РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2002, том 38, № 5

УДК 519.23.233.3

Д. В. Шаповалов

(Томск)

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА КЛАССИФИКАЦИИ ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИИ–СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

Рассматривается задача классификации конечного числа процессов авторегрессии–скользящего среднего в неасимптотической постановке. Предлагается последовательная процедура классификации с гарантированной вероятностью правильного решения. Получена нижняя граница для вероятности правильной классификации и асимптотическая формула для средней длительности процедуры.

Введение. Хорошо известно ([1–3] и др.), что при решении прикладных задач, связанных с обработкой результатов измерений, распознаванием образов, классификацией сигналов различной природы, широко применяются процессы с дробно-рациональным спектром. К числу наиболее популярных стационарных процессов такого типа относится процесс авторегрессии–скользящего среднего (АРСС). Интерес к модели АРСС объясняется тем, что во многих случаях она дает адекватное описание наблюдений при небольшом числе параметров [4]. Теория статистических выводов для моделей авторегрессионного типа разработана достаточно полно ([1, 5] и др.): предложено множество процедур классификации и критериев проверки разнообразных гипотез. Как правило, общим для этих процедур является построение некоторой решающей статистики, на основании асимптотических свойств которой принимается решение в пользу той или иной гипотезы. Однако в реальных задачах свойства статистик, вычисленных по выборке конечного объема, могут сильно отличаться от асимптотических. В связи с этим представляет интерес задача гарантированной классификации в неасимптотической постановке (когда объем выборки конечен). Эта проблема изучалась в [6–8], где был предложен подход, связанный со специальным выбором моментов прекращения наблюдений в зависимости от заданной вероятности правильной классификации.

В данной работе этот подход развивается применительно к задаче гарантированного различения конечного числа процессов авторегрессии–скользящего среднего. Предполагается, что для каждой из альтернативных гипотез авторегрессионные параметры процессов известны, а помехи удовлетворяют обычным требованиям на распределение шума (существование вторых моментов). Распределение помех считается неизвестным. Описание процедуры классификации приводится в разд. 1. В разд. 2 исследуются свойства построенной процедуры.

1. **Постановка задачи. Процедура классификации.** Пусть относительно наблюдаемого процесса $\{x_k\}$ имеется s гипотез $H_1, \ldots, H_s$, одна из которых истинна. Согласно гипотезе H_i процесс $\{x_k\}$ является процессом АРСС(p, q):

$$x_k = a_1^i x_{k-1} + \ldots + a_p^i x_{k-p} + b_0^i \varepsilon_k + \ldots + b_q^i \varepsilon_{k-q}, \quad k \geq q + 1. \tag{1}$$

Здесь $\{\varepsilon_k\}$ – ненаблюдаемая последовательность независимых одинаково распределенных (НОР) случайных величин с $E\varepsilon_k = 0$, $E\varepsilon_k^2 = 1$; вектор начальных значений $(x_q, \ldots, x_{q-p+1})$ и процесс $\{\varepsilon_k\}$ независимы; a_j^i, b_l^i – параметры процесса. Предполагается, что каждой гипотезе H_i отвечает свой вектор авторегрессионных параметров $a^i = (a_1^i, \ldots, a_p^i)'$ (штрих обозначает транспонирование), т. е. $H_i \neq H_j$, если $a^i \neq a^j$. Причем параметры a_j^i считаются известными, а параметры b_l^i таковы, что дисперсия шума

$$\xi_k^i = b_0^i \varepsilon_k + \ldots + b_q^i \varepsilon_{k-q} \tag{2}$$

процесса (1) ограничена сверху известной постоянной δ_i, т. е.

$$E(\xi_k^i)^2 = \sum_{l=0}^{q} (b_l^i)^2 \leq \delta_i, \qquad i = \overline{1, s}. \tag{3}$$

Задача состоит в том, чтобы по наблюдениям процесса x_k построить процедуру классификации с заданной вероятностью правильного решения.

