РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2002, том 38, № 4

УДК 535.317.25

В. А. Удод

(Томск)

ОЦЕНКА РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ИЗОБРАЖАЮЩИХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ПРЯМОУГОЛЬНОМУ РАСТРУ И ИХ ПОСЛЕДУЮЩЕЙ ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ

Предложен подход, позволяющий теоретически оценивать на основе ранее известных соотношений пространственную разрешающую способность изображающих систем, в которых осуществляется равномерная дискретизация изображений по прямоугольному растру и их последующая ступенчатая интерполяция по ближайшему узлу.

Введение. Применяемые в настоящее время методы теоретической оценки разрешающей способности (РС) изображающих систем имеют один существенный недостаток, а именно: они применимы лишь к тем системам, которые обладают свойствами линейности и инвариантности к сдвигу [1–4]. В то же время существует широкий класс изображающих систем, где входное изображение на том или ином этапе преобразования подвергается операции «дискретизация–интерполяция» (ДИ) [5], которая хотя и является линейной, но инвариантностью к сдвигу не обладает [6]. Вследствие чего возникает известная сложность в получении теоретической оценки РС таких систем (систем с ДИ).

В соответствии с вышеизложенным в данной работе предложен подход к получению теоретической оценки РС систем с ДИ применительно к случаю равномерной дискретизации изображений по прямоугольному растру. Основа предлагаемого подхода заключается в аппроксимации функционального звена, выполняющего операцию ДИ, линейным инвариантным к сдвигу фильтром.

Аппроксимация операции «дискретизация–интерполяция». С целью упрощения изложения материала сначала рассмотрим задачу аппроксимации в одномерном варианте, а затем обобщим полученные результаты для двумерного случая.

Итак, обозначим через L одномерный оператор (операцию) ДИ и предположим, что он действует следующим образом:

$$L(S) = \hat{S}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\Delta)h(x - n\Delta). \tag{1}$$

Здесь S – входной сигнал (как функция от аргумента x); $\hat{S}$ – выходной сигнал; Δ – шаг дискретизации сигнала S; h – интерполирующая функция.

Таким образом, стоящая перед нами задача заключается в аппроксимации оператора L некоторым линейным инвариантным к сдвигу фильтром. Назовем его для краткости аппроксимирующим фильтром.

Для решения указанной задачи нам достаточно найти каким-либо способом амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики аппроксимирующего фильтра. С этой целью проведем сопоставительный анализ выходных реакций оператора L и аппроксимирующего фильтра при поступлении на их вход одного и того же синусоидального сигнала вида

$$S(x) = \sin(2\pi\nu x + \varphi), \tag{2}$$

как это часто делается в теории линейных систем [7]. Здесь ν $(\nu \geq 0)$ – частота, а φ – некоторая начальная фаза.

При подстановке (2) в (1) получим

$$\hat{S}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(2\pi\nu n\Delta + \varphi) h(x - n\Delta), \tag{3}$$

а для реакции $\bar{S}$ аппроксимирующего фильтра на сигнал (2) согласно [7] будем иметь

$$\bar{S}(x) = B(\nu) \sin(2\pi\nu x + \varphi + q(\nu)), \tag{4}$$

где B – амплитудно-частотная, а q – фазочастотная характеристики аппроксимирующего фильтра. Заметим, что в качестве q можно использовать главное значение аргумента преобразования Фурье интерполирующей функции h, поскольку узлы дискретизации $n\Delta$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ сигнала S располагаются симметрично относительно начала координат, и поэтому возможный «сдвиг» сигнала S согласно (3) может произойти только за счет интерполирующей функции.

Разобьем всю вещественную прямую нулями синусоиды (4) на полуинтервалы

$$J_{n,\varphi} = \left[\frac{\pi n - \varphi - q(\nu)}{2\pi\nu}, \frac{\pi(n+1) - \varphi - q(\nu)}{2\pi\nu} \right], \quad n \in Z, \tag{5}$$

соответствующие одной «полуволне» синусоиды $\bar{S}$. Здесь Z – множество всех целых чисел.

Определим теперь локальную $A_{n,\varphi}$ и глобальную $\hat{A}$ амплитуды сигнала $\hat{S}$ следующим образом:

$$A_{n,\varphi}(\nu) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in J_{n,\varphi}} |\hat{S}(x)|, & 0 \leq \nu < \dfrac{1}{2\Delta}; \\ 0, & \nu \geq \dfrac{1}{2\Delta}, \end{cases} \qquad \hat{A}(\nu) = \inf_{\substack{n \in Z \\ \varphi \in (-\infty, \infty)}} A_{n,\varphi}(\nu). \tag{6}$$

