РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2002, том 38, № 5

УДК 681.5.015

А. В. Лапко, В. А. Лапко

(Красноярск)

ГИБРИДНЫЕ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Предлагается методика синтеза и анализа гибридных моделей стохастических зависимостей, позволяющих более полно использовать априорную информацию по сравнению с известными непараметрическими и локальными аппроксимациями. Определены их асимптотические свойства и условия компетентности.

Введение. При восстановлении многомерных стохастических зависимостей $y=\varphi(x)$ различают два типа исходной информации: структурные данные $\overset{\Delta}{D}$, которые отражают априорные представления $F(x,\alpha)$ о виде преобразования $\varphi(\cdot)$, и статистические $\widetilde{D}$, содержащие сведения о наблюдениях (x^i, y^i), $i=\overline{1,n}$. Например, в качестве $F(x,\alpha)$ может выступать модель искомой зависимости, которая по тем или иным причинам не удовлетворяет требованиям пользователя. Известные стохастические аппроксимации параметрического и непараметрического вида ориентированы в основном на определенный тип исходных данных, что при отличающихся априорных условиях приводит к снижению их эффективности. Так, если в параметрических моделях за основу принимаются сведения $\overset{\Delta}{D}$, то для непараметрических процедур оценивания $y=\varphi(x)$ достаточно знания лишь статистической выборки наблюдений $\widetilde{D}$ и некоторых качественных характеристик преобразования $\varphi(\cdot)$ (непрерывность, однозначность) [1]. В первом случае за счет преобразования выборки $\widetilde{D}$ в вектор достаточных статистик $\overline{\alpha}$ (оценки параметров α модели $F(x,\alpha)$) теряется полезная информация о локальном поведении зависимости $y=\varphi(x)$, что приводит к появлению систематической ошибки. Во втором – не учитываются априорные сведения $\overset{\Delta}{D}$ о виде $\varphi(\cdot)$.

Области компетентности рассматриваемых моделей изображены на схеме (рис. 1). Градации координатных осей условно соответствуют априорным данным $(\overset{\Delta}{D}, \widetilde{D})$ о восстанавливаемой зависимости $y=\varphi(x)$ по мере их конкретизации.

Рис. 1. Классификация моделей статических объектов

Несоответствие между исходной информацией ($\overset{\Delta}{D}, \tilde{D}$) и множеством статистических моделей, имеющихся в распоряжении исследователя, часто порождает неопределенности в выборе процедуры оценивания $y = \varphi(x)$. Один из возможных путей решения данной проблемы – разработка гибридных и самообучающихся моделей, позволяющих в наиболее полной мере использовать априорные сведения ($\overset{\Delta}{D}, \tilde{D}$) об исследуемой зависимости $y = \varphi(x)$ (см. рис. 1, область A_1) либо предварительно вскрывать их свойства $\overset{\Delta}{D}$ в результате анализа экспериментальных данных $\tilde{D}$ (область A_2). Гибридные модели представляют собой комплекс различных по назначению и методам синтеза решающих правил, состав и порядок функционирования которых определяются априорными сведениями о виде восстанавливаемой зависимости и объемом экспериментальных данных.

В общем случае такие модели записываются в виде

$$\overset{\Delta}{y} = \overset{\Delta}{\varphi}(x) = Q(\{\overline{F}(x)\}, \{\overline{q}(x)\}), \tag{1}$$

где последовательности возможных аппроксимаций $\overline{F}(x)$ зависимости $y = \varphi(x)$, оценки соотношений $\overline{q}(x) = f(\varphi(x), \overline{F}(x))$ и оператор сопряжения $Q(\cdot)$ между ними определяют структуру гибридных моделей. На возможность их построения указывалось в работе [2]. При синтезе гибридных моделей сначала определяется последовательность аппроксимаций $\{\overline{F}(x)\}$ зависимости $y = \varphi(x)$, которая затем организуется в коллектив типа (1).

Восстановление зависимости $y = \varphi(x)$ в условиях A_2 характеризуется отсутствием исходных сведений о непрерывности и однозначности $\varphi(\cdot)$ в заданном пространстве признаков x. Поэтому для преодоления априорной неопределенности о виде оператора $Q(\cdot)$ (1) при формировании иерархической структуры самообучающихся моделей используются алгоритмы автоматической классификации и распознавания образов, обеспечивающие выделение областей однозначности восстанавливаемой зависимости и порядок перехода в конкретной ситуации x от одной локальной модели $y=\varphi(x)$ к другой [3].