Для решения поставленной задачи используем последовательный критерий, предложенный в [7] для классификации процессов с зависимыми помехами. Согласно этому критерию введем систему статистик следующего вида:

$$\varphi_{ij}(h) = \frac{1}{h} \sum_{k=q+1}^{\tau_{ij}}{}' \Delta_k^{ij} (x_{k+q+1} - a_1^j x_{k+q} - \ldots - a_p^j x_{k-p+1}),$$
$$1 \leq i,\ j \leq s,\ i \neq j, \tag{4}$$

где τ_{ij} – моменты остановки, определяемые по формулам

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(h) = \inf\left\{ m > q\colon \sum_{k=q+1}^{m} (\Delta_k^{ij})^2 \geq h \right\}; \tag{5}$$

$h > 0$ – параметр процедуры;

$$\Delta_k^{ij} = (a_1^i - a_1^j) x_k + \ldots + (a_p^i - a_p^j) x_{k-p+1}.$$

Штрих у знака суммы в (4) означает, что последнее слагаемое берется с весом $\alpha_{ij}(h)$, определяемым из уравнения

$$\sum_{k=q+1}^{\tau_{ij}-1}(\Delta_k^{ij})^2+\alpha_{ij}(h)(\Delta_{\tau_{ij}}^{ij})^2=h.$$

По системе статистик $\varphi_{ij}(h)$ выносится решение π_l об истинности гипотезы H_l, если для всех $i \neq l$ $\varphi_{il}(h)<1/2$. В случае, когда указанное условие не выполняется, принимается решение о продолжении наблюдений.

Общая длительность процедуры классификации определяется величиной

$$\tau(h)=\max_{i\neq j}\tau_{ij}(h), \quad i,j=\overline{1,s}. \tag{6}$$

2. **Свойства процедуры классификации.** Перейдем к изучению свойств построенной процедуры классификации (4)–(6) процессов авторегрессии–скользящего среднего. При этом предположим, что для каждой из гипотез H_i выполнены условия:

а) процесс (1) является устойчивым, т. е. все корни характеристического полинома

$$P_i(z)=z^p-a_1^iz^{p-1}-\ldots-a_p^i$$

по модулю меньше единицы;

б) для каждого $i=\overline{1,s}$ полином $P_i(z)$ не имеет общих корней с полиномами $Q_i(z)$ и $z^qQ_i(z^{-1})$, где

$$Q_i(z)=b_0^iz^q+b_1^iz^{q-1}+\ldots+b_q^i.$$

Данные требования являются достаточно общими, и они часто предполагаются в различных задачах. Требование «а» обеспечивает стационарность процесса (1), а условие «б» носит исключительно технический характер.

Далее нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. Пусть выполнены условия «а», «б» и $\{\varepsilon_k\}$ – последовательность НОР случайных величин с $E\varepsilon_k=0$, $E\varepsilon_k^2=1$. Тогда при справедливости гипотезы H_l для векторного процесса $X_k=(x_k,\ldots,x_{k-p+1})'$ с вероятностью единица имеют место предельные соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=q+1}^{n}X_kX'_{k+i}=R_l(i), \quad i=0,\pm1,\ldots, \tag{7}$$

причем матрица $R_l(0)$ положительно определена.

Доказательство этой леммы подобно доказательству теоремы 5.5.2 из [1] и в данной работе опускается. Следующий результат устанавливает, что последовательная процедура (4)–(6) позволяет различить процессы АРСС за конечное время с заданной вероятностью правильной классификации.

Теорема 1. В условиях леммы 1 при истинности гипотезы H_l для любого $h>0$ процедура классификации (4)–(6) обладает свойствами:

а) $\tau(h)<\infty$ почти наверное;

б) вероятность правильной классификации $P_l(\pi_l)$ удовлетворяет неравенству

$$P_l(\pi_l)\geq 1-\frac{4(s-1)(q+1)\delta_l}{h+4(q+1)\delta_l}, \tag{8}$$

где величина δ_l определена в (3), а P_l обозначает распределение процесса при условии, что справедлива гипотеза H_l.

Доказательство. Согласно (6) для справедливости утверждения «а» теоремы достаточно показать, что $\tau_{ij}(h)<\infty$ почти наверное для всех $i,j=\overline{1,s}$, $i\neq j$. Эти соотношения следуют непосредственно из определения моментов $\tau_{ij}(h)$ в (5) и леммы 1.

