

А. П. Трифонов, Ю. Н. Прибытков

(Воронеж)

**ОБНАРУЖЕНИЕ КВАЗИДЕТЕРМИНИРОВАННОГО
ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ФОНА
С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ***

Выполнены синтез и анализ квазиправдоподобного алгоритма и алгоритма максимального правдоподобия обнаружения изображения с неизвестной интенсивностью при наличии фона с неизвестной интенсивностью для аппликативной модели взаимодействия полезного изображения и фона.

Необходимость в обнаружении изображений при наличии фона в условиях априорной параметрической неопределенности возникает при обработке изображений пространственно протяженных объектов. Вопросам обнаружения пространственно протяженных объектов посвящены работы [1–3] и др. В [1] алгоритмы обработки изображений синтезированы на основе аддитивной модели взаимодействия полезного изображения и фона. Такая модель не учитывает проявляющихся на практике эффектов затенения фона, и использование этой модели для обработки изображений пространственно протяженных объектов может привести к недостоверным результатам [2]. Аппликативная модель взаимодействия полезного изображения и фона, учитывающая тот факт, что имеющийся объект экранирует фон, использована в [2, 3]. В работе [2] проведены синтез и анализ алгоритма обнаружения аппликативного детерминированного изображения при наличии фона с постоянной неизвестной интенсивностью. В [3] предполагается, что изображение и фон не содержат неизвестных параметров и представляют собой гауссовские случайные поля. Однако на практике часто возникают ситуации, когда параметры изображения и фона неизвестны.

Цель данной работы – синтез и анализ квазиправдоподобного и максимально правдоподобного алгоритмов обнаружения квазидетерминированного изображения с неизвестными параметрами при наличии квазидетерминированного фона с неизвестными параметрами.

Пусть в двумерной области Ω доступна наблюдению реализация гауссовского случайного поля $x(\mathbf{r})$. Здесь $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ – радиус-вектор точки на плоскости, принадлежащей Ω . Положим, что при гипотезе H_1 поле $x(\mathbf{r})$ со-

* Работа выполнена при поддержке CRDF и Министерства образования РФ (проекты VZ-010-0 и E00-3.5-5).

держит полезное изображение $s(\mathbf{r}, \mathbf{a})$, фон $v(\mathbf{r}, \mathbf{b})$ и аддитивный гауссовский белый шум $n(\mathbf{r})$ с нулевым математическим ожиданием и односторонней спектральной плотностью N_0 . Будем считать, что в соответствии с аппликативной моделью взаимодействия полезное изображение занимает часть Ω_s области Ω , а фоновое излучение формируется областью Ω_F , дополняющей Ω_s до Ω такой, что $\Omega_s \cup \Omega_F = \Omega$, т. е. при гипотезе

$$H_1: x(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}, \Omega_s) s(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0) + I(\mathbf{r}, \Omega_F) v(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0) + n(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{a}_0 и \mathbf{b}_0 – истинные значения векторов неизвестных параметров полезного изображения и фона соответственно; $I(\mathbf{r}, \Omega) = 1$, если $\mathbf{r} \in \Omega$, и $I(\mathbf{r}, \Omega) = 0$, если $\mathbf{r} \notin \Omega$. При гипотезе H_0 будем считать, что полезное изображение $s(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0)$ отсутствует, а фон занимает всю область Ω , тогда поле $x(\mathbf{r})$ представляет собой сумму фона $v(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0)$ и белого шума, т. е. при гипотезе

$$H_0: x(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0) + n(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Как известно [4, 5], для решения задач проверки гипотез H_0 и H_1 необходимо формировать функционал отношения правдоподобия (ФОР) $\Lambda[H_1 | H_0]$ или его логарифм. Явный вид логарифма ФОР для случая, когда полезное изображение и фон представляют собой гауссовские случайные поля, получен в [3]. При отсутствии флуктуаций полезного изображения и фона выражение для логарифма ФОР принимает вид $L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ln \Lambda[H_1 | H_0] = L_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - L_0(\mathbf{b})$, где

$$L_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{2}{N_0} \int_{\Omega_s} x(\mathbf{r}) s(\mathbf{r}, \mathbf{a}) d\mathbf{r} + \frac{2}{N_0} \int_{\Omega_F} x(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}, \mathbf{b}) d\mathbf{r} - \frac{1}{N_0} \int_{\Omega_s} s^2(\mathbf{r}, \mathbf{a}) d\mathbf{r} - \frac{1}{N_0} \int_{\Omega_F} v^2(\mathbf{r}, \mathbf{b}) d\mathbf{r}, \quad (3)$$

$$L_0(\mathbf{b}) = \frac{2}{N_0} \int_{\Omega} x(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}, \mathbf{b}) d\mathbf{r} - \frac{1}{N_0} \int_{\Omega} v^2(\mathbf{r}, \mathbf{b}) d\mathbf{r}. \quad (4)$$