В работе рассматриваются проблемы синтеза и анализа гибридных моделей стохастических зависимостей. В отличие от известных в предлагаемых гибридных моделях оператор $Q(\cdot)$ в (1) определяет вид соотношения между стохастической аппроксимацией $\overline{F}(x)$ зависимости $y=\varphi(x)$ и непараметрической оценкой $\overline{q}(x)$ меры рассогласования между $\overline{F}(x)$ и $\varphi(x)$, т. е. меняется сама основа формирования коллектива решающих правил. Выбор той или иной аппроксимации $\overline{F}(x)$ зависит от структурных данных $\overset{\Delta}{D}$, а оценивание $\overline{q}(x)$ ориентировано на использование локальных сведений $\widetilde{D}$ о восстанавливаемой зависимости.

Методика построения гибридных моделей. Пусть при восстановлении однозначной зависимости $y=\varphi(x)\,\forall\, x\in R^k$ кроме выборки $V=(x^i,\ y^i,\ i=\overline{1,n})$ известны частичные сведения (либо принимается гипотеза) $\overset{\Delta}{D}$: $\langle F(x,\alpha)\rangle$ о виде преобразования $\varphi(x)$ с точностью до набора параметров $\alpha\in R^m$.

Увеличение объема априорной информации и требование наиболее полного ее использования в задаче идентификации позволяют расширить область применения принципов теории обучающихся систем. Один из эффективных подходов к решению указанной проблемы состоит в предварительном исследовании аппроксимационных свойств параметрической модели $F(x,\overline{\alpha})$ зависимости $y=\varphi(x)$ путем вычислительного эксперимента на статистических данных V для формирования «рабочей» выборки $V1=(x^i,\ q(x^i),\ i=\overline{1,n})$. По полученной информации $V1$ восстанавливается зависимость $q(x)$, представляющая собой функцию невязки между $F(x,\overline{\alpha})$ и $\varphi(x)$, с помощью непараметрической процедуры. Гибридная модель формируется как некоторая комбинация $F(x,\overline{\alpha})$ и $\overline{q}(x)$.

Примем $q(x)=\varphi(x)-F(x,\overline{\alpha})$ либо $q(x)=\varphi(x)/F(x,\overline{\alpha})$, тогда гибридная модель запишется соответственно в виде

$$\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}=F(x,\overline{\alpha})+\overline{q}(x),\qquad \overset{\Delta}{y}_{\Pi}=\overline{q}(x)F(x,\overline{\alpha}).\tag{2}$$

Оценивание компонент вектора α в параметрической модели $F(x,\alpha)$ зависимости $y=\varphi(x)$ осуществляется по выборке $(x^i,\ y^i,\ i=\overline{1,n})$, а преобразований $q(x)$ – по значениям «рабочей» выборки $(x^i,\ q(x^i),\ i=\overline{1,n})$ с помощью непараметрической регрессии [1, 3]:

$$\overline{q}(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}q(x^i)\beta(x^i,\ x)}{\sum_{i=1}^{n}\beta(x^i,\ x)},\tag{3}$$

$$\beta(x^i,\ x)=\prod_{j=1}^{k}\Phi\left(\frac{x_j-x_j^i}{c_j}\right),$$

где значения $q(x^i)$, $i=\overline{1,n}$, формируются в зависимости от выбранного типа гибридной модели (2) по формулам

$$q_{\Sigma}(x^i)=y^i-F(x^i,\ \bar{\alpha}),$$

$$q_{\Pi}(x^i)=\frac{y^i}{F(x^i,\ \bar{\alpha})}.$$

Ядерные функции $\Phi\left(\frac{x_j-x_j^i}{c_j}\right)$ в статистике (3) соответствуют компонентам вектора $(x_j,\ j=\overline{1,k})$ и удовлетворяют условиям H [1, 3]:

$$\begin{aligned}
&0\le\Phi(u)<\infty, &&\Phi(-u)=\Phi(u),\\
&\int\Phi(u)du=1, &&\int u^2\Phi(u)du=1,\\
&\int u^m\Phi(u)du<\infty &&\text{при } 0\le m<\infty.
\end{aligned} \tag{4}$$

(Здесь и далее бесконечные пределы интегрирования не указываются.)