Установим (8). С помощью неравенства Буля для вероятности правильной классификации получаем оценку

$$P_l(\pi_l)=P_l(\varphi_{il}(h)<1/2 \text{ для всех } i\neq l)\geq 1-(s-1)\sum_{i\neq l}P_l(\varphi_{il}\geq 1/2). \tag{9}$$

Далее можно показать, что

$$P_l(\varphi_{il}(h)\geq 1/2)\leq\frac{4(q+1)\delta_l}{h+4(q+1)\delta_l}.$$

Отсюда и из соотношения (9) следует неравенство (8). Теорема 1 доказана.

В теореме 1 установлена конечность с вероятностью единица длительности процедуры классификации процессов АРСС. Изучим среднюю длительность процедуры (4)–(6).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $E\varepsilon_k^{2\beta}<\infty, E\|X_q\|^{2\beta}<\infty$, $X_q=(x_q,\ldots,x_{q-p+1})'$ для некоторого $\beta>2$. Тогда при истинности гипотезы H_l для средней длительности процедуры классификации (4)–(6) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{h\to\infty}\frac{E_l\tau(h)}{h}=T_l=\max_{i\neq j}T_{ij}^l, \tag{10}$$

где

$$T_{ij}^l=\frac{1}{(a^i-a^j)'R_l(0)(a^i-a^j)}; \tag{11}$$

$R_l(0)$ – матрица из (7); $a^i=(a_1^i,\ldots,a_p^i)'$ – вектор авторегрессионных параметров.

Доказательство. Для справедливости (10) достаточно, чтобы:

а) $\lim\limits_{h\to\infty}\frac{\tau(h)}{h}=T_l$ почти наверное;

б) семейство случайных величин $\{\tau(h)/h,\ h>0\}$ было равномерно интегрируемым.

Свойство «а» следует сразу же из определения момента $\tau(h)$ в (6) и предельного соотношения (7). Установим свойство «б». В силу (6) для этого достаточно показать, что

$$E_l \tau_{ij}^{\delta}(h) = \delta \int_0^{\infty} t^{\delta-1} P_l \left\{ \sum_{j=q+1}^{[t]} (\Delta_k^{ij})^2 < h \right\} dt =$$

$$= \delta \int_0^{\infty} t^{\delta-1} P_l \left\{ (a^i - a^j)' \sum_{j=q+1}^{[t]} X_k X_k' (a^i - a^j) < h \right\} dt \le m_{ij}^{\delta}(h) + J_{ij}(h), \quad (13)$$

где $[t]$ обозначает целую часть числа t;

$$m_{ij}(h) = q + \frac{2h}{(a^i - a^j)' R_l(0)(a^i - a^j)};$$

$$J_{ij}(h) = \delta \int_{m_{ij}(h)}^{\infty} t^{\delta-1} P_l \left\{ (a^i - a^j)' \sum_{j=q+1}^{[t]} (R_l(0) - X_k X_k')(a^i - a^j) > \right.$$

$$\left. > ([t]-q)(a^i - a^j)' R_l(0)(a^i - a^j)/2 \right\} dt.$$

С помощью леммы 1 можно показать, что интеграл $J_{ij}(h)$ сходится при $1<\delta<\beta/2$. Отсюда и из оценки (13) следует (12). Теорема 2 доказана.

В теореме 1 для вероятности правильной классификации получена нижняя граница, которая позволяет с запасом определить значение параметра h процедуры, обеспечивающее заданный уровень ошибки. Однако на практике может представлять интерес асимптотическое распределение решающих статистик $\varphi_{ij}(h)$, позволяющее получать аппроксимации для вероятности правильной классификации. В следующей теореме устанавливается асимптотическая нормальность статистик $\sqrt{h}\varphi_{ij}(h)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 1 и $E|\varepsilon_k|^{2+\delta} < \infty$, $E\|X_q\|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда при справедливости гипотезы H_l вектор статистик

$$\sqrt{h}\Phi_l(h) = \sqrt{h}(\varphi_{1l}(h), \ldots, \varphi_{l-1l}(h), \varphi_{l+1l}(h), \ldots, \varphi_{sl}(h))'$$

