

В. В. Котляр, С. Н. Хонина, В. А. Сойфер, Я. Ванг

(Самара, Россия – Пекин, КНР)

### ИЗМЕРЕНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА СВЕТОВОГО ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ДИФРАКЦИОННОГО ОПТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА\*

Из общей формулы для расчета орбитального углового момента светового поля получены частные случаи для многомодовых пучков Гаусса – Лагерра и Бесселя. Описан эксперимент по измерению орбитального углового момента с помощью дифракционного оптического элемента. При этом измерение интенсивности осуществлялось однократно в заданном наборе точек плоскости.

**Введение.** Угловой момент когерентного лазерного пучка является его важной характеристикой. Различают поляризационный (спиновый) и орбитальный угловые моменты. Для светового пучка с линейной поляризацией отличным от нуля может быть только орбитальный угловой момент. В работах [1, 2] выведена формула спиновой и орбитальной частей углового момента. В работе [3] рассмотрена методика измерения орбитального углового момента с помощью оптической схемы, состоящей из сферических и цилиндрических линз, а также с помощью измерения моментов распределения интенсивности в поперечном сечении пучка на разных расстояниях оптической оси.

В данной работе из общей формулы для расчета орбитального углового момента светового поля получены частные случаи для многомодовых пучков Гаусса – Лагерра и Бесселя, а также описан эксперимент по измерению орбитального углового момента с помощью дифракционного оптического элемента (ДОЭ). При этом измерение интенсивности осуществлялось однократно в заданном наборе точек плоскости.

**Теоретическое обоснование.** Подробный вывод уравнения для углового момента параксиального светового поля дан в [1, 2]. В работе [1] при выводе формулы для поляризационного (спинового) углового момента не учтены проекции векторов электрического и магнитного полей на ось распространения  $z$ . В [2] учтены проекции векторов электромагнитного поля на ось  $z$  с привлечением уравнения непрерывности.

В данной работе вывод формулы для углового момента параксиального электромагнитного поля дан только на основе первых двух уравнений Максвелла без привлечения уравнения непрерывности.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-0139012, № 00-15-96114, № 00-01-00031).

Пусть поперечная составляющая электрического вектора монохроматического поля имеет вид

$$\mathbf{E}_\perp(x, y, z) = U(x, y, z) \mathbf{n} \exp(-ikz), \quad (1)$$

где  $U(x, y, z)$  – медленно меняющаяся скалярная амплитуда светового поля ( $kU \gg \partial U / \partial z$ );  $\mathbf{n} = (\cos\theta, i\sin\theta)$  – единичный комплексный вектор поляризации поля в плоскости  $(x, y)$ ;  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $z$  – ось распространения.

Уравнения Максвелла для монохроматической волны в однородном пространстве имеют известный вид:

$$\mathbf{H} = \frac{ic}{\omega\mu} [\nabla \times \mathbf{E}], \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{ic}{\omega\varepsilon} [\nabla \times \mathbf{H}], \quad (3)$$

где  $k = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu}$ ,  $k_0 = \omega/c$ ;  $\varepsilon, \mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости однородной среды;  $c, \omega$  – скорость и циклическая частота света в вакууме.

Подставив (1) в (2) и (3), с учетом параксиальности поля получим

$$E_x = U \cos\theta e^{-ikz}, \quad E_y = iU \sin\theta e^{-ikz},$$

$$H_x \cong -\frac{ik}{k_0\mu} U \sin\theta e^{-ikz}, \quad H_y \cong \frac{k}{k_0\mu} U \cos\theta e^{-ikz}, \quad (4)$$

$$H_z \cong \frac{i}{k_0\mu} \left( i\sin\theta \frac{\partial U}{\partial x} - \cos\theta \frac{\partial U}{\partial y} \right) e^{-ikz}, \quad E_z \cong -\frac{i}{k} \left( \cos\theta \frac{\partial U}{\partial x} + i\sin\theta \frac{\partial U}{\partial y} \right) e^{-ikz}.$$

Плотность углового момента электрического поля определяется по формуле из [4]:

$$\mathbf{M} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \mathbf{r} \times \mathbf{S} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \mathbf{r} \times \left\{ \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \right\}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{S}$  – вектор Умова – Пойтинга;  $\operatorname{Re}$  – реальная часть числа.

