструкция изображений. М.: Мир, 1989.
9. Пат. 2114419 РФ. Способ радиационной вычислительной вибромографии /С. С. Шахиджанов. Оpubл. 27.06.98. БИ № 18. Ч. 2. С. 339.
10. Донин В. И., Иванов В. А., Яковин Д. В. Пространственная структура нижней моды ионно-звуковой неустойчивости плазмы сильноточного ионного лазера. Новосибирск, 2000. (Препр. ИАиЭ СО РАН; 486).

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,
ivanov@iclub.nsu.ru,
pickalov@itam.nsc.ru*

*Поступила в редакцию
19 апреля 2002 г.*