является асимптотически нормальным (при $h \to \infty$) с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $W(l)$ с элементами

$$w_{ij}(l) = (a^i - a^l)' \sum_{n=-q}^{q} R_l(n) \sum_{m=0}^{q-|n|} b_m^l b_{m+|n|}^l (a^j - a^l) \min\{T_{il}^l, T_{jl}^l\}, \quad i, j \neq l,$$

где $R_l(i)$, T_{il}^l определяются формулами (7), (11).

Доказательство. Представим статистику $\sqrt{h}\Phi_l(h)$ в виде

$$\sqrt{h}\Phi_l(h) = \Psi_l(h) + \Theta_l(h), \tag{14}$$

где

$$\psi_{il}(h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{k=q+1}^{t_{il}(h)} \Delta_k^{il} \xi_{k+q+1}^l,$$

$$\theta_{il}(h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \left(\sum_{k=q+1}^{\tau_{il}(h)}{}' \Delta_k^{il} \xi_{k+q+1}^l - \sum_{k=q+1}^{t_{il}(h)} \Delta_k^{il} \xi_{k+q+1}^l \right)$$

– i-е координаты векторов $\Psi_l(h)$ и $\Theta_l(h)$ соответственно; $t_{il}(h) = [T_{il}^l h]$, $i = \overline{1,s}$, $i \neq l$. В силу (14) для справедливости утверждения теоремы достаточно показать, что:

а) $\Psi_l(h) \Rightarrow N(0, W(l))$ при $h \to \infty$,

б) $P - \lim\limits_{h \to \infty} \Theta_l(h) = 0$.

Установим свойство «а». Рассмотрим линейную комбинацию

$$\Psi_l(h, \lambda) = \lambda' \Psi_l(h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{k=q+1}^{t(h)} \Delta_k \xi_{k+q+1}^l, \tag{15}$$

где λ – некоторый вектор из евклидова пространства размерности $s-1$;

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \Delta_k^{il} I_{\{k \leq t_{il}(h),\ i \neq l\}}; \qquad t(h) = \max_{i \neq l} t_{il}(h);$$

$I_{\{A\}}$ обозначает индикатор множества A. Покажем, что статистика $\Psi_l(h,\lambda)$ имеет асимптотически нормальное распределение при $h \to \infty$. Отметим сначала, что согласно (1) наблюдаемый процесс x_k допускает следующее представление:

$$x_k = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j^l \varepsilon_{k-j} + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i^l(k) x_{q-i}.$$

Причем коэффициенты γ_j^l и $\alpha_i^l(k)$ таковы, что $\sum\limits_{j\ge 0}\gamma_j^l<\infty$, $\alpha_i^l(k)\to 0$ при $k\to\infty$. Наряду с процессом x_k рассмотрим стационарные процессы

$$x_k^* = \sum_{j\ge 0}\gamma_j^l\varepsilon_{k-j}, \qquad x_k^*(m) = \sum_{j=0}^{m}\gamma_j^l\varepsilon_{k-j}, \tag{16}$$

где m – некоторое целое положительное число. Далее, используя обозначения

$$\Delta_k^{il}(m) = (a_1^i - a_1^l)x_k^*(m) + \ldots + (a_p^i - a_p^l)x_{k-p+1}^*(m),$$
$$\Delta_k(m) = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\Delta_k^{il}(m)I_{\{k\le t_{il}(h),\ i\ne l\}}, \tag{17}$$

перепишем статистику $\Psi_l(h,\lambda)$ в виде

$$\Psi_l(h,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{k=q+1}^{t(h)}\Delta_k(m)\xi_{k+q+1}^l + \frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{k=q+1}^{t(h)}(\Delta_k - \Delta_k(m))\xi_{k+q+1}^l.$$