На основании выражений (3) и (4) получим

$$L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = L_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - L_0(\mathbf{b}) = \frac{2}{N_0} \int_{\Omega_s} x(\mathbf{r}) [s(\mathbf{r}, \mathbf{a}) - v(\mathbf{r}, \mathbf{b})] d\mathbf{r} - \frac{1}{N_0} \int_{\Omega_s} [s^2(\mathbf{r}, \mathbf{a}) - v^2(\mathbf{r}, \mathbf{b})] d\mathbf{r}. \quad (5)$$

Если истинные значения параметров полезного изображения \mathbf{a}_0 и фона \mathbf{b}_0 априори известны, то решение о наличии полезного изображения $s(\mathbf{r})$ в наблюдаемой реализации $x(\mathbf{r})$ выносится на основе сравнения ФОР или его логарифма (5) с некоторым порогом h [4–7]. При превышении порога

$$L(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) = L_1(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) - L_0(\mathbf{b}_0) > h \quad (6)$$

принимается решение в пользу гипотезы H_1 (полезное изображение есть). В противном случае при

$$L(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) = L_1(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0) - L_0(\mathbf{b}_0) < h \quad (7)$$

считают справедливой гипотезу H_0 (полезного изображения нет).

Одно из возможных решений задачи обнаружения изображения при неизвестных истинных значениях параметров полезного изображения \mathbf{a}_0 и фона \mathbf{b}_0 – применение квазиправдоподобного обнаружителя (КПО) [4]. Для синтеза КПО вместо истинных значений $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ используются ожидаемые (прогнозируемые) значения неизвестных параметров $\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*$. Следовательно, с порогом сравнивается величина $L(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*)$ (5) и КПО принимает решения согласно правилу

$$L(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} h. \quad (8)$$

В общем случае $\mathbf{a}^* \neq \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}^* \neq \mathbf{b}_0$. Однако при $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}_0$ КПО переходит в оптимальный обнаружитель (6), (7).

Обычно [5, 6] при решении задач обнаружения эффективность алгоритма обнаружения характеризуется величинами вероятностей ошибки ложной тревоги α и ошибки пропуска сигнала β . Согласно определению [4, 5] можем записать:

$$\alpha = P[H_1 | H_0] = P[L > h | H_0], \quad (9)$$

$$\beta = P[H_0 | H_1] = P[L < h | H_1]. \quad (10)$$

Здесь через $P[H_i | H_j]$, $i, j = 0, 1$, обозначена вероятность принятия решения о справедливости гипотезы H_i , в то время как верна гипотеза H_j . Таким образом, для нахождения α и β необходимо определить вероятности превышения логарифмом ФОП (5) порога h (9) и не превышения (10). Для этого необходимо располагать законом распределения случайной величины $L(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*)$ при каждой из гипотез H_i , $i = 0, 1$. Поскольку логарифм ФОП (5) представляет собой линейное преобразование гауссовского случайного поля, то величина $L(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*)$ подчиняется гауссовскому закону распределения. Отсюда

$$\alpha = 1 - \Phi((h - m_0)/\sigma_0), \quad (11)$$

$$\beta = \Phi((h - m_1)/\sigma_1). \quad (12)$$

Здесь

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp(-v^2/2) dv$$

– интеграл вероятности; $m_i = \langle L(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) | H_i \rangle$ – математическое ожидание логарифма ФОП (5) при гипотезе H_i , а $\sigma_i^2 = \langle [L(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) - m_i]^2 | H_i \rangle$ – дисперсия логарифма ФОП (5) при этой же гипотезе, $i = 0, 1$.

Часто для сравнения эффективности работы различных алгоритмов обнаружения используют значение порогового отношения сигнал/шум (ОСШ) z_t [6], при котором вероятности ошибок ложной тревоги и пропуска сигнала равны заданной величине P :

$$\alpha = \beta = P < 1/2. \quad (13)$$

Применительно к изображениям под ОСШ z^2 будем понимать удвоенное отношение энергии полезного изображения к спектральной плотности пространственного белого шума [5]:

$$z^2 = 2 \int_{\Omega} s^2(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0) d\mathbf{r} / N_0.$$

Выражая порог h из (11) и подставляя полученное значение в (12), с учетом (13) получим уравнение для определения порогового ОСШ:

$$(m_1 - m_0) / (\sigma_1 + \sigma_0) = \text{arc} \Phi(1 - P), \quad (14)$$

где $\text{arc} \Phi(\cdot)$ – функция, обратная интегралу вероятности.