Коэффициенты размытости c_j, $j=\overline{1,k}$, ядерных функций определяются из условия минимума статистической оценки среднеквадратического критерия точности аппроксимации $q(x)$ непараметрической регрессией (3).

Кроме отмеченных выше преимуществ гибридных моделей типа (2), следует отметить снижение требований к точности оценивания параметров α по сравнению с параметрическими моделями, так как увеличение их ошибок аппроксимации компенсируется при восстановлении функции невязки $\bar{q}(x)$.

Исследование асимптотических свойств гибридных моделей. Рассмотрим задачу оценивания $y=\varphi(x)\ \forall\, x\in R^1$ по выборке независимых и идентично распределенных случайных величин $(x^i,\ y^i,\ i=\overline{1,n})$ при известной плотности вероятности $p(x)$.

Предположим, что $p(x)$ ограничена и непрерывна со всеми своими производными до порядка m включительно, причем $\int(p^{(m)}(x))^2dx<\infty$. Эти условия, накладываемые на $p(x)$, обозначим через G_m.

Тогда справедлива

Теорема 1. Пусть:

а) $\varphi(x)$, $F(x,\alpha)$ и $p(x)\neq 0$ в области определения $y=\varphi(x)$ удовлетворяют условиям G_2;

б) функция $\Phi(u)\in H$ и $c^{-1}\int y\Phi((y-y^i)/c)dy=y^i$;

в) последовательность коэффициентов размытости ядерных функций $c=c(n)\to 0$ при $n\to\infty$, а $nc\to\infty$. Тогда гибридная модель $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}=\overset{\Delta}{\varphi}_{\Sigma}(x)=$ $=F(x,\bar{\alpha})+\bar{q}_{\Sigma}(x)$ обладает свойствами:

1) асимптотической несмещенности,

2) состоятельности.

Доказательство. 1. По определению имеем

$$\mathrm{M}(\varphi(x)-\overset{\Delta}{\varphi}_{\Sigma}(x))=\varphi(x)-F(x,\overline{\alpha})-\mathrm{M}(\overline{q}_{\Sigma}(x))=$$

$$=q_{\Sigma}(x)-(cp(x))^{-1}\int q_{\Sigma}(t)\Phi\left(\frac{x-t}{c}\right)p(t)dt,$$

где $\mathrm{M}(\cdot)$ – знак математического ожидания.

Проведем в интеграле замену переменных $cu=x-t$ и, разлагая функции $q_{\Sigma}(x-cu)$, $p(x-cu)$ в ряд Тейлора в точке x, с учетом ограничений на $\Phi(u)$ согласно предположению «в» теоремы 1 получим

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{M}(\varphi(x)-\overset{\Delta}{\varphi}_{\Sigma}(x))=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(q_{\Sigma}(x)p(x))^{(2)}c^2}{2p(x)}+O(c^4)\right]=0, \qquad (5)$$

где $(\cdot)^{(2)}$ – вторая производная по x произведения функций в скобках.

2. Для доказательства утверждения 2 теоремы представим дисперсию $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}$ в следующем виде:

$$D(\overset{\Delta}{\varphi}(x))=\mathrm{M}(\varphi(x)-\overset{\Delta}{\varphi}_{\Sigma}(x))^2-[\mathrm{M}(\varphi(x)-\overset{\Delta}{\varphi}_{\Sigma}(x))]^2.$$

Вычислим среднеквадратическое отклонение

$$\mathrm{M}(\varphi(x)-\overset{\Delta}{\varphi}_{\Sigma}(x))^2=\varphi^2(x)-2\varphi(x)\mathrm{M}(\overset{\Delta}{\varphi}_{\Sigma}(x))+F^2(x,\overline{\alpha})=$$

$$=2F(x,\overline{\alpha})\mathrm{M}(\overline{q}_{\Sigma}(x))+n^{-1}(cp(x))^{-2}\int\left(q_{\Sigma}(t)\Phi\left(\frac{x-t}{c}\right)p(t)\right)^2dt+$$

$$+\frac{(n-1)}{n}(cp(x))^{-2}\left(\int q_{\Sigma}(t)\Phi\left(\frac{x-t}{c}\right)p(t)dt\right)^2.$$

После несложных преобразований нетрудно определить, что

$$\mathrm{M}(\varphi(x)-\overset{\Delta}{\varphi}_{\Sigma}(x))^2=\frac{q_{\Sigma}^2(x)\|\Phi(u)\|^2}{ncp(x)}+\frac{c^4[(q_{\Sigma}(x)p(x))^{(2)}]^2}{4p^2(x)}+O(c^6), \qquad (6)$$

где $\|\Phi(u)\|^2=\int\Phi^2(u)du$. Отсюда при $n\to\infty$ следует справедливость теоремы.