Из (16), (17) следует, что процесс $\zeta_k(m) = \Delta_k(m)\xi_{k+q+1}^l$ является $(q+m+p)$-зависимым. Поэтому, применяя к процессу $\zeta_k(m)$ центральную предельную теорему для процессов с перемешиванием из [9], получаем

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{k=q+1}^{t(h)}\Delta_k(m)\xi_{k+q+1}^l \Rightarrow N(0,w(m)) \quad \text{при} \quad h\to\infty,$$

где

$$w(m) = \sum_{\substack{i=1\\ i\ne l}}^{s}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{s}\lambda_i\lambda_j(a^i - a^l)'\sum_{n=-q}^{q}R_l(n,m)\sum_{k=0}^{q-|n|}b_k^l b_{k+|n|}^l(a^j - a^l)\min\{T_{il}^l, T_{jl}^l\},$$

$$R_l(n,m)\to R_l(n) \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Отсюда согласно предложению 6.3.9 из [10] статистика $\Psi_l(h,\lambda)$ будет иметь асимптотически нормальное распределение, если показать, что для любого $\eta>0$

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{h\to\infty}P_l\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{k=q+1}^{t(h)}(\Delta_k - \Delta_k(m))\xi_{k+q+1}^l\right| > \eta\right\} = 0. \tag{18}$$

Используя определение $\Delta_k(m)$ в (17) и предельные соотношения

$$P - \lim_{k\to\infty}(x_k - x_k^*) = 0, \qquad P - \lim_{m\to\infty}x_k^*(m) = x_k^*,$$

Таблица 1

H_1	H_2	P_*	h	φ_{12}	φ_{21}	$\tau(h)$
$a_1 = 0{,}8$	$a_1 = -0{,}9$	0,9	216	0,5934	0,1707	13
$a_1 = 0{,}8$	$a_1 = -0{,}9$	0,95	456	1,1251	–0,1241	20
$a_1 = 0{,}8$	$a_1 = 0{,}1$	0,9	216	0,8652	0,0404	48
$a_1 = 0{,}8$	$a_1 = 0{,}1$	0,95	456	0,9604	–0,0420	85
$a_1 = 0{,}8$	$a_1 = 0{,}7$	0,9	216	0,8493	0,0471	2053
$a_1 = 0{,}8$	$a_1 = 0{,}7$	0,95	456	0,8547	0,0421	4333

нетрудно проверить справедливость (18). Таким образом, согласно критерию Крамера – Уолда

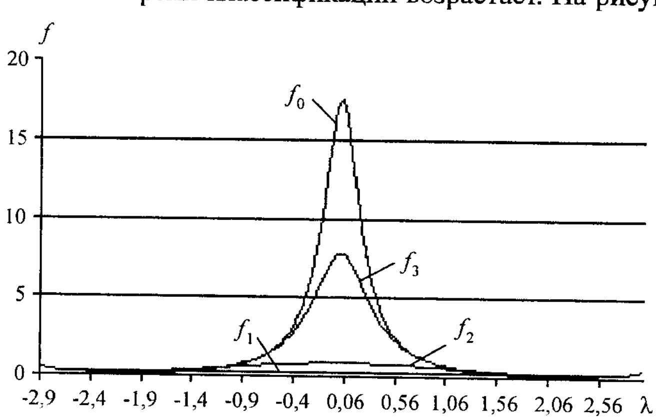
$$\Psi_l(h) \Rightarrow N(0, W(l)) \quad \text{при } h \to \infty.$$

Свойство «а» доказано. Свойство «б» может быть установлено с помощью метода, примененного при доказательстве теоремы 6.1 из [6]. Теорема 3 доказана.