Проекция вектора углового момента на ось распространения  $z$  имеет вид

$$M_z = \frac{\varepsilon}{16\pi\omega} \left\{ \sin 2\theta \left[ x \frac{\partial(UU^*)}{\partial x} + y \frac{\partial(UU^*)}{\partial y} \right] - i \left[ x \left( U \frac{\partial U^*}{\partial y} - U^* \frac{\partial U}{\partial y} \right) - y \left( U \frac{\partial U^*}{\partial x} - U^* \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] \right\}. \quad (6)$$

Линейная плотность проекции углового момента параксиального светового поля не зависит от  $z$  и определяется с помощью суммирования в плоскости  $(x, y)$ :

$$J_z = \iint_{-\infty}^{\infty} M_z(x, y, z) dx dy = \frac{\varepsilon}{16\pi\omega} \left\{ \sin 2\theta \iint_{-\infty}^{\infty} \left( x \frac{\partial I}{\partial x} + y \frac{\partial I}{\partial y} \right) dx dy - \right. \\ \left. - i \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ x \left( U \frac{\partial U^*}{\partial y} - U^* \frac{\partial U}{\partial y} \right) - y \left( U \frac{\partial U^*}{\partial x} - U^* \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] dx dy \right\}, \quad (7)$$

где  $I = UU^*$ . Первое слагаемое в уравнении (7) описывает поляризационный угловой момент светового поля. Поляризационный угловой момент света изучался в работе [2]. Из (7) следует, что для линейно поляризованного света при  $\theta$ , равном  $0, \pi/2, \pi$ , поляризационный угловой момент равен нулю. В данной работе рассматривается только второе слагаемое уравнения (7), которое описывает орбитальный угловой момент поля. Для нормированного орбитального углового момента можно записать уравнение:

$$J_{z0} = -\frac{i}{2\omega} \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} \left[ x \left( U \frac{\partial U^*}{\partial y} - U^* \frac{\partial U}{\partial y} \right) - y \left( U \frac{\partial U^*}{\partial x} - U^* \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] dx dy}{\iint_{-\infty}^{\infty} UU^* dx dy}. \quad (8)$$

Скалярную функцию амплитуды светового поля  $U(x, y)$  при любом фиксированном  $z$ , выраженную в полярных координатах, можно представить как линейную комбинацию угловых гармоник:

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(r) e^{in\varphi}, \quad (9)$$

где

$$E_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (10)$$

Формулы (9), (10) дают разложение поля по угловым гармоникам [5]. В [6] показано, что оператор углового момента

$$\mathbf{M} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad (11)$$

в полярных координатах выражает поворот поля на малый угол в плоскости  $(x, y)$ :

$$\mathbf{M} = \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

С учетом (12) уравнение (8) можно переписать в виде

$$J_{z0} = -\frac{i}{2\omega} \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left( U \frac{\partial U^*}{\partial \varphi} - U^* \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) r dr d\varphi}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} U U^* r dr d\varphi}. \quad (13)$$

Подставив разложение (9) в уравнение (13), получим

$$J_{z0} = -\frac{1}{\omega} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} n I_n \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \right)^{-1}, \quad (14)$$

где  $I_n = \int_0^\infty |E_n(r)|^2 r dr$  – частичная энергия  $n$ -й угловой гармоники.

Формула (14) будет использована далее для определения орбитального углового момента света с помощью ДОЭ и ее можно конкретизировать для светового поля, являющегося суперпозицией мод Гаусса – Лагерра [7]:

$$U(r, \varphi, z) = \exp \left[ -ikz + \frac{ikr^2}{2R(z)} - \frac{r^2}{\sigma^2(z)} \right] \times \\ \times \sum_{n, m} C_{nm} \left( \frac{\sqrt{2r}}{\sigma(z)} \right)^{|m|} L_n^{|m|} \left( \frac{2r^2}{\sigma^2(z)} \right) \exp[-i\beta_{nm}(z) + im\varphi], \quad (15)$$

где  $\beta_{nm}(z) = (2n + |m| + 1) \arctg(z/z_0)$ ;  $z_0 = \pi\sigma_0^2/\lambda$ ;  $\sigma^2(z) = \sigma_0^2(1 + z^2/z_0^2)$ ;  $R(z) = z(1 + z_0^2/z^2)$ . Моды Гаусса – Лагерра представляют собой решения уравнения медленно меняющихся амплитуд (или параксиального уравнения распространения), а также собственные функции интегрального преобразования Френеля, поэтому эти моды являются параксиальными пучками. Заметим, что в литературе используются два типа обобщенных многочленов Лагерра. Так, в [8] приведена формула

$$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x), \quad (16)$$

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad (17)$$

где  $L_n(x)$  – обычные многочлены Лагерра.