Теорема 2. Пусть функции $\varphi(x)$, $q_{\Pi}(x)$, $p(x)\neq 0$ удовлетворяют условиям G_2 и выполняются предположения «б», «в» теоремы 1. Тогда гибридный алгоритм $\overset{\Delta}{y}_{\Pi} = \overset{\Delta}{\varphi}_{\Pi}(x) = F(x,\overline{\alpha})q_{\Sigma}(x)$ обладает свойствами асимптотической несмещенности и состоятельности.

Методика доказательства теоремы аналогична предыдущей, поэтому, опуская промежуточные выкладки, приведем конечные результаты, подтверждающие сформулированные выше утверждения:

$$\mathrm{M}(\varphi(x) - \overset{\Delta}{\varphi}_{\Pi}(x)) = \frac{F(x,\overline{\alpha})c^2}{2p(x)}(q_{\Pi}(x)p(x))^{(2)} + O(c^4),$$

$$\mathrm{M}(\varphi(x) - \overset{\Delta}{\varphi}_{\Pi}(x))^2 = \frac{\varphi^2(x)\|\Phi(u)\|^2}{ncp(x)} + \frac{F^2(x,\overline{\alpha})c^4[(q_{\Pi}(x)p(x))^{(2)}]^2}{4p^2(x)} + O(c^6). \quad (7)$$

Сравнение аппроксимационных свойств $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}$ и непараметрической регрессии $\overline{y}$. Рассмотрим отношение среднеквадратических отклонений

$$R^{\Sigma}(x) = \frac{\mathrm{M}(\varphi(x) - \overset{\Delta}{\varphi}_{\Sigma}(x))^2}{\mathrm{M}(\varphi(x) - \overline{\varphi}(x))^2}, \quad (8)$$

где

$$\overline{y} = \overline{\varphi}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y^i \Phi\left(\frac{x - x^i}{c}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{x - x^i}{c}\right)}$$

– непараметрическая регрессия [1].

С целью определения преимущества $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}$ перед $\overline{y}$ рассмотрим условия выполнения соотношения $R^{\Sigma}(x) < 1$. Для этого вычислим $R^{\Sigma}(x)$ при оптимальных значениях коэффициентов размытости c_{Σ}^0, c^0 непараметрических моделей $\overline{q}_{\Sigma}(x)$ и $\overline{\varphi}(x)$, минимизирующих асимптотические выражения среднеквадратических отклонений $\overline{q}_{\Sigma}(x)$ и $\overline{\varphi}(x)$ от $q_{\Sigma}(x)$, $\varphi(x)$ соответственно.

Можно показать, например, что

$$c_{\Sigma}^0 = [q_{\Sigma}^2(x)\|\Phi(u)\|^2 / p(x)n((q_{\Sigma}(x)p(x))^{(2)})^2]^{1/5}. \quad (9)$$

Преобразуя (8) с учетом (9) и c^0, получим

$$R^{\Sigma}(x) \sim \left[\left(\frac{q_{\Sigma}(x)}{\varphi(x)}\right)^4 \frac{(q_{\Sigma}(x)p(x))^{(2)}}{(\varphi(x)p(x))^{(2)}}\right]^{2/5}.$$