3. **Результаты численного моделирования.** Чтобы проиллюстрировать свойства построенной процедуры классификации, моделировался процесс АРСС(1, 1) вида

$$x_k = 0{,}8x_{k-1} + 1{,}2\varepsilon_k + 0{,}9\varepsilon_{k-1}, \quad x_0 = 0, \quad k \ge 1,$$

где $\{\varepsilon_k\}$ – последовательность НОР гауссовских случайных величин с параметрами (0, 1). Относительно наблюдаемого процесса выдвигались две альтернативные гипотезы H_1, H_2. При этом предполагалось, что для каждой из гипотез дисперсия шума $E(\xi_k^i)^2 = (b_0^i)^2 + (b_1^i)^2 \le 3$. Результаты расчетов содержатся в табл. 1. Здесь P_* – нижняя граница для вероятности правильной классификации, соответствующая порогу h; φ_{12}, φ_{21} – значения решающих статистик; $\tau(h)$ – длительность процедуры классификации. Из табл. 1 видно, что с ростом вероятности правильной классификации и уменьшением различия между гипотезами время классификации возрастает. На рисунке пред-



Т а б л и ц а 2

H_1	H_2	P_*	h	$\bar{\tau}(h)$	Th	N
$a_1 = 0,8$	$a_1 = -0,9$	0,9	216	12,77	6,76	3
$a_1 = 0,8$	$a_1 = -0,9$	0,95	456	21,07	14,27	0
$a_1 = 0,8$	$a_1 = 0,1$	0,9	216	49,16	39,89	1
$a_1 = 0,8$	$a_1 = 0,1$	0,95	456	93,27	84,21	0
$a_1 = 0,8$	$a_1 = 0,7$	0,9	216	1923,37	1954,75	0
$a_1 = 0,8$	$a_1 = 0,7$	0,95	456	4129,23	4126,69	0

ставлены графики спектральных плотностей процесса АРСС(1, 1) для различных гипотез.

Гипотезе H_1 соответствует процесс АРСС со спектральной плотностью

$$f_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 \cos\lambda}{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos\lambda}, \qquad -\pi \le \lambda \le \pi,$$

где $a_1 = 0,8$, $b_0 = 1,2$, $b_1 = 0,9$. Спектральные плотности $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda)$ отличаются от $f_0(\lambda)$ значением параметра a_1, а именно: $a_1 = -0,9$ для $f_1(\lambda)$, $a_1 = 0,1$ для $f_2(\lambda)$ и $a_1 = 0,7$ для $f_3(\lambda)$.

В табл. 2 приводятся для сравнения оценки среднего числа наблюдений $\bar{\tau}(h)$, вычисленные по 100 реализациям процесса, и соответствующие теоретические значения Th, где T определяется формулой (10), а N – число ошибок при классификации. Данные табл. 2 подтверждают справедливость асимптотических формул для средней длительности процедуры. Более того, из табл. 2 и теоремы 3 видно, что оценка P_* является заниженной. Согласно теореме 3 для вероятности правильной классификации справедлива приближенная формула

$$P_1(\pi_1) = P_1(\varphi_{21}(h) < 1/2) \cong \Phi\left(\frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{w}}\right),$$

где $\Phi(u)$ – функция распределения стандартного нормального закона; $w = 4,189$.

Заключение. В работе рассмотрена задача гарантированного различения процессов авторегрессии–скользящего среднего. Предложена последовательная процедура классификации со специальными моментами прекращения наблюдений в зависимости от заданной вероятности правильной классификации. Исследованы асимптотические свойства процедуры.

Автор выражает благодарность профессору В. В. Коневу за ценные замечания и рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андерсон Т.** Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.

2. **Яглом А. М.** Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
3. **Ваттс Д., Дженкинс Г.** Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. Т. 1.
4. **Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974. Вып. 1.
5. **Хеннан Э.** Многомерные временные ряды. М.: Мир, 1974.
6. **Конев В. В.** Последовательные оценки параметров стохастических динамических систем. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985.
7. **Конева Е. С.** Последовательная классификация стохастических процессов при зависимых помехах // АиТ. 1986. № 2. С. 80.
8. **Дмитриенко А. А., Конев В. В.** О последовательной классификации процессов авторегрессии с неизвестной дисперсией помех // Проблемы передачи информации. 1995. **31**, вып. 4. С. 51.
9. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
10. **Brockwell P., Davis R.** Time Series: Theory and Methods. N. Y.: Springer, 1990.
11. **Кашьян Р. Л., Рао Л. Р.** Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. М.: Наука, 1983.

Томский государственный университет,
E-mail: dmitry@ic.tsu.ru

Поступила в редакцию
26 ноября 2001 г.