Многочлены, определенные формулой (16), имеют следующую нормировку:

$$\int_0^\infty x^m e^{-x} [L_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}. \quad (18)$$

Из (16) следует, что при  $m > n$   $L_n^m(x) \equiv 0$ , поэтому здесь и далее будем полагать, что  $0 < m \leq n$ . В [9–11] приведено другое определение обобщенных (присоединенных) многочленов Лагерра:

$$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x) \quad (19)$$

с нормировкой

$$\int_0^\infty x^m e^{-x} [L_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n+m)!}{n!}. \quad (20)$$

Многочлены из (16) при разных  $m$  имеют разную степень  $n - m$ , а многочлены из (19) при разных  $m$  имеют одинаковую степень  $n$ , причем  $m$  может быть больше  $n$  и может быть отрицательным. В дальнейшем будут использованы многочлены, определенные выражениями (19), (20).

Подставив уравнение (15) в (14), с учетом (20) получим

$$J_{z_0} = -\frac{1}{\omega} \left( \sum_{n,m} m |C_{nm}|^2 \frac{(n+m)!}{n!} \right) \left( \sum_{n,m} |C_{nm}|^2 \frac{(n+m)!}{n!} \right)^{-1}. \quad (21)$$

Заметим, что угловой момент не зависит от фундаментального радиуса  $\sigma_0$  мод Гаусса – Лагерра.

Формулу (14) можно также конкретизировать для светового поля, являющегося суперпозицией мод Бесселя [7]:

$$U(r, \varphi, z) = \exp(ik\sigma_0 z) \sum_{n,m} C_{nm} J_m(kr\rho_n) \exp\left[i \frac{2\pi n z}{z_0} + im\varphi\right], \quad (22)$$

где  $\rho_n = \sqrt{1 - (\sigma_0 + n\lambda/z_0)^2}$ ,  $\sigma_0 = \cos\alpha_0$  ( $\alpha_0$  – минимальный угол наклона конических волн),  $z_0$  – период продольной периодичности поля. Моды Бесселя (22) являются решением уравнения Гельмгольца и обладают бесконечной энергией (как и плоская волна), и в этом смысле они являются непараксиальными пучками. Однако если принять условие, что  $\rho_n \ll 1$ , то уравнение (22) будет также описывать и параксиальные бesselевы пучки. На практике моды Бесселя формируются с помощью ДОЭ, имеющих конечный диаметр, поэтому обладают конечной энергией и сохраняют модовый характер на конечном расстоянии, которое пропорционально диаметру ДОЭ и обратно пропорционально масштабному коэффициенту функции Бесселя  $k\rho_n$ . Нормировка функций Бесселя определяется выражением из [8]:

$$\int_0^R J_m^2\left(\frac{\gamma_n r}{R}\right) r dr = \frac{R^2}{2} [J'_m(\gamma_n)]^2, \quad (23)$$

где  $\gamma_n$  – корни функции Бесселя:  $J_m(\gamma_n) = 0$ ,  $\gamma_n \approx kR\rho_n$ ;  $R$  – эффективный радиус исследуемого светового поля;  $J'_m(x)$  – производная функции Бесселя.

Подставив (22) в (14), с учетом (23) получим

$$J_{z0} = -\frac{1}{\omega} \left\{ \sum_{n,m} m |C_{nm}|^2 [J'_m(\gamma_n)]^2 \right\} \left\{ \sum_{n,m} |C_{nm}|^2 [J'_m(\gamma_n)]^2 \right\}^{-1}. \quad (24)$$

Заметим, что угловой момент не зависит от радиуса  $R$  светового поля.