Рассмотрим, в какой степени рассогласование между истинными \mathbf{a}_0 , \mathbf{b}_0 и прогнозируемыми \mathbf{a}^* , \mathbf{b}^* значениями параметров полезного изображения и фона ухудшает характеристики обнаружения. Для этого вычислим вероятности ошибок ложной тревоги (11) и пропуска сигнала (12). Найдем значения моментов логарифма ФОП (5), входящие в выражения (11) и (12):

$$\begin{aligned} m_0(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) &= \frac{2}{N_0} \int_{\Omega} v(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0) [s(\mathbf{r}, \mathbf{a}^*) - v(\mathbf{r}, \mathbf{b}^*)] d\mathbf{r} - \\ &- \frac{1}{N_0} \int_{\Omega} [s^2(\mathbf{r}, \mathbf{a}^*) - v^2(\mathbf{r}, \mathbf{b}^*)] d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) &= \frac{2}{N_0} \int_{\Omega} s(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0) [s(\mathbf{r}, \mathbf{a}^*) - v(\mathbf{r}, \mathbf{b}^*)] d\mathbf{r} - \\ &- \frac{1}{N_0} \int_{\Omega} [s^2(\mathbf{r}, \mathbf{a}^*) - v^2(\mathbf{r}, \mathbf{b}^*)] d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sigma_0^2(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = \sigma_1^2(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = \frac{2}{N_0} \int_{\Omega} [s(\mathbf{r}, \mathbf{a}^*) - v(\mathbf{r}, \mathbf{b}^*)]^2 d\mathbf{r}. \quad (17)$$

Подставив (15)–(17) в (14), получим уравнение для порогового ОСШ КПО (8):

$$2 \text{arc} \Phi(1 - P) = \frac{z_t \left(1 - 2Rz_F + z_F^2 + \frac{z_F^2}{z_t^2} (\epsilon_s - \epsilon_v) \right)}{z_F \sqrt{1 - 2Rz_F + z_F^2 + \frac{z_F^2}{z_t^2} (2\epsilon_s - 2\epsilon_v + \epsilon^2)}}. \quad (18)$$

$$z_F^2 = \frac{\int_{\Omega_s} s^2(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0) d\mathbf{r}}{\int_{\Omega_s} v^2(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0) d\mathbf{r}} \quad (19)$$

– отношение сигнал/фон для принятого полезного изображения и наблюдаемого фона в области, занятой изображением;

$$R = \frac{\int_{\Omega_s} s(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0) v(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0) d\mathbf{r}}{\sqrt{\int_{\Omega_s} s^2(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0) d\mathbf{r} \int_{\Omega_s} v^2(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0) d\mathbf{r}}}, \quad 0 \leq R \leq 1, \quad (20)$$

– коэффициент корреляции полезного изображения и фона в области, занятой изображением;

$$\varepsilon^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\Omega_s} \varepsilon^2(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}^*) d\mathbf{r}; \quad (21)$$

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}^*) = s(\mathbf{r}, \mathbf{a}^*) - s(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0) - [v(\mathbf{r}, \mathbf{b}^*) - v(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0)]; \quad (22)$$

$$\varepsilon_s = \frac{2}{N_0} \int_{\Omega_s} s(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0) \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}^*) d\mathbf{r}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_v = \frac{2}{N_0} \int_{\Omega_s} v(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0) \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}^*) d\mathbf{r}.$$

В частном случае обнаружения детерминированного изображения, параметры которого известны точно: $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}_0$, при наличии фона с известными параметрами $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}_0$ получаем $\varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_v = 0$. Тогда из (18) находим явное выражение для порогового ОСШ:

$$z_0 = \left(2z_F / \sqrt{1 - 2Rz_F + z_F^2} \right) \text{arc} \Phi(1 - P). \quad (24)$$

Уравнение (18) для определения порогового ОСШ z_t не удается решить явно в общем виде. Решение этого уравнения следует искать отдельно для каждого частного случая.

Рассмотрим ситуацию, когда неизвестными параметрами являются интенсивности полезного изображения и фона, т. е.

$$s(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = a s_1(\mathbf{r}), \quad v(\mathbf{r}, \mathbf{b}) = b v_1(\mathbf{r}), \quad \max s_1(\mathbf{r}) = \max v_1(\mathbf{r}) = 1. \quad (25)$$

В этом случае логарифм ФОП (5) принимает вид

$$L^* = L(a^*, b^*) = \frac{2}{N_0} \int_{\Omega_s} x(\mathbf{r}) [a^* s_1(\mathbf{r}) - b^* v_1(\mathbf{r})] d\mathbf{r} - \frac{1}{N_0} \int_{\Omega_s} [a^{*2} s_1^2(\mathbf{r}) - b^{*2} v_1^2(\mathbf{r})] d\mathbf{r}. \quad (26)$$