Отыскание полуинтервалов (5), а также величин $A_{n,\varphi}$ и $\hat{A}$ для произвольной интерполирующей функции h сопряжено со значительными трудностями. В связи с чем ограничимся рассмотрением наиболее простого и в то же время широко распространенного случая, когда осуществляется ступенчатая интерполяция отсчетов по ближайшему узлу. Формально это соответствует интерполирующей функции h вида

$$h(x)=\begin{cases}1, & -\frac{\Delta}{2}\le x<\frac{\Delta}{2};\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{7}$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем конечные выражения для величин $A_{n,\varphi}$ и $\hat{A}$ при ступенчатой интерполяции, т. е. в случае использования интерполирующей функции h из (7):

$$A_{n,\varphi}(\nu)=\begin{cases}|\sin(2\pi\nu\hat{c}_{n,\varphi}+\varphi)|, & 0\le\nu<\frac{1}{2\Delta};\\ 0, & \nu\ge\frac{1}{2\Delta},\end{cases}$$

$$\hat{A}(\nu)=\begin{cases}\cos\pi\nu\Delta, & 0\le\nu<\frac{1}{2\Delta};\\ 0, & \nu\ge\frac{1}{2\Delta}.\end{cases} \tag{8}$$

Здесь $\hat{c}_{n,\varphi}=\left[\frac{c_{n,\varphi}}{\Delta}+\frac{1}{2}\right]\Delta$ есть ближайший к точке $c_{n,\varphi}=\frac{\pi n-\varphi}{2\pi\nu}+\frac{1}{4\nu}$ узел дискретизации; символ $[\cdot]$ означает целую часть.

Учитывая теперь, что амплитудно-частотная характеристика является четной функцией частоты [8], получаем в силу (8) следующее выражение для амплитудно-частотной характеристики аппроксимирующего фильтра в случае использования ступенчатой интерполяции по ближнему узлу:

$$B(\nu)=\begin{cases}\hat{A}(\nu), & \nu\ge 0,\\ \hat{A}(-\nu), & \nu<0,\end{cases}=\begin{cases}\cos\pi\nu\Delta, & |\nu|<\frac{1}{2\Delta};\\ 0, & |\nu|\ge\frac{1}{2\Delta}.\end{cases} \tag{9}$$

Далее согласно [8] преобразование Фурье $\tilde{h}$ интерполирующей функции (7) имеет вид

$$\tilde{h}(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\exp(-2\pi i\nu x)dx=\frac{\sin\pi\nu\Delta}{\pi\nu}. \tag{10}$$

Легко видеть, что в данном случае $\tilde{h} = |\tilde{h}|$ при $|\nu| < \frac{1}{2\Delta}$. Следовательно, главное значение аргумента функции (10) тождественно равно нулю при $|\nu| < \frac{1}{2\Delta}$. Поэтому при использовании интерполирующей функции (7) для фазочастотной характеристики q аппроксимирующего фильтра будем иметь $q(\nu) \equiv 0$ при $|\nu| < \frac{1}{2\Delta}$. Отсюда и с учетом (9) окончательно получаем выражение для передаточной функции P аппроксимирующего фильтра в случае использования ступенчатой интерполяции по ближайшему узлу:

$$P(\nu) \equiv B(\nu) = \begin{cases} \cos \pi\nu\Delta, & |\nu| < \dfrac{1}{2\Delta}; \\ 0, & |\nu| \geq \dfrac{1}{2\Delta}. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим согласно (6) и (9), что передаточная функция P является своего рода точной оценкой снизу передаточных свойств по частотам оператора «равномерная дискретизация – ступенчатая интерполяция» (РД–СИ).

Обобщая полученные результаты для двумерного случая, предположим, что дискретизация изображений в системе с ДИ осуществляется по прямоугольному растру и, стало быть, происходит независимо по каждому из двух взаимно перпендикулярных направлений. Помимо этого примем во внимание тот факт, что двумерная ступенчатая интерполирующая функция представима в форме произведения соответствующих одномерных интерполирующих функций вида (7).

С учетом изложенного передаточная функция F аппроксимирующего фильтра в двумерном варианте может быть представлена как произведение соответствующих одномерных функций P_x, P_y вида (11):

$$F(\nu_x, \nu_y) \equiv P_x(\nu_x)P_y(\nu_y) =$$

$$= \begin{cases} \cos(\pi\nu_x\Delta_x)\cdot\cos(\pi\nu_y\Delta_y), & |\nu_x| < \dfrac{1}{2\Delta_x}, \quad |\nu_y| < \dfrac{1}{2\Delta_y}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{12}$$

Здесь ν_x, ν_y – пространственные частоты, а Δ_x, Δ_y – шаги дискретизации входного изображения вдоль соответствующих координат осей.

