РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2002, том 38, № 4

УДК 62-40

С. В. Соколов, С. А. Оленев
(Ростов-на-Дону)

СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрено решение задачи идентификации волновых возмущений оптимальным образом в смысле нелинейного вероятностного критерия. Проведен анализ вычислительной реализации предложенного подхода.

Введение. Все возмущения, которые встречаются в реальных системах управления и связи, как правило, условно подразделяются на две категории [1]: возмущения типа «белый» («цветной» и др.) шум и возмущения волновой структуры. Когда представляют интерес возмущения на ограниченном (небольшом) интервале времени или необходима информация о текущем значении возмущения, то наиболее эффективно именно волновое представление возмущений.

В существующих подходах описания волновых структур [1, 2] используется представление волнового возмущения $w(t)$ в виде системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка в форме Коши ($w(t)=y_1$):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + \delta_1(t), \\ \dot{y}_2 &= y_3 + \delta_2(t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_n &= -\sum_{i=1}^{n} r_i y_i + \delta_n(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где r_i, $i=\overline{1,n}$, – постоянные коэффициенты, определяющие характер волновой структуры; $\delta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, – пуассоновская последовательность импульсных функций с интенсивностью s_i и случайной амплитудой импульсов A, имеющей известную плотность распределения $W(A)$.

При наблюдении априорно неопределенных волновых возмущений, описываемых системой уравнений (1) (с неизвестными коэффициентами r_i и параметрами s_i), с использованием нелинейного измерителя

$$z(t) = f(y_1, t) + n(t) \tag{2}$$

(здесь $z(t)$ – сигнал с выхода измерителя; $f(y_1, t)$ – функция наблюдения; $n(t)$ – помеха измерений, представляющая собой белый гауссовский шум с нулевым средним и известной дисперсией $D_n(t)$) возникает задача идентификации данных параметров, решение которой в настоящее время осуществляется с использованием подхода, обеспечивающего получение оптимальных оценок на основе критерия минимума среднего квадрата ошибки оценки [3]. Однако применение такого подхода требует учета ряда ограничений, носящих принципиальный характер (наблюдатель (2) должен быть линейным, а случайные составляющие, входящие в правую часть уравнений системы (1), должны иметь гауссовское распределение). В рассматриваемом случае эти ограничения не выполняются, поэтому при решении данной задачи необходимо использовать иные подходы, опираясь при этом по возможности на более общие вероятностные критерии (которые к тому же могут обеспечить потенциально большую точность идентификации).

Постановка задачи. В качестве вероятностных критериев, исходя из физического смысла задачи, целесообразно использовать информационные критерии, например, критерий максимума текущей информации о векторе состояния $\mathbf{Y}$ в форме Фишера:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} p\left[\frac{\partial \ln p}{\partial \mathbf{Y}}\right]\left[\frac{\partial \ln p}{\partial \mathbf{Y}}\right]^T d\mathbf{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p)d\mathbf{Y} \tag{3}$$

или Шеннона

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} -p \ln p d\mathbf{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p)d\mathbf{Y}, \tag{4}$$

где p – апостериорная плотность вероятности (АПВ) процесса $\mathbf{Y}$.

В ряде случаев для волновых возмущений могут быть известны с некоторой степенью приближения априорные значения параметров $r_i = r_{0i}$ и $s_i = s_{0i}$, аппроксимированно определяющих характер идентифицируемых структур (например, из условия физической реализуемости), т. е. приближенно задающих вектор

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $\mathbf{S} = [s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n]^T$, $\mathbf{R} = [r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n]^T$. В этом случае для уменьшения вычислительных затрат при идентификации вектора $\mathbf{U}$ целесообразно рассматривать изменение его возможных значений в окрестности $\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{R}_0 \end{bmatrix}$, обеспечиваемое, например, текущей минимизацией дополнительной функциональной составляющей вида $\left\{ \int_{t_0}^{t} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)^T (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) dt \right\}$.

Таким образом, задача идентификации волновых возмущений в самом общем случае может быть сформулирована следующим образом.