Подставляя (25) в (18)–(23), находим пороговое ОСШ для случая с неизвестными интенсивностями полезного изображения и фона:

$$z_t(\delta_a, \delta_b) = 2 \operatorname{arcs} \Phi(1 - P) \frac{z_F \sqrt{z_F^2 (1 + \delta_a)^2 - 2Rz_F (1 + \delta_a)(1 + \delta_b) + (1 + \delta_b)^2}}{z_F^2 (1 + \delta_a) - Rz_F [(1 + \delta_a) + (1 + \delta_b)] + (1 + \delta_b)}, \quad (27)$$

где $\delta_a = (a^* - a_0)/a_0$, $\delta_b = (b^* - b_0)/b_0$.

Из (27) видно, что если прогнозируемые и истинные значения интенсивностей полезного изображения и фона совпадают $a^* = a_0$, $b^* = b_0$, т. е. $\delta_a = 0$, $\delta_b = 0$, то пороговое ОСШ (27) совпадает с пороговым ОСШ для детерминированного изображения (24) $z_t(0, 0) = z_0$ при наличии детерминированного фона.

Найдем проигрыш в пороговом ОСШ из-за незнания истинных значений интенсивностей полезного изображения и фона КПО (26):

$$\chi(\delta) = \frac{z_t(\delta)}{z_0} = \frac{\sqrt{(1 - 2Rz_F + z_F^2)(z_F^2 - 2Rz_F \delta + \delta^2)}}{z_F^2 - Rz_F(1 + \delta) + \delta}, \quad (28)$$

где

$$\delta = (1 + \delta_b)/(1 + \delta_a) = b^* a_0 / (b_0 a^*). \quad (29)$$

На рис. 1, 2 сплошными линиями показаны зависимости проигрыша в пороговом ОСШ КПО от истинного значения отношения сигнал/фон $z_F^2 = a_0^2 \int_{\Omega_s} s_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} / \left(b_0^2 \int_{\Omega_s} v_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right)$ при различных значениях параметров R и δ .

Как следует из рис. 1, 2, проигрыш в эффективности КПО возрастает по мере увеличения отклонения δ (29) от единицы и с увеличением коэффициента корреляции полезного изображения и фона (20). Кроме того, эти зависимости показывают, что проигрыш в пороговом ОСШ может быть значительным и как функция отношения сигнал/фон имеет немонотонный характер. Вычисляя производную выражения (28) по переменной z_F , получим, что максимальный проигрыш достигается при $z_F^2 = \delta$, т. е. при следующем соотношении прогнозируемых и истинных значений интенсивностей полезного изображения и фона:

$$b^*/a^* = a_0 \int_{\Omega_s} s_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} / \left(b_0 \int_{\Omega_s} v_1^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right). \quad (30)$$

Из анализа выражения (30) можно сделать качественный вывод о том, что наиболее неблагоприятен для КПО случай, при котором прогнозируемые значения интенсивностей полезного изображения и фона обратно пропорциональны истинным.

Повысить эффективность обнаружения изображения с неизвестными параметрами при наличии фона с неизвестными параметрами можно, если одновременно производить оценку неизвестных параметров [4]. Подставляя, в частности, в (5) вместо неизвестных параметров \mathbf{a} и \mathbf{b} их оценки макси-