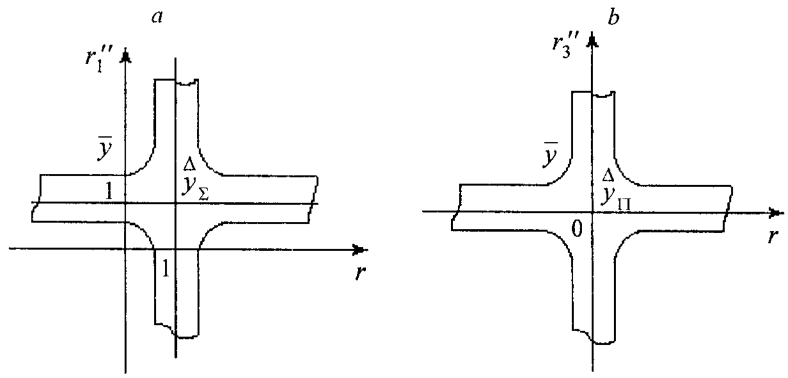

Рис. 2. Границы компетентности гибридных моделей $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}$ (*a*), $\overset{\Delta}{y}_{\Pi}$ (*b*) и непараметрической регрессии $\bar{y}$. Область преимущества гибридных моделей ограничена кривыми

Следовательно, гибридная модель имеет более высокие аппроксимационные свойства по сравнению с непараметрической регрессией $\bar{y}$ в некоторой точке x при выполнении соотношений:

$$1-(1-r)^{-4} < r_1'' < 1+(1-r)^{-4}, \quad \text{если} \quad p(x)=\text{const},$$

$$1-r^{-4} < r_2'' < 1+r^{-4}, \quad \text{если} \quad p(x) \text{ линейна,} \tag{10}$$

где

$$r = \frac{F(x,\bar{\alpha})}{\varphi(x)}, \qquad r_1'' = \frac{F^{(2)}(x,\bar{\alpha})}{\varphi^{(2)}(x)},$$

$$r_2'' = \frac{F^{(2)}(x,\bar{\alpha})p(x) + 2F^{(1)}(x,\bar{\alpha})p^{(1)}(x)}{\varphi^{(2)}(x)p(x) + 2\varphi^{(1)}(x)p^{(1)}(x)}.$$

Соотношение (10) определяет область преимущества $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}$ перед $\bar{y}$ в пространстве $(r,\ r_1'')$ (рис. 2, *a*).

Если $F(x,\bar{\alpha})$ линейна относительно x, то $R^{\Sigma}(x)=1$ в области определения $y=\varphi(x)$, т. е. аппроксимационные свойства $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}$ и $\bar{y}$ не различаются.

Сравнение $\overset{\Delta}{y}_{\Pi}$ и $\bar{y}$. Вычислим при оптимальных значениях коэффициентов размытости c^0, c_{Π}^0 непараметрической регрессии $\bar{y}$ и оценки функции невязки $\bar{q}_{\Pi}(x)$ отношение типа (8), получим

$$R^{\Pi}(x) \sim \left[\frac{F(x,\bar{\alpha})(q_{\Pi}(x)p(x))^{(2)}}{(\varphi(x)p(x))^{(2)}}\right]^{2/5}.$$

Определим условия, при которых выполняется соотношение $R^{\Pi}(x) < 1$ (рис. 2, b):

$$-r_1^{-1} < r_3'' < r_1^{-1}, \quad \text{если} \;\; p(x) = \text{const},$$

$$-r^{-4} < r_4'' < r^{-4}, \quad \text{если} \;\; p(x) \text{ линейна},$$

где

$$r_3'' = q_{\Pi}^{(2)}(x), \qquad r_1 = \frac{\varphi^{(2)}(x)}{F(x, \overline{\alpha})},$$

$$r_4'' = F(x, \overline{\alpha}) \frac{q_{\Pi}^{(2)}(x) p(x) + 2 q_{\Pi}^{(1)}(x) p^{(1)}(x)}{\varphi^{(2)}(x) p(x) + 2 p^{(1)}(x) \varphi^{(1)}(x)}.$$

Сравнение гибридных моделей $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}$ и $\overset{\Delta}{y}_{\Pi}$. Проводя анализ асимптотических среднеквадратических отклонений для $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}$ и $\overset{\Delta}{y}_{\Pi}$ в соответствии с принятым критерием $R_{\Pi}^{\Sigma}(x) < 1$, можно установить наличие условий преимущества $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}$ перед $\overset{\Delta}{y}_{\Pi}$ (рис. 3):

$$-(1 - r)^{-4} < r_5'' < (1 - r)^{-4}, \quad \text{если} \;\; p(x) = \text{const},$$

$$-r_2^{-4} < r_6'' < r_2^{-4}, \quad \text{если} \;\; p(x) \text{ линейна}, \tag{11}$$

где $r_2 = \dfrac{q_{\Sigma}(x)}{q_{\Pi}(x)}$, $r_5'' = \dfrac{q_{\Sigma}^{(2)}(x)}{F(x, \overline{\alpha}) q_{\Pi}^{(2)}(x)}$, а r_6'' может быть получено из r_2'' (10) путем замены производных $F(x, \overline{\alpha})$ и $\varphi(x)$ на производные функций невязок $q_{\Sigma}(x)$ и $q_{\Pi}(x)$ соответственно.