Пусть многомерный дискретно-непрерывный случайный процесс $\mathbf{Y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), \ldots, y_n(t)\}$ задан системой линейных стохастических дифференциальных уравнений (1). На текущем временном интервале по измерениям (2) необходимо сформировать вектор **U**, обеспечивающий представление волнового случайного процесса, оптимальное по условию минимума вероятностного функционала, нелинейно зависящего от функции плотности вероятности $p(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t)$ процесса **Y** и имеющего в общем случае вид

$$J = -\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\,[p(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t)]\,d\mathbf{Y} + \int_{t_0}^{t} (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)^T (\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)\,dt, \tag{6}$$

где $\Phi(p)$ – известная нелинейная функция вида (3) или (4).

Решение задачи. Для решения поставленной задачи предварительно рассмотрим синтез уравнения, определяющего эволюцию апостериорной плотности вероятности $p(\mathbf{Y}, \mathbf{U}, t)$ идентифицируемого процесса (1).

Уравнение для апостериорной плотности вероятности вектора состояния **Y**. Вывод уравнения АПВ вектора состояния **Y** (1) в силу его дискретно-непрерывной природы связан с рядом принципиальных трудностей, которые в общем случае не позволяют записать соответствующее уравнение для плотности вероятности в явной форме. Во-первых, это сложность (или даже, как правило, невозможность) обобщения уравнения для одномерного нелинейного процесса на многомерный случай, во-вторых, невозможность формирования явного выражения для функции плотности вероятности перехода процесса (учитывающей скачкообразный характер правой части (1)) в случае нелинейных уравнений объекта [4]. Однако для рассматриваемого случая, когда система дифференциальных уравнений (1) имеет линейный вид, а последовательность импульсных функций – распределение Пуассона, формирование уравнения АПВ вектора состояния **Y** оказывается возможным. Покажем это. В правой части каждого уравнения системы (1) последовательность случайных функций Дирака можно представить в виде

$$\delta_i = \sum_j A_{ij}\,\delta(t - t_j),$$

где $\delta(t)$ – δ-функция; t_j – момент появления j-го импульса; A_{ij} – амплитуды импульсов. Амплитуды импульсов A_{ij} являются взаимонезависимыми случайными величинами с плотностью вероятности $W(A)$, моменты появления импульсов t_j статистически не зависят от амплитуд A_{ij} и описываются законом Пуассона

$$\mathrm{P}_i(k) = \frac{(s_i t)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-s_i t},$$

где s_i – параметр пуассоновского закона; k – количество импульсов.

Таким образом, рассматриваемый процесс **Y** является многомерным дискретно-непрерывным марковским процессом, для плотности вероятности которого справедливо интегродифференциальное уравнение Колмогорова – Феллера (УКФ) [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{Y}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{Y}', t)\,u(\mathbf{Y}', \mathbf{Y}, t)\,d\mathbf{Y}' - q(\mathbf{Y}, t)\,p(\mathbf{Y}, t) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}[a_i(\mathbf{Y},t)p(\mathbf{Y},t)]+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}[b_{ij}(\mathbf{Y},t)p(\mathbf{Y},t)],$$

где $u(\mathbf{Y}',\mathbf{Y},t)$ – плотность вероятности перехода процесса $\mathbf{Y}(t)$ из состояния $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{Y}'$ (здесь $\mathbf{Y}<\mathbf{Y}'<\mathbf{Y}+\Delta\mathbf{Y}$ за время Δt при $\Delta t\to 0$);

$$q(\mathbf{Y},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int u(\mathbf{Y}',\mathbf{Y},t)dy_1'dy_2'\ldots dy_n';$$

$a_i(\mathbf{Y},t)$, $b_{ij}(\mathbf{Y},t)$ – локальные характеристики непрерывной части процесса (коэффициенты сноса и диффузии).

Получим далее функциональные зависимости $u(\mathbf{Y}',\mathbf{Y},t)$, $q(\mathbf{Y},t)$, $a_i(\mathbf{Y},t)$, $b_{ij}(\mathbf{Y},t)$, определяющие правую часть УКФ. Следуя подходу, используемому в [4, с. 290], и учитывая только скачкообразный процесс, запишем предварительно систему (1) в виде

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \sum_j A_{1j}\delta(t-t_j),\\ \dot{y}_2 &= \sum_j A_{2j}\delta(t-t_j),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{y}_n &= \sum_j A_{nj}\delta(t-t_j).\end{aligned}$$