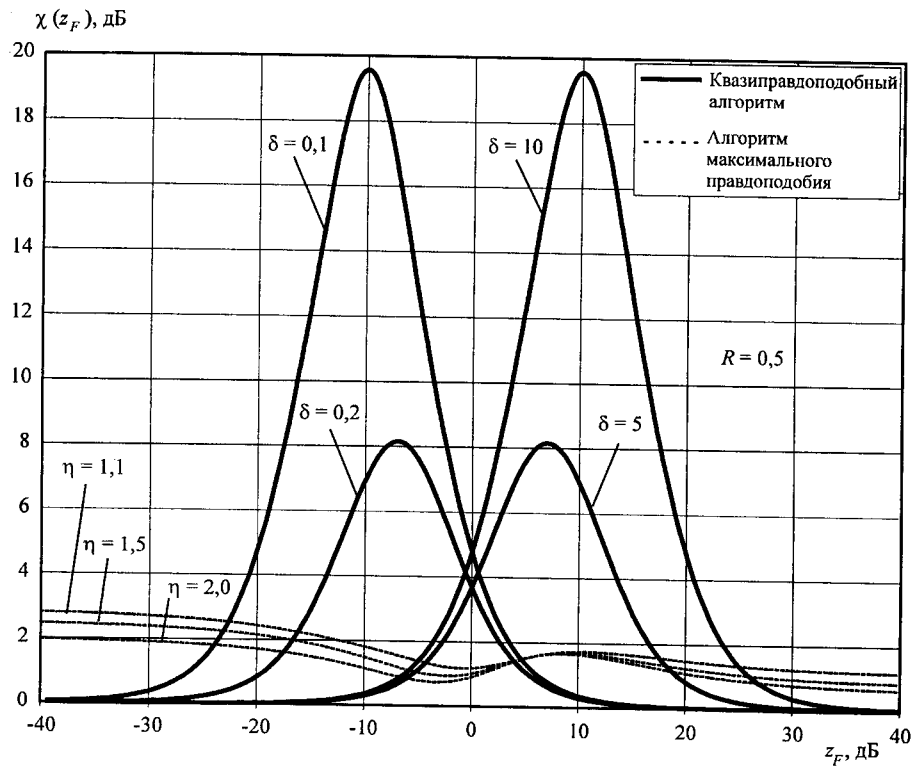


Рис. 1

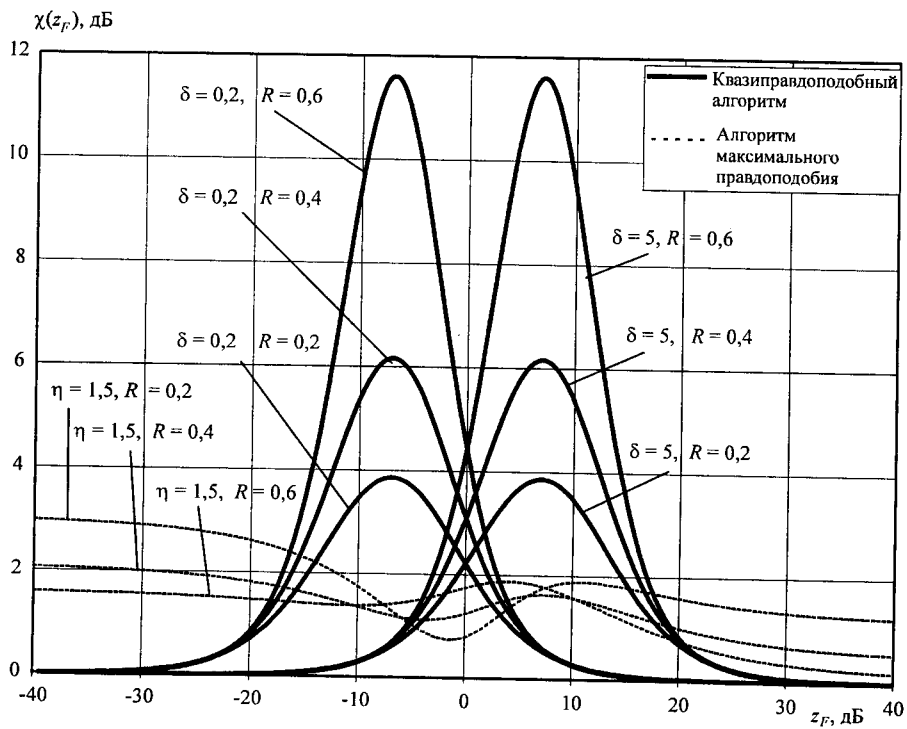


Рис. 2

мального правдоподобия, приходим к обобщенному алгоритму максимального правдоподобия (АМП) [4]. В соответствии с АМП правило обнаружения изображения сводится к сравнению с порогом величины

$$L = \sup_{a, b} L_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \sup_b L_0(\mathbf{b}) \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\lesseqgtr}} h. \quad (31)$$

Рассмотрим случай неизвестных интенсивностей полезного изображения и фона. Подставляя (25) в (3), (4) и проводя максимизацию логарифмов ФОП (3) и (4) по параметрам a, b , в соответствии с правилом (31) получим

$$L = \sup_{a, b} L_1(a, b) - \sup_b L_0(b) = \left[\int_{\Omega_s} x(\mathbf{r})s(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right]^2 / \left[N_0 \int_{\Omega_s} s^2(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right] + \left[\int_{\Omega_f} x(\mathbf{r})v(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right]^2 / \left[N_0 \int_{\Omega_f} v^2(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right] - \left[\int_{\Omega} x(\mathbf{r})v(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right]^2 / \left[N_0 \int_{\Omega} v^2(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right]. \quad (32)$$

Отметим, что в отличие от КПО (8) и оптимального алгоритма обнаружения (6), (7), АМП (31), (32) является существенно нелинейным.