**Измерение орбитального углового момента.** Определить орбитальный угловой момент (13) или (14) можно с помощью измерения моментов интенсивности второго порядка [3]:  $\left\langle x \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ ,  $\left\langle y \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$ , которые в свою очередь

определяются измерением других моментов:  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle y^2 \rangle$ ,  $\langle xy \rangle$ ,  $\left\langle x \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$ ,  $\left\langle y \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ ,  $\left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right\rangle$ ,  $\left\langle \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right\rangle$ . В [3] описана методика измерения этих моментов интен-

сивности света с помощью оптической схемы со сферическими и цилиндрическими линзами, а также с помощью измерения интенсивности света на разных плоскостях вдоль оси распространения в свободном пространстве. Заметим, что вторые моменты интенсивности определяются следующим образом:

$$\left\langle x \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = -\frac{i}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left( Ux \frac{\partial U^*}{\partial y} - U^* x \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy, \quad (25)$$

$$\left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = -\frac{i}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left( U \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} - U^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) dx dy. \quad (26)$$

В данной работе предлагается более эффективный способ измерения орбитального углового момента с помощью фазового дифракционного оптического элемента. Функция пропускания ДОЭ имеет вид

$$\tau(r, \varphi) = \sum_{n=-N}^N e^{-in\varphi} \exp \left[ i \frac{k}{f} r \rho_n \cos(\varphi - \theta_n) \right], \quad (27)$$

где  $(\rho_n, \theta_n)$  – полярные координаты в фурье-плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием  $f$  (рис. 1). Методы расчета фазового ДОЭ, функция пропускания которого равна линейной комбинации ортогональных функций, рассмотрены в [7].

Пусть поле  $U(r, \varphi)$  в плоскости  $z$ , описываемое формулой (9), падает на ДОЭ, имеющий функцию пропускания (27). Тогда в плоскости фотоприемника (см. рис. 1) получим амплитуду света  $F(\rho, \theta)$ , выраженную с помощью преобразования Фурье:

$$F(\rho, \theta) = -\frac{i}{\lambda f} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} U(r, \varphi) \tau(r, \varphi) \exp \left[ -i \frac{k}{f} r \rho \cos(\varphi - \theta) \right] r dr d\varphi =$$

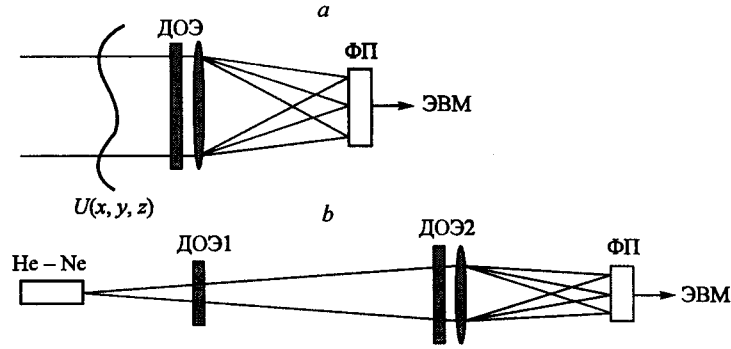


Рис 1. Оптическая схема для измерения орбитального углового момента светового поля

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{i}{\lambda f} \sum_{n,m} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} E_n(r) e^{i(n-m)\varphi} \exp\left[i \frac{k}{f} r \rho_n \cos(\varphi - \theta_n)\right] \times \\
 &\quad \times \exp\left[-i \frac{k}{f} r \rho \cos(\varphi - \theta)\right] r dr d\varphi = \\
 &= \frac{2\pi(-i)^{n-m+1}}{\lambda f} \sum_{n,m} e^{i(n-m)\theta} \int_0^{\infty} E_n(r) J_{n-m}\left(\frac{k}{f} r \xi\right) r dr, \quad (28)
 \end{aligned}$$

где  $J_{n-m}(x)$  – функция Бесселя  $(n-m)$ -го порядка;

$$\begin{aligned}
 \xi &= \sqrt{\rho_n^2 + \rho^2 - 2\rho_n \rho \cos(\theta - \theta_n)}; \\
 \theta &= \arctg\left(\frac{\rho_n \sin \theta_n - \rho \sin \theta}{\rho_n \cos \theta_n - \rho \cos \theta}\right). \quad (29)
 \end{aligned}$$

Из выражений (28), (29) следует, что при  $\rho = \rho_n$ ,  $\theta = \theta_n$  ( $\xi = 0$ ) и  $m \neq n$  имеем