Тогда для многомерного пуассоновского процесса вероятность того, что внутри интервала Δt окажется импульс, будет равна [5]:

$$p_{\mathbf{Y}}(1)=\sum_{i=1}^{n}s_i\Delta t.$$

При наличии импульса в интервале времени Δt процесс получит скачкообразное приращение, а так как амплитуды импульсов A_{ij} являются взаимонезависимыми случайными величинами, то вероятность появления импульса с амплитудой, удовлетворяющей условию $\mathbf{Y}<\mathbf{Y}'<\mathbf{Y}+\Delta\mathbf{Y}$, можно представить в виде [4]:

$$W_A=\prod_{i=1}^{n}W(y_i'-y_i)\Delta y_i'.$$

Следовательно, вероятность перехода для процесса $\mathbf{Y}(t)$ будет иметь вид

$$u(\mathbf{Y}',\mathbf{Y},t)\Delta y_1'\Delta y_2'\ldots\Delta y_n'\Delta t=\sum_{i=1}^{n}s_i\prod_{i=1}^{n}W(y_i'-y_i)\Delta y_i'\Delta t. \tag{7}$$

Используя полученное выражение, найдем

$$q(\mathbf{Y},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\sum_{i=1}^{n}s_i\prod_{i=1}^{n}W(y_i'-y_i)dy_1'dy_2'\ldots dy_n'=\sum_{i=1}^{n}s_i. \tag{8}$$

Коэффициенты $a_i(\mathbf{Y},t)$, $b_{ij}(\mathbf{Y},t)$, учитывающие непрерывный характер изменения процесса $\mathbf{Y}(t)$, равны [4]:

$$
\begin{aligned}
&a_i = y_i, \quad i=\overline{1,n-1},\\
&a_n = -\sum_{i=1}^{n} r_i y_i,\\
&b_{ij} = 0, \quad i,j=\overline{1,n}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

С учетом найденных выражений (7)–(9), а также соображений, приведенных в [3], при выводе уравнения АПВ дискретно-непрерывного процесса и уравнения наблюдения (2) окончательно искомое уравнение АПВ вектора $\mathbf{Y}(t)$ запишем в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{Y},t) = &\sum_{i=1}^{n} s_i \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int p(\mathbf{Y}',t)\prod_{i=1}^{n}W(y_i'-y_i)dy_1'dy_2'\ldots dy_n' -\\
&-\sum_{i=1}^{n} s_i p(\mathbf{Y},t) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_i}[y_i p(\mathbf{Y},t)] + \frac{\partial}{\partial y_n}\left[\sum_{i=1}^{n} r_i y_i p(\mathbf{Y},t)\right] +\\
&+[F(y_1,t)-F(t)]p(\mathbf{Y},t),
\end{aligned}
$$

где

$$
F(y_1,t)=\frac{1}{D_n}[z(t)-f(y_1,t)]^2; \qquad F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(y_1,t)p(\mathbf{Y},t)d\mathbf{Y}.
$$

Выделим в полученном выражении АПВ векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$, тогда выражение примет вид

$$
\begin{aligned}
\dot{p}(\mathbf{Y},t) = &\mathbf{I}_n\mathbf{S}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int p(\mathbf{Y}',t)\prod_{i=1}^{n}W(y_i'-y_i)dy_1'dy_2'\ldots dy_n' -\\
&-\mathbf{I}_n\mathbf{S}p(\mathbf{Y},t) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_i}[y_i p(\mathbf{Y},t)] + \frac{\partial}{\partial y_n}[p(\mathbf{Y},t)\mathbf{Y}^T]\mathbf{R} +\\
&+[F(y_1,t)-F(t)]p(\mathbf{Y},t),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\mathbf{I}_n$ – единичная вектор-строка размерности n. Выражение (10) с учетом (5) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
\dot{p}(\mathbf{Y},t) = &\Bigg[\mathbf{I}_\mathbf{S}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int p(\mathbf{Y}',t)\prod_{i=1}^{n}W(y_i'-y_i)dy_1'dy_2'\ldots dy_n' -\\
&-\mathbf{I}_\mathbf{S}p(\mathbf{Y},t) + \frac{\partial}{\partial y_n}\{[\mathbf{I}_{0n}\,|\,\mathbf{Y}^T]p(\mathbf{Y},t)\}\Bigg]\mathbf{U} -
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_i}[y_i p(\mathbf{Y},t)]+[F(y_1,t)-F(t)]p(\mathbf{Y},t)=L(p)\mathbf{U}+G(p), \tag{11}$$