Найдем вероятности ошибок ложной тревоги (9) и пропуска сигнала (10) для АМП (31). Для этого определим закон распределения достаточной статистики (32). Согласно (32) логарифм ФОП представляет собой нелинейное преобразование гауссовского поля $x(\mathbf{r})$. Поэтому для нахождения плотности вероятности случайной величины L воспользуемся методом преобразования гауссовской плотности вероятности [6]. Введем в рассмотрение стандартные гауссовские случайные величины:

$$\xi_s = (y - m_y)/\sigma_y, \quad \xi_v = (p - m_p)/\sigma_p, \quad \xi_f = (q - m_q)/\sigma_q, \quad (33)$$

где

$$y = \frac{2a_0}{N_0} \int_{\Omega_s} x(\mathbf{r})s(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad p = \frac{2b_0}{N_0} \int_{\Omega_f} x(\mathbf{r})v(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad q = \frac{2b_0}{N_0} \int_{\Omega} x(\mathbf{r})v(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

а $m_y, m_p, m_q, \sigma_y^2, \sigma_p^2, \sigma_q^2$ – математические ожидания и дисперсии случайных величин y, p, q соответственно. Случайные величины ξ_s, ξ_v, ξ_f имеют нулевые математические ожидания $\langle \xi_s \rangle = \langle \xi_v \rangle = \langle \xi_f \rangle = 0$, единичные дисперсии и коэффициенты взаимной корреляции $\langle \xi_s \xi_v \rangle = 0$, $\langle \xi_s \xi_f \rangle = R/\sqrt{\eta}$, $\langle \xi_v \xi_f \rangle = \sqrt{(\eta-1)/\eta}$, где $\eta = \int_{\Omega} v^2(\mathbf{r})d\mathbf{r} / \int_{\Omega_s} v^2(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, $\eta \geq 1$, – отношение энергии

фона во всей области наблюдения к энергии фона в области, занятой полезным изображением (при его наличии).

Подставляя в (32) реализацию наблюдаемых данных (2), (1) и учитывая обозначения (33), запишем значения логарифма ФОП при гипотезах H_0 и H_1 :

$$L[H_0] = \frac{1}{2} \left(\left[\xi_s + \frac{Rz}{z_F} \right]^2 + \left[\xi_v + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta-1} \right]^2 - \left[\xi_f + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta} \right]^2 \right), \quad (34)$$

$$L[H_1] = \frac{1}{2} \left([\xi_s + z]^2 + \left[\xi_v + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta-1} \right]^2 - \left[\xi_f + R \frac{z}{\sqrt{\eta}} + \frac{z}{z_F} \frac{\eta-1}{\sqrt{\eta}} \right]^2 \right) \quad (35)$$

как нелинейные функции совместно гауссовских случайных величин (33).
Используя известный метод функционального преобразования плотностей $C_0(\vec{h})$

$$\begin{aligned} & \times \left[\Phi \left(\frac{R \frac{z}{z_F} - R(x\sqrt{\eta-1} - y\sqrt{\eta}) + \sqrt{2h - \left(x + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta-1}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta}\right)^2}}{\sqrt{1-R^2}} \right) - \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{R \frac{z}{z_F} - R(x\sqrt{\eta-1} - y\sqrt{\eta}) - \sqrt{2h - \left(x + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta-1}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta}\right)^2}}{\sqrt{1-R^2}} \right) \right] dx dy, \quad (36) \\ & \beta = \frac{\eta}{2\pi} \int \int_{C_1(\vec{h})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(x\sqrt{\eta-1} - y\sqrt{\eta})^2 + x^2] \right\} \times \\ & \times \left[\Phi \left(\frac{z - R(x\sqrt{\eta-1} - y\sqrt{\eta}) + \sqrt{2h - \left(x + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta-1}\right)^2 + \left(y + R \frac{z}{\sqrt{\eta}} + \frac{z}{z_F} \frac{\eta-1}{\sqrt{\eta}}\right)^2}}{\sqrt{1-R^2}} \right) - \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{z - R(x\sqrt{\eta-1} - y\sqrt{\eta}) - \sqrt{2h - \left(x + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta-1}\right)^2 + \left(y + R \frac{z}{\sqrt{\eta}} + \frac{z}{z_F} \frac{\eta-1}{\sqrt{\eta}}\right)^2}}{\sqrt{1-R^2}} \right) \right] dx dy. \quad (37) \end{aligned}$$

В выражениях (36) и (37) области интегрирования $C_0(L)$ и $C_1(L)$ определяются условиями

$$C_0(L): 2L - \left(x + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta-1} \right)^2 + \left(y + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta} \right)^2 > 0, \quad (38)$$

$$C_1(L): 2L - \left(x + \frac{z}{z_F} \sqrt{\eta-1} \right)^2 + \left(y + R \frac{z}{\sqrt{\eta}} + \frac{z}{z_F \sqrt{\eta}} (\eta-1) \right)^2 > 0. \quad (39)$$