Таким образом, нами получено выражение (12) для передаточной функции линейного инвариантного к сдвигу фильтра, который аппроксимирует в двумерном варианте оператор «равномерная дискретизация изображения по прямоугольному растру – двумерная ступенчатая интерполяция отсчетов по ближайшему узлу».

Учет влияния операции дискретизации–интерполяции на разрешающую способность изображающих систем. Согласно [2] РС R изображающих систем без ДИ определяется следующим образом:

$$R = \min\{\nu \geq 0 \mid k_0 G(\nu) = K_{\text{пор}}(\nu)\}. \tag{13}$$

Здесь ν $(\nu \geq 0)$ – пространственная частота разрешаемых элементов; k_0 – исходный контраст; G – частотно-контрастная характеристика (ЧКХ) изображающей системы; $K_{\text{пор}}$ – пороговый контраст, представимый на структурном уровне в виде [9]:

$$K_{\text{пор}} = \sqrt{K_з^2 + K_ш^2},$$

где $K_з$ – пороговый контраст зрительного анализатора, $K_ш = M_{\text{пор}}\delta$ – составляющая порогового контраста, обусловленная наличием шума на выходе изображающей системы, $M_{\text{пор}}$ – пороговое отношение сигнал/шум, характеризующее надежность разрешения, $\delta = \sigma / B_ф$ – относительное среднеквадратическое значение шума на выходе изображающей системы, σ^2 – дисперсия шума на выходе изображающей системы, $B_ф$ – яркость фона выходного изображения.

Покажем теперь, как можно оценить РС изображающих систем при наличии в них операции РД–СИ (системы с РД–СИ).

Очевидно, что среднее и дисперсия шума (искажающего входное изображение) в виде двумерной стационарной случайной функции не изменяются в результате его преобразования оператором РД–СИ. Поэтому для систем с РД–СИ, где шум является аддитивным, указанного типа составляющую $K_ш$ порогового контраста следует оставить без изменения. Величину $K_з$ также можно оставить без изменения, предположив, что размеры пикселов выходного изображения в системе с РД–СИ достаточно малы, т. е. пиксельная структура выходного изображения практически неразличима глазом (в современных системах это условие обычно выполнимо).

Таким образом, с учетом вышеизложенного нами предлагается использовать для оценки РС систем с РД–СИ все те же ранее известные соотношения, в частности (13), применяемые для оценки РС изображающих систем без ДИ, с единственной разницей, что в этих соотношениях вместо ЧКХ G должна использоваться модифицированная ЧКХ

$$\hat{G} = GQ, \tag{14}$$

где Q – ЧКХ аппроксимирующего фильтра с передаточной функцией (12),

$$Q(\nu) \equiv Q_\theta(\nu) = F(\nu\cos\theta,\ \nu\sin\theta) \tag{15}$$

(здесь θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ – угол, определяющий направление, вдоль которого оценивается РС системы).

Рассмотрим теперь пример, показывающий, насколько существенно влияние операции РД–СИ на РС изображающих систем. Для простоты ограничимся случаем, когда:

1) исследуется РС по направлению $\theta = 0$, т. е. вдоль оси OX, так называемая «продольная РС» R_x [10];

2) пространственно-инвариантные линейные искажения входного изображения обусловлены прямоугольной апертурой считывающего устройства, а значит, ЧКХ изображающей системы вдоль оси OX есть

$$G(\nu) = \left| \frac{\sin \pi\nu b_x}{\pi\nu b_x} \right|, \tag{16}$$

где b_x – длина апертуры (ее размер вдоль оси OX);

3) операция РД–СИ реализуется путем равномерного дискретного сканирования входного изображения по прямоугольному растру считывающим устройством и последующей интерполяцией получаемых отсчетов полутоновым дисплеем, имеющим равномерное распределение яркости в пределах отдельного пиксела;

4) $K_{\text{пор}}(\nu) \equiv K_0$, что, в частности, имеет место в радиационных сканирующих изображающих системах [11, 12].

Тогда согласно (12) и (15) будем иметь

$$Q_0(\nu) = F(\nu, 0) = \begin{cases} \cos\pi\nu\Delta_x, & |\nu| < \dfrac{1}{2\Delta_x}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{17}$$

где Δ_x – шаг дискретного сканирования вдоль оси OX. Подставляя в (13) вместо ЧКХ G модифицированную ЧКХ GQ_0, где G из (16), а Q_0 из (17), получим с учетом условия 4 следующее уравнение относительно ν, корень которого и будет являться искомой РС R_x:

$$\frac{\sin\pi\nu b_x}{\pi\nu b_x}\cos\pi\nu\Delta_x = \hat{K}, \quad 0 \le \nu \le \nu_0, \quad 0 \le \hat{K} \le 1, \tag{18}$$

где $\nu_0 = \min\left(\dfrac{1}{b_x}, \dfrac{1}{2\Delta_x}\right)$ есть первый положительный нуль модифицированной ЧКХ GQ_0, $\hat{K} = K_0/k_0$.