где

$$L(p)=\mathbf{I}_S\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int p(\mathbf{Y}',t)\prod_{i=1}^{n}W(y_i'-y_i)\,dy_1'dy_2'\ldots dy_n' -$$

$$-\mathbf{I}_S\, p(\mathbf{Y},t)+\frac{\partial}{\partial y_n}\{[\mathbf{I}_{0n}\mid\mathbf{Y}^T]p(\mathbf{Y},t)\};$$

$$G(p)=[F(y_1,t)-F(t)]p(\mathbf{Y},t)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_i}[y_i p(\mathbf{Y},t)];$$

$$\mathbf{I}_S=[\mathbf{I}_n\mid\mathbf{I}_{0n}],$$

$\mathbf{I}_{0n}$ – нулевая вектор-строка размерности n.

Оптимальная идентификация волновых возмущений. Окончательное решение задачи оптимальной идентификации волновых возмущений (т. е. синтез вектора $\mathbf{U}$, обеспечивающего минимум функционала J) осуществим исходя из известного факта, что при неотрицательно-определенной критериальной функции для обеспечения минимального ее значения в каждый текущий момент времени достаточно, чтобы производная по времени, взятая с обратным знаком, имела максимум [6]. Критериальная функция в (6) удовлетворяет условию неотрицательной определенности в обоих случаях (3), (4), следовательно, условие оптимальности имеет вид

$$\max_{\mathbf{U}}\{-\dot{J}\}=\max_{\mathbf{U}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\Phi(p)}{\partial p}\dot{p}\right]d\mathbf{Y}-(\mathbf{U}-\mathbf{U}_0)^T(\mathbf{U}-\mathbf{U}_0)\right\}.$$

Формируя далее оптимальный вектор $\mathbf{U}$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{U}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\Phi(p)}{\partial p}\dot{p}\right]d\mathbf{Y}-(\mathbf{U}-\mathbf{U}_0)^T(\mathbf{U}-\mathbf{U}_0)\right\}=0.$$

Последнее уравнение с учетом (11) можно преобразовать к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\mathbf{U}}\left\{\frac{\partial\Phi(p)}{\partial p}[L(p)\mathbf{U}+G(p)]\right\}d\mathbf{Y}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{U}}\{(\mathbf{U}-\mathbf{U}_0)^T(\mathbf{U}-\mathbf{U}_0)\}.$$

Решая полученное уравнение относительно $\mathbf{U}$, имеем

$$\mathbf{U}^{\text{opt}}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\Phi(p)}{\partial p}L^T(p)\right]d\mathbf{Y}+\mathbf{U}_0. \tag{12}$$

Выражение (12) является искомым решением задачи оптимальной идентификации волновых возмущений. Очевидно, что для формирования АПВ p, определяющей правую часть (12), необходимо предварительно решить следующее интегродифференциальное уравнение, получаемое подстановкой (12) в (11):

$$\dot{p}(\mathbf{Y}, t) = \frac{1}{2} L(p) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \Phi(p)}{\partial p} L^T(p) \right] + L(p)\mathbf{U}_0 + G(p). \tag{13}$$

Анализ и пример вычислительной реализации алгоритма идентификации. Так как в настоящее время аналитическое решение уравнения вида (13) не существует [3], то для решения поставленной задачи целесообразно использовать различные приближенные методы, ориентированные на компромисс между необходимой точностью и объемом вычислительных затрат. Одним из наиболее эффективных методов в этом отношении является метод, основанный на разложении многомерной функции p в ряд по некоторой системе ортонормированных функций векторного аргумента:

$$p(\mathbf{Y}, t) = \sum_k \alpha_k(t)\psi_k(\mathbf{Y}) = \mathbf{\Psi}^T \boldsymbol{\alpha},$$

где k – индекс, изменяющийся от 0 до $n1$ [5]; $\mathbf{\Psi}$ – вектор ортонормированных функций аргумента $\mathbf{Y}$; $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор коэффициентов соответствующих разложений.