Для того чтобы найти пороговое ОСШ z_m АМП, необходимо подставить (36) и (37) в систему уравнений

$$\alpha(z_m, h) = P, \quad \beta(z_m, h) = P. \quad (40)$$

К сожалению, найти аналитическое решение системы уравнений (40) не удастся, а ее численное решение приводит к существенным вычислительным затратам. Поэтому получим приближенное выражение для z_m . Из (34) и (35) следует, что значение логарифма ФОП при гипотезе H_i , $i=0,1$, можно представить в виде суммы двух случайных величин $L[H_i] = w + M_i$, где $w = [\xi_s^2 + \xi_v^2 - \xi_f^2]/2$ – негауссовская случайная величина с математическим ожиданием $m_w = 1/2$ и дисперсией $\sigma_w^2 = (1-R^2)/\eta$, а M_i – гауссовские случайные величины с математическими ожиданиями

$$m_{M_0} = -\frac{z^2}{2z_F^2}(1-R^2), \quad m_{M_1} = \frac{z^2}{2z_F^2} \left(z_F^2 + \eta - 1 - \frac{1}{\eta} (Rz_F + \eta - 1)^2 \right) \quad (41)$$

и дисперсиями

$$\sigma_{M_0}^2 = -2m_{M_0}, \quad \sigma_{M_1}^2 = 2m_{M_1}. \quad (42)$$

Нетрудно показать, что если отношение энергии фона во всей области наблюдения к спектральной плотности белого шума велико, т. е.

$$\frac{2}{N_0} \int_{\Omega} v^2(\mathbf{r}, \mathbf{b}_0) d\mathbf{r} \gg 1, \quad (43)$$

то $\sigma_w^2 \ll \sigma_{M_0}^2$, а при

$$z^2 = \frac{2}{N_0} \int_{\Omega} s^2(\mathbf{r}, \mathbf{a}_0) d\mathbf{r} \gg 1 \quad (44)$$

$\sigma_w^2 \ll \sigma_{M_1}^2$. Поэтому при выполнении условий (43) и (44) значения логарифма ФОП для гипотез H_i , $i=0,1$, можно приближенно положить равными $L[H_i] \approx m_w + M_i$, а сам логарифм ФОП (32) приближенно считать гауссовской случайной величиной с математическими ожиданиями и дисперсиями

$$m_i = 1/2 + m_{M_i}, \quad \sigma_i^2 = \sigma_{M_i}^2. \quad (45)$$

Используя выражения (41), (42) и (45), можем найти вероятности ошибок ложной тревоги и пропуска сигнала для АМП в гауссовском приближении:

$$\alpha_G = 1 - \Phi \left(\frac{2h - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{z_F^2} (1 - R^2)}{2 \sqrt{\frac{z^2}{z_F^2} (1 - R^2)}} \right),$$

$$\beta_G = \Phi \left(\frac{2h - \frac{1}{2} - z^2 - \frac{z^2}{z_F^2} (\eta - 1) + \frac{1}{\eta} \left(Rz + \frac{z}{z_F} (\eta - 1) \right)^2}{2 \sqrt{z^2 + \frac{z^2}{z_F^2} (\eta - 1) - \frac{1}{\eta} \left(Rz + \frac{z}{z_F} (\eta - 1) \right)^2}} \right).$$

Подставляя (41), (42) и (45) в уравнение (14) и решая его относительно переменной z , находим выражение для порогового ОСШ в гауссовском приближении:

$$z_G = 2 \operatorname{arcs} \Phi(1 - P) \frac{z_F \sqrt{z_F^2 - 2Rz_F + 1 - \frac{1}{\eta} (Rz_F - 1)^2 + \sqrt{(1 - R^2)}}}{z_F^2 - 2Rz_F + 1 - \frac{1}{\eta} (Rz_F - 1)^2 + (1 - R^2)}. \quad (46)$$

Сопоставление результатов расчета порогового ОСШ z_G в гауссовском приближении (46) с пороговым ОСШ z_m , полученным численным решением системы уравнений (40), позволяет определить границы применимости упрощенной формулы (46). Так, при $R = 0,5$, $P = 10^{-3}$ (для $10^{-2} \leq z_F \leq 10^2$)

$$0,85 \leq z_m / z_G \leq 1,15,$$

т. е. погрешность формулы (46) не превышает 15%. Иными словами, уже при $P = 0,001$, когда пороговое ОСШ даже не превосходит 10 (хотя формула (46) справедлива при выполнении условий (43) и (44)), получаем, что пороговое ОСШ с достаточной точностью может быть рассчитано по простой формуле гауссовского приближения (46). При уменьшении вероятности ошибки пороговое ОСШ возрастает и возрастает точность формулы (46). Таким образом, анализ эффективности работы АМП с достаточной точностью можно провести на основе порогового ОСШ (46), полученного в гауссовском приближении. Тогда проигрыш в пороговом ОСШ для АМП, рассчитанный в гауссовском приближении, запишется в виде