В результате численного решения уравнения (18) было получено семейство зависимостей указанной РС от относительного порогового контраста $\hat{K}$ для различных отношений $\dfrac{\Delta_x}{b_x}$ шага дискретизации к длине апертуры: $R_x = R_x\left(\hat{K};\ \dfrac{\Delta_x}{b_x}\right)$. После чего был рассчитан коэффициент

$$\gamma\left(\frac{\Delta_x}{b_x}\right) = \min_{0 \le \hat{K} \le 1} \frac{R_x\left(\hat{K};\ \dfrac{\Delta_x}{b_x}\right)}{R_x(\hat{K};\ 0)}$$

снижения РС, обусловленный операцией РД–СИ. Результаты расчетов представлены в таблице. Видно, что РС снижается незначительно (не более 13 %) при условии $\dfrac{\Delta_x}{b_x} \le \dfrac{1}{3}$, которое, кстати сказать, считается согласно [13] необходимым для осуществления апертурной коррекции искаженных изображений. Из таблицы также следует, что РС снижается очень сильно (минимум вдвое), когда

$\dfrac{\Delta_x}{b_x}$	$\gamma\left(\dfrac{\Delta_x}{b_x}\right)$
0	1
$\dfrac{1}{4}$	0,92
$\dfrac{1}{3}$	0,87
$\dfrac{1}{2}$	0,76
1	0,5
2	0,25

шаг дискретизации становится равным либо превосходит длину апертуры.

Заключение. Полученные в данной работе результаты (см. формулы (12), (14), (15)) наиболее целесообразно использовать для изображающих систем, в которых осуществляется операция РД–СИ, оказывающая существенное влияние на качество результирующего изображения. Это, в частности, будет иметь место, если система содержит сканирующую линейку (либо матричную мозаику) дискретных детекторных элементов для регистрации (преобразования) входных изображений [14, 15], а также компьютер (цифровую память) и полутоновый графический дисплей, характеризующийся равномерным распределением яркости в пределах отдельного пиксела. При этом, если сканирование линейкой происходит вдоль оси OX, то шаги дискретизации входного изображения можно принять равными:

$$\Delta_x = \mathrm{v}T, \qquad \Delta_y = d_y,$$

где v – скорость сканирования; T – временной шаг дискретизации сигналов с детекторов аналого-цифровым преобразователем; d_y – шаг расположения детекторов в линейке [15]. Аналогично этому при использовании матричной мозаики дискретных детекторных элементов шаги дискретизации входного изображения будут равны соответствующим шагам расположения детекторов в матрице. При этом очевидно, что шаги дискретизации превышают либо равны линейным размерам детекторных элементов мозаики, а значит, в соответствии с рассмотренным выше примером операция РД–СИ в данном случае будет существенно влиять на РС таких систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вычислительная** оптика /Под общ. ред. М. М. Русинова. Л.: Машиностроение, 1984.
2. **Фивенский Ю. И.** Методы повышения качества аэрокосмических фотоснимков. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.
3. **Удод В. А.** О разрешающей способности // Оптика атмосферы. 1989. **2**, № 2.
4. **Завьялкин Ф. М., Удод В. А.** Максимальная разрешающая способность изображающих систем, достигаемая при апостериорной линейной фильтрации изображений // Автометрия. 1992. № 3. С. 75.
5. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. Кн. 2.
6. **Игнатьев Н. К.** Дискретизация и ее приложения. М.: Связь, 1980.
7. **Бендат Дж., Пирсол А.** Применения корреляционного и спектрального анализа: Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
8. **Макс Ж.** Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: Пер. с франц. М.: Мир, 1983. Т. 1.
9. **Гурвич А. М.** Квантовые флуктуации и их роль в прикладной рентгенолюминесценции // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1981. **46**, № 5.
10. **Рыфтин Я. А.** Телевизионная система. Теория. М.: Сов. радио, 1967.

11. **Приборы** для неразрушающего контроля материалов и изделий /Под ред. В. В. Клюева. М.: Машиностроение, 1986. Кн. 1.

12. **Удод В. А., Темник А. К., Солодушкин В. И.** Оценка разрешающей способности систем цифровой рентгенографии // Автометрия. 2000. № 6. С. 113.

13. **Смирнов А. Я., Меньшиков Г. Г.** Сканирующие приборы. Л.: Машиностроение, 1986.

14. **Проектирование** оптических систем: Пер. с англ. /Под ред. Р. Шеннона, Дж. Вайанта. М.: Мир, 1983.

15. **Ллойд Дж.** Системы тепловидения: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.

Томский государственный университет,
E-mail: udod@ef.tsu.ru

Поступила в редакцию
3 апреля 2001 г.