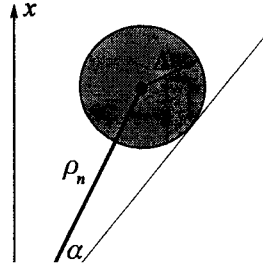
$$\int_0^{\infty} E_n(r) J_{n-m}(0) r dr = 0, \quad (30)$$

а при  $m = n$  имеем

$$\int_0^{\infty} E_n(r) J_0\left(\frac{k}{f} r \xi\right) r dr = \hat{E}_n(\xi) = \hat{E}_n(\rho = \rho_n, \theta = \theta_n). \quad (31)$$

С учетом равенства Парсеваля получим

$$I_n = \int_0^{\infty} |E_n(r)|^2 r dr = \int_{-\alpha}^{\alpha} |\hat{E}_n(\rho - \rho_n, \theta - \theta_n)|^2 \rho d\rho d\theta, \quad (32)$$



где  $\Delta = \lambda f / 2R$  – радиус малой окружности с центром в точке  $(\rho_n, \theta_n)$ ;  $R = \frac{\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle}{2}$  – эффективный радиус светового поля, падающего на ДОЭ;  $2\alpha$  –

угол, в который вписана окружность (рис. 2). Подставив измеренные парциальные энергии  $I_n$ , определенные с помощью уравнения (32), в (14), получим значение орбитального углового момента.

**Эксперимент.** Схема эксперимента показана на рис. 1, *b*. Луч света от He-Ne-лазера попадает на ДОЭ1 радиусом  $R = 3$  мм, формируемым вращающимся двухмодовым пучком Бесселя, комплексная амплитуда которого пропорциональна функции

$$E_1 = J_{-1}(20r)e^{-i\varphi} + J_1(40r)e^{i\varphi}. \quad (33)$$

Во втором эксперименте формировался пучок с амплитудой

$$E_2 = J_{-2}(30r)e^{-i2\varphi} + 2J_1(20r)e^{i\varphi}. \quad (34)$$

Орбитальный угловой момент для этих пучков, рассчитанный по формуле (24), имеет вид

$$\omega J_{z0}^{(1)} = -0,336 \quad (35)$$

с учетом параксиальных вкладов каждой моды  $\int_0^3 J_{-1}^2(20r)rdr = 0,04807$  и

$\int_0^3 J_1^2(40r)rdr = 0,02390$  для пучка  $E_1$  и

$$\omega J_{z0}^{(2)} = 0,502 \quad (36)$$

с учетом  $\int_0^3 J_{-2}^2(30r)rdr = 0,03192$  и  $\int_0^3 J_1^2(20r)rdr = 0,04807$  для пучка  $E_2$ .

После фазового ДОЭ1 световой пучок попадает на фазовый ДОЭ2, пропускание которого описывается функцией (27). В нашем эксперименте использовались ДОЭ, изготовленные в Университете Йенсуу (Финляндия) по



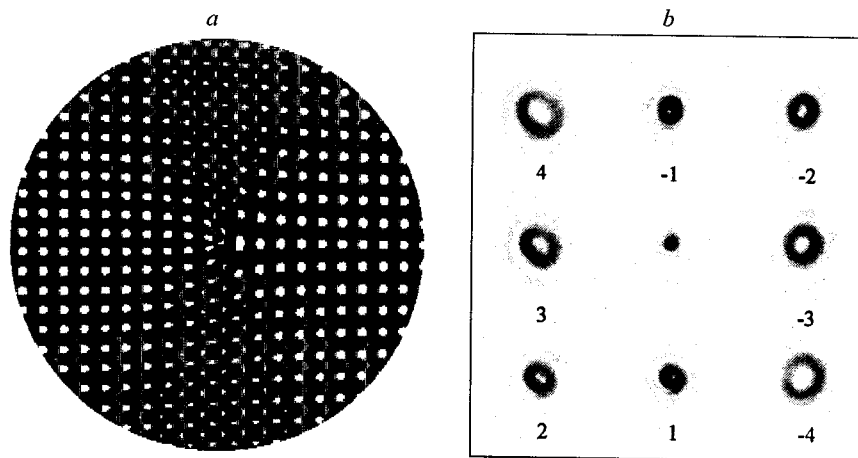


Рис. 3. Бинарная фаза 8-канального фильтра угловых гармоник (а) и распределение интенсивности в спектральной плоскости при освещении плоским пучком (б)