$$\chi_G = \frac{z_G}{z_0} = \frac{\sqrt{z_F^2 - 2Rz_F + 1} \left[\sqrt{z_F^2 - 2Rz_F + 1 - \frac{1}{\eta} (Rz_F - 1)^2 + \sqrt{(1 - R^2)}} \right]}{z_F^2 - 2Rz_F + 1 - \frac{1}{\eta} (Rz_F - 1)^2 + (1 - R^2)}. \quad (47)$$

Для сравнения эффективности функционирования КПО и АМП на рис. 1, 2 пунктирными линиями показан проигрыш (47) для АМП, рассчитанный в гауссовском приближении. Из приведенных графиков видно, что при некоторых значениях отношения сигнал/фон КПО более эффективен, чем АМП. Это обусловлено конечной точностью оценивания интенсивностей полезного изображения и фона. Однако АМП более эффективен в весьма широком диапазоне отношений сигнал/фон, содержащем точку $z_F = \delta$, где проигрыш КПО может достигать значений порядка десятков децибел, в то время как проигрыш АМП не превосходит 3 дБ.

Рассмотрим случай, когда $\eta \rightarrow \infty$, что соответствует неограниченному увеличению области наблюдения Ω при фиксированном размере области Ω_s , занимаемой изображением. Такое увеличение области наблюдения приводит к неограниченному увеличению области Ω_F , в пределах которой производится оценка уровня фона, и, следовательно, к возрастанию точности его оценивания. В пределе при $\eta = \infty$ оценка уровня фона абсолютно точна. Тогда проигрыш в пороговом ОСШ обусловлен только незнанием интенсивности полезного изображения и определяется выражением

$$\chi_{G_1} = \frac{\sqrt{z_F^2 - 2Rz_F + 1} \left[\sqrt{z_F^2 - 2Rz_F + 1} + \sqrt{(1 - R^2)} \right]}{z_F^2 - 2Rz_F + 1 + (1 - R^2)}. \quad (48)$$

Нетрудно показать, что если априори предположить неизвестной только интенсивность полезного изображения, проигрыш в пороговом ОСШ относительно случая известной интенсивности сигнала в гауссовском приближении также будет определяться выражением (48).

Следовательно, одним из способов увеличения эффективности функционирования АМП обнаружения полезного изображения с неизвестной интенсивностью при наличии фона с неизвестной интенсивностью является увеличение области наблюдения, поскольку это приводит к увеличению точности оценки интенсивности фона. Так, например, $\chi_G < \sqrt{2}$ и проигрыш не превышает 3 дБ, если

$$\eta > \eta_{\min} = B^2 \sqrt{\left[\frac{3}{4} A^2 + C \left(C - \frac{A}{\sqrt{2}} \right) - \frac{A}{2} \sqrt{\frac{A^2}{4} - C \left(C - \frac{A}{\sqrt{2}} \right)} \right]},$$

$$A = \sqrt{z_F - 2Rz_F + 1}, \quad B = Rz_F - 1, \quad C = \sqrt{1 - R^2}.$$

В частности, для $R \leq 0,6$ и $10^{-2} \leq z_F \leq 10^2$ величина $\eta_{\min} \approx 1,5$.

Таким образом, КПО может быть эффективно применен только в случае, если есть гарантия различия величин z_F и δ порядка десятков децибел. Если это условие не выполняется, то целесообразно применять более сложный и более эффективный АМП. Этот алгоритм обеспечивает сравнительно небольшой и относительно стабильный проигрыш в пороговом ОСШ по сравнению со случаем априори известных интенсивностей полезного изображения и фона в широком диапазоне изменения отношения сигнал/фон.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

3. Трифонов А. П., Прибытков Ю. Н. Обнаружение случайных изображений пространственно протяженных объектов, затеняющих фон // Автометрия. 2000. № 4. С. 14.
4. Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфенов В. И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами /Под ред. А. П. Трифонова. Воронеж: ВГУ, 1991.
5. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов /Под ред. П. А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
6. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966.
7. Васильев К. К., Драган Я. П., Казаков В. А. и др. Прикладная теория случайных процессов и полей /Под ред. К. К. Васильева, В. А. Омельченко. Ульяновск: УлГТУ, 1995.

*Воронежский государственный университет,
E-mail: trif@rf.phys.vsu.ru*

*Поступила в редакцию
26 июня 2001 г.*

Подписка на наш журнал – залог Вашего успеха!