В этом случае возникает задача интегрирования уже обыкновенного дифференциального векторного уравнения – уравнения коэффициентов разложения:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{\Psi} L(\mathbf{\Psi}^T \boldsymbol{\alpha}) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left. \frac{\partial \Phi(p)}{\partial p} \right|_{p = \mathbf{\Psi}^T \boldsymbol{\alpha}} L(\mathbf{\Psi}^T \boldsymbol{\alpha}) \right] d\mathbf{Y} \right\} d\mathbf{Y} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathbf{\Psi} L^T(\mathbf{\Psi}^T \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{U}_0 + \mathbf{\Psi} G(\mathbf{\Psi}^T \boldsymbol{\alpha}) \} d\mathbf{Y}. \tag{14}$$

Размерность $n1$ определяет точность аппроксимации функции p и может быть выбрана исходя из требований к точности решения задачи по результатам многократного численного моделирования.

П р и м е р. Для иллюстрации эффективности использования предложенного подхода рассмотрим следующий пример. Волновое возмущение, описываемое системой уравнений (1) при $n = 2$:

$$\dot{y}_1 = y_2 + \sum_j A_{1j} \delta(t - t_j),$$

$$\dot{y}_2 = -r_1 y_1 - r_2 y_2 + \sum_j A_{2j} \delta(t - t_j),$$

наблюдается измерителем $z(t)=f(y_1,t)+n(t)$. Параметры системы при этом выбираем следующие: $r_1=0{,}1$, $r_2=2$, $f(y_1,t)=y_1^2$, $D_n=1$, пуассоновские последовательности импульсов имеют интенсивности $s_1=0{,}2$, $s_2=0{,}5$ и амплитуду, равномерно распределенную на интервале $[a,b]$, где $a=1$, $b=6$.

В соответствии с предложенным алгоритмом идентификации волновых возмущений при использовании критериальной функции вида (3) в функционале (6) и представлении АПВ рядом $\Psi^T\alpha$ выражение для $\mathbf{U}^{\text{opt}}$ будет иметь вид

$$\mathbf{U}^{\text{opt}}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{1}{(\Psi^T\alpha)^2}\left[\frac{\partial\Psi^T}{\partial\mathbf{Y}}\alpha\alpha^T\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{Y}}\right]^T L^T(\Psi^T\alpha)\right]d\mathbf{Y}+\mathbf{U}_0, \tag{15}$$

где

$$L(\Psi^T\alpha)=\mathbf{I}_S\left(\frac{1}{(b-a)^2}-\Psi^T\alpha\right)+\left[0 \quad 0 \quad y_1\frac{\partial\Psi^T}{\partial y_2}\alpha \quad \left(\Psi^T+y_2\frac{\partial\Psi^T}{\partial y_2}\right)\alpha\right];$$

$$\mathbf{U}_0=[0{,}5 \quad 0{,}7 \quad 1 \quad 3]^T.$$

Вектор Ψ ортогональных функций был выбран в виде

$$\Psi=(\cos(\omega_0 y_1),\sin(\omega_0 y_1),\cos(\omega_0 y_2),\sin(\omega_0 y_2))$$

при $\omega_0=\frac{2}{3}\pi$.

В полученном уравнении вектор коэффициентов α определялся интегрированием выражения (14) при

$$G(\Psi^T\alpha)=\left[1+(z(t)-y_1^2(t))^2-\int_{-\infty}^{\infty}[(z(t)-y_1^2(t))^2\Psi^T\alpha]d\mathbf{Y}\right]\times$$

$$\times\ \Psi^T\alpha+y_1\frac{\partial\Psi^T}{\partial y_1}\alpha.$$

Интегрирование уравнения (14) осуществлено методом Рунге – Кутта четвертого порядка на временном интервале $t=[0,\,600]$ с с шагом 1 с. В результате получено усредненное на интервале [300, 600] с значение вектора $\mathbf{U}^{\text{opt}}=[0{,}212 \quad 0{,}452 \quad 0{,}092 \quad 2{,}11]^T$.

Заключение. Сравнение каждой компоненты искомого вектора $\mathbf{U}^{\text{opt}}$ с исходным истинным значением позволяет говорить о возможности идентификации с относительной точностью не более 5–10 %. Таким образом, приходим к выводу о возможном эффективном использовании подхода при решении задачи идентификации волновых возмущений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Салычев О. С.** Скалярное оценивание многомерных динамических систем. М.: Машиностроение, 1987.
2. **Фильтрация** и стохастическое управление в динамических системах /Под ред. К. Т. Леондеса. М.: Мир, 1980.
3. **Тихонов В. И., Харисов В. Н.** Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
4. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
5. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1974.
6. **Казаков И. Е., Артемьев В. М.** Оптимизация динамических систем случайной структуры. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 1 сентября 2000 г.