технологии прямой записи электронным лучом генератора изображений Leica LION LV1 в тонком слое полиметилметакрилата, осажденном на подложку плавленного кварца [12]. Для ДОЭ1, формирующих вращающиеся пучки Бесселя, с помощью реактивного ионного травления в подложке создавался 16-уровневый микрорельеф, максимальная глубина которого для длины волны света 0,633 мкм и показателя преломления 1,46 равна 1,29 мкм. В качестве ДОЭ2 использовался бинарный 8-порядковый фазовый фильтр угловых гармоник с глубиной рельефа 0,69 мкм.

На рис. 3 показаны фаза изготовленного ДОЭ2 и экспериментальное распределение интенсивности пространственного спектра при освещении плоским пучком. Радиус ДОЭ2 равен 10 мм, 2000 × 2000 отсчетов, размер минимальной площади травления 10 × 10 мкм.

На рис. 4, а показана центральная часть фазовой функции ДОЭ1, который формирует бesselев двухмодовый пучок (33). Радиус ДОЭ1 равен 3 мм, 1200 × 1200 отсчетов, размер минимальной площади травления 5 × 5 мкм. На рис. 4, б представлена экспериментальная картина поперечного распределения интенсивности пучка  $E_1$  (полутонный негатив) на расстоянии 725 мм от ДОЭ1. Бesselева мода (22) описывает непараксиальное световое поле, которое распространяется бездифракционно. Однако такое бездифракционное распространение светового пучка, сформированного ДОЭ1 с конечной апертурой, возможно на конечном расстоянии  $z_0$ , определяемом максимальным углом наклона конических волн:  $z_0 \cong (kR)/\alpha$ , где  $\alpha$  – масштабный коэффициент в аргументе функции Бесселя  $J_n(\alpha r)$ ;  $R$  – радиус ДОЭ1. Для поля  $E_1$  из выражения (33) расстояние  $z_0$  равно 750 мм, для поля  $E_2$  из выражения (34) – 1000 мм.

На расстоянии 725 мм от ДОЭ1 располагается ДОЭ2. Нужно заметить, что это расстояние может быть выбрано произвольно (в некотором диапазоне), так как при распространении светового пучка угловой момент сохраняется. На рис. 4, с, d показаны экспериментальные распределения интенсивности в плоскости пространственного спектра сферической линзы с фокусным расстоянием 300 мм, расположенной за ДОЭ2. Различия в этих рисунках обусловлены погрешностями эксперимента, в частности неточной установкой ПЗС-камеры в фокальную плоскость линзы и неточным центрированием