Аналогичными рассуждениями находятся условия преимущества предложенных гибридных моделей при анализе отношения их интегральных ошибок аппроксимации. Например, при $p(x) = \text{const}$ условие

$$\frac{\left\| F^{(2)}(x, \overline{\alpha}) - \varphi^{(2)}(x) \right\|^2}{\left\| \varphi^{(2)}(x) \right\|^2} < \left(\frac{\left\| F(x, \overline{\alpha}) - \varphi(x) \right\|^2}{\left\| \varphi(x) \right\|^2} + 1 \right)^{-4} \tag{12}$$

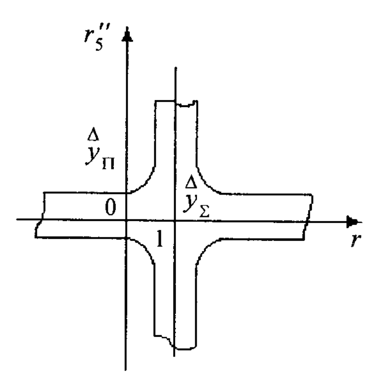

Рис. 3. Границы компетентности гибридных моделей $\overset{\Delta}{y}_{\Sigma}$ и $\overset{\Delta}{y}_{\Pi}$

обеспечивает справедливость соотношения

$$M\left\|\overset{\Delta}{\varphi}_{\Sigma}(x)-\varphi(x)\right\|^2 \Big/ M\|\bar{\varphi}(x)-\varphi(x)\|^2<1.$$

Вид условия (12) облегчает задачу его оценивания при практическом использовании результатов исследования.

Выводы аналитического исследования подтверждаются результатами статистического моделирования при конечных объемах выборок экспериментальных данных. С ростом уровня аддитивных помех ε, накладываемых на значения y, ошибки аппроксимации увеличиваются. Причем менее чувствителен (в 2–3 раза) к возрастанию величины ε гибридный алгоритм $\overset{\Delta}{y}_{\Pi}$.

Модификации гибридных моделей. Пусть относительно однозначной зависимости

$$y=\varphi(x)\,\forall\, x\in R^k \tag{13}$$

известны модель ее частичного описания

$$\bar{y}_1=F(x(1),\bar{\alpha})\,\forall\, x(1)\in R^{k1},\quad k1<k,$$

и выборка $V=(x^i,\ y^i,\ i=\overline{1,n})$ экспериментальных данных, составленная из статистически независимых наблюдений (x,y) искомой зависимости (13).

На практике подобные условия соответствуют расширению возможностей системы контроля статических объектов, описываемых зависимостью (13), от измерения параметров $x(1)=(x_\nu,\ \nu=\overline{1,k1})$ до $x=(x(1),x(2))$, $x(2)=$ $=(x_\nu,\nu=\overline{k1+1,k})$.

Следуя методике синтеза гибридных моделей, сформируем выборку $V2=(x^i(2),\ q(x^i(2)),\ i=\overline{1,n})$, где функция невязок $q(x(2))$ определяет степень расхождения между значениями y и ее частичным описанием в пространстве переменных $x(2)$.

Для восстановления $q(x(2))$ по выборке $V2$ воспользуемся непараметрической регрессией $\bar{q}(x(2))$ типа (3). Тогда гибридная модель зависимости (13) представляется статистикой

$$\bar{\bar{y}}(x)=F(x(1),\bar{\alpha})+\bar{q}(x(2)), \tag{14}$$

каждая составляющая которой определяется своим набором переменных $x(1),x(2)$.

Ближайшим аналогом рассматриваемого подхода являются результаты работы [4].

Свойства гибридной модели (14) определяются следующим утверждением.

Теорема 3. Пусть:

а) восстанавливаемая зависимость $y=\varphi(x)$ представима суммой однозначных функций $\varphi(x)=\varphi_1(x(1))+\varphi_2(x(2))$;

б) функции $\varphi_1(x(1))$, $\varphi_2(x(2))$ и плотности вероятностей $p(x)$, $p(x(1))$, $p(x(2))$ ограничены вместе со своими производными до второго порядка включительно;

в) $\Phi(u)$ относятся к классу положительных, симметричных и нормированных функций;

г) последовательность коэффициентов размытости $c(n) \geq 0$ такова, что при $n \to \infty$ значения $c(n) \to 0$, а $nc(n) \to \infty$. Тогда, если аппроксимация $F(x(1), \overline{\alpha})$ обладает свойствами асимптотической несмещенности и сходимости в среднеквадратическом к $\varphi_1(x(1))$, такие же свойства имеет и гибридная модель $\bar{\bar{y}}(x)$.

Достаточно строгие ограничения, представленные в условии «а» теоремы 3, могут быть сняты путем использования в качестве решающего правила при формировании гибридной модели непараметрической оценки условного математического ожидания

$$\bar{\bar{y}}(x) = \sum_{i=1}^{n} y^i \beta_i(x), \tag{15}$$

где

$$\beta_i(x) = \frac{\prod\limits_{\nu=k1+1}^{k} \Phi\left(\frac{x_\nu - x_\nu^i}{c_\nu}\right) \Phi\left(\frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_1^i}{c}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{\nu=k1+1}^{k} \Phi\left(\frac{x_\nu - x_\nu^i}{c_\nu}\right) \Phi\left(\frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_1^i}{c}\right)};$$

$\bar{y}_1 = F(x(1), \overline{\alpha})$.

При оценивании значения зависимости (13) в ситуации $x = (x(1), x(2))$ сначала вычисляется $\bar{y}_1 = F(x(1), \overline{\alpha})$, а затем по данным $(\bar{y}_1, x(2))$ в соответствии со статистикой (15) определяется $\bar{\bar{y}}(x)$.

Можно доказать, что гибридная модель (15) обладает свойствами асимптотической несмещенности и состоятельности только для условий принадлежности частичных сведений $F(x(1), \overline{\alpha})$ к классу линейных полиномов. Поэтому на данном этапе не удается показать преимущество аппроксимационных свойств модели (15) перед непараметрической регрессией. Однако при этом обосновывается процедура снижения размерности пространства признаков в задаче восстановления стохастических зависимостей.

Заключение. Необходимость максимального использования априорных сведений о виде закономерностей и экспериментальных данных, характеризующих функционирование изучаемого объекта, определила разработку гибридных моделей как новое направление теории обучающихся систем. В общем случае они представляют собой комплекс различных по функциям и методам синтеза моделей, обеспечивающих эффективное решение поставленной задачи исследования.

Структуру рассмотренных гибридных моделей составляют параметрические аппроксимации искомых стохастических зависимостей и непараметрические оценки функций невязок между ними, выбор вида которых порождает разнообразие исследуемого класса моделей. На основе анализа асимптотических свойств гибридных моделей показано, что учет априорной информации о виде зависимости позволяет повысить показатели эффективности их восстановления по сравнению с непараметрическими аппроксимациями. Причем при относительно приближенных сведениях о виде зависимости либо о ее второй производной преимущество гибридных моделей сохраняется. Данный вывод не распространяется на условия, когда априорные сведения о восстанавливаемой зависимости представлены в виде линейного полинома.

Существуют области компетентности среди гибридных моделей, соответствующих различным мерам рассогласования между известной параметрической аппроксимацией искомой зависимости и ее экспериментальными значениями. Очевидно, что данный факт связан с различным типом помех, характерных для экспериментальных данных. Поэтому перспективной является разработка коллективов гибридных моделей, позволяющих обойти проблему их выбора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Надарая Э. А.** Непараметрические оценки кривой регрессии // Тр. ВЦ ГССР. 1965. Вып. 5. С. 56.
2. **Катковник В. Я.** Линейные и нелинейные методы непараметрического регрессионного анализа // Автоматика. 1979. № 5. С. 165.
3. **Лапко А. В., Ченцов С. В.** Непараметрические системы обработки информации. М.: Наука, 2000.
4. **Speckman P.** Kernel smoothing in partial linear models // Journ. Roy. Statist. Soc. B. 1988. **50**. P. 413.

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
E-mail: lapko@ksc.krasn.ru

Поступила в редакцию
20 марта 2002 г.