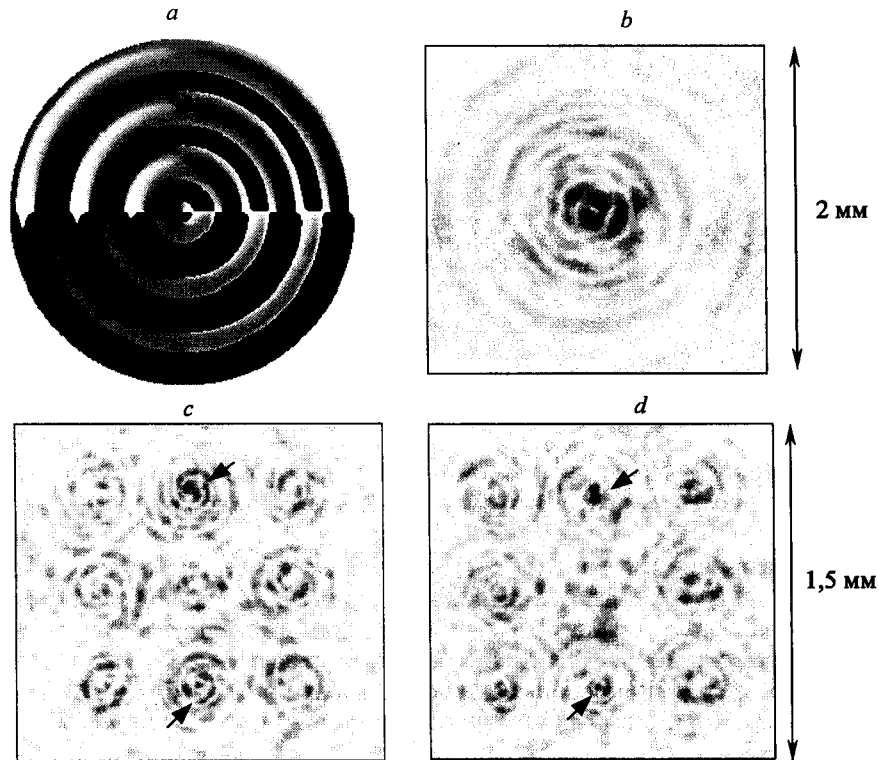


Рис. 4. Результаты эксперимента с вращающимся бesselевым пучком  $J_{-1}(20r)e^{-i\varphi} + J_1(40r)e^{i\varphi}$ : 16-градационная фаза ДОЭ, формирующего пучок (a); распределение интенсивности на расстоянии 725 мм от плоскости ДОЭ (b); картины распределения интенсивности в спектральной плоскости фильтра угловых гармоник (c, d), показанного на рис. 3, a

ДОЭ2 и анализируемого (сформированного) пучка. Значения интенсивности в заданных точках пространственного спектра (показаны стрелками на рис. 4, c, d), соответствующие парциальной энергии угловых гармоник светового пучка, равны:  $I_{-1} = 0,96$  (см. рис. 4, c),  $I_{-1} = 0,93$  (см. рис. 4, d);  $I_1 = 0,43$  (см. рис. 4, c),  $I_1 = 0,41$  (см. рис. 4, d). Подставив эти значения в (14), получим экспериментальное значение проекции орбитального углового момента для пучка  $E_1$ :  $\omega J_{z0}^{(1)} = -0,381$  (см. рис. 4, c),  $\omega J_{z0}^{(1)} = -0,388$  (см. рис. 4, d). Сравнивая эти два значения с теоретической величиной  $\omega J_{z0}^{(1)} = -0,336$ , получим среднее относительное отклонение экспериментальных данных от теоретических около 14 %.

Второй эксперимент оказался более точным. На рис. 5, a показана центральная часть фазы ДОЭ1, формирующего вращающийся двухмодовый бesselев пучок  $E_2$  из выражения (34). Размер ДОЭ1 такой же, как и в первом эксперименте. На рис. 5, b показано экспериментальное поперечное распределение интенсивности пучка  $E_2$  на расстоянии 575 мм от ДОЭ1. На рис. 5, c, d приведены две экспериментальные картины дифракции, зарегистрированные телекамерой в плоскости пространственного спектра сферической линзы, расположенной за ДОЭ2. Различия в рис. 5, c и d относятся к погрешностям эксперимента, описанным выше. Измеренные в точках, отмеченных

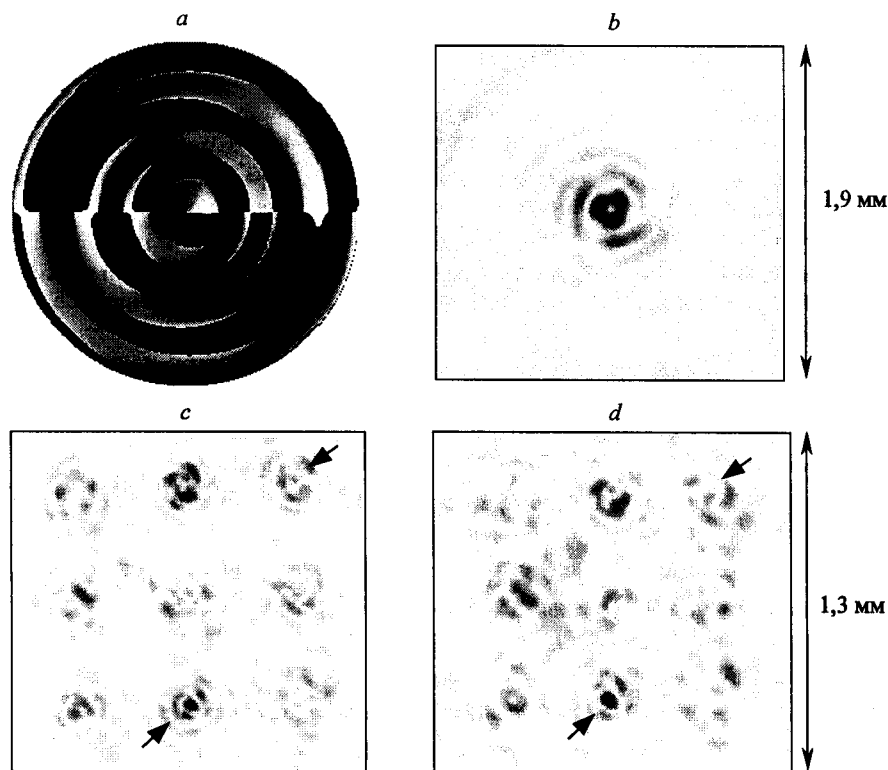


Рис. 5. Результаты эксперимента с вращающимся бesselевым пучком  $J_{-2}(30r)e^{-i2\varphi} + 2J_1(20r)e^{i\varphi}$ : 16-градационная фаза ДОЭ, формирующего пучок (a); распределение интенсивности на расстоянии 575 мм от плоскости ДОЭ (b); картины распределения интенсивности в спектральной плоскости фильтра угловых гармоник (c, d), показанного на рис. 3, a

на рис. 5, c, d стрелками, значения парциальной энергии угловых гармоник в пучке  $E_2$  равны:  $I_1 = 0,99$  (см. рис. 5, c),  $I_1 = 0,96$  (см. рис. 5, d);  $I_{-2} = 0,17$  (см. рис. 5, c),  $I_{-2} = 0,18$  (см. рис. 5, d). Из формулы (14) получим экспериментальные значения проекции орбитального углового момента для второго пучка  $E_2$ :  $\omega J_{z0}^{(2)} = 0,560$  (см. рис. 5, c),  $\omega J_{z0}^{(2)} = 0,526$  (см. рис. 5, d). Среднее относительное отклонение эксперимента от теории ( $\omega J_{z0}^{(2)} = 0,502$ ) составляет около 8 %.

**Заключение.** В работе получены формулы расчета проекции на ось пространства орбитального углового момента для параксиального многомодового лазерного пучка Гаусса – Лагерра и непараксиального многомодового пучка Бесселя.

На примере двух вращающихся двухмодовых лазерных пучков Бесселя, которые сформированы с помощью многоградационного фазового ДОЭ, с помощью второго фазового ДОЭ, предназначенного для детектирования угловых гармоник, экспериментально измерена проекция орбитального углового момента. Отклонение эксперимента от теории для двух различных пучков составило 14 и 8 %.

Авторы выражают благодарность группе проф. Я. Турунена (Университет Йюенсуу, Финляндия) за изготовление образцов ДОЭ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gao C., Wei G., Weber H. Orbital angular momentum of the beam and the second order intensity moments // Science in China, series A. 2000. 43, N 11.
2. Волостников В. Г., Котова С. П., Рахматулин М. А. Управление скоростью вращения частицы, захваченной сфокусированным лазерным пучком, с помощью жидкокристаллического модулятора // Известия СШЦ РАН. 2000. 2, № 1. С. 48.
3. Gao C., Wei G., Weber H. Intensity moments of astigmatic beams and their propagation in ABCD optical systems // Proc. of the Sino-Russia Academy Conf., Beijing, China, Sept., 2000. P. 51.
4. Simpson N. B., Dholakia K., Allen L., Padgett M. J. Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spinner // Opt. Lett. 1997. 22, N 1. P. 52.
5. Kotlyar V. V., Khonina S. N., Soifer V. A. Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics // Journ. Mod. Opt. 1998. 45, N 7. P. 1495.
6. Kotlyar V. V., Khonina S. N., Soifer V. A. et al. Selecting angular harmonics using diffractive optical elements // Proc. SPIE. 2000. 4403.
7. Методы компьютерной оптики /Под ред. В. А. Сойфера. М.: Физматлит, 2000.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968.
11. Справочник по специальным функциям /Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
12. Laakkonen P., Lautanen J., Kettunen V. et al. Multilevel diffractive elements in SiO<sub>2</sub> by electron beam lithography and proportional etching with analog negative resist // Journ. Mod. Opt. 1999. 46. P. 1295.

*Институт систем обработки изображений РАН,  
E-mail: kotlyar@smr.ru*

*Поступила в редакцию  
11 марта 2001 г.*