Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2002, том 38, № 3

УДК 535.411.854

С. П. Ильиных, В. И. Гужов

(Новосибирск)

ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ РАСШИФРОВКИ ИНТЕРФЕРОГРАММ С ПОШАГОВЫМ СДВИГОМ*

Рассмотрен общий принцип построения алгоритмов расшифровки интерферограмм, основанных на методе пошагового фазового сдвига. Предложен матричный аппарат решения системы трансцендентных уравнений с произвольными фазовыми сдвигами.

Задача определения фазы по интерференционным картинам сводится к решению системы трансцендентных уравнений вида [1]:

$$I_i(x,y) = A(x,y)(1+V(x,y)\cos(\phi(x,y)+\delta_i)), \quad i \in 0,\ldots,N-1, \tag{1}$$

где $I_i(x,y)$ – интенсивность интерференционной картины; $A(x,y)$ – средняя интенсивность; $V(x,y)$ – средняя видность; $\phi(x,y)$ – искомая разность интерферирующих полей; δ_i – вносимый фазовый сдвиг; N – число сдвигов. (Далее для упрощения выражений обозначение (x,y) опускается.)

В случае, когда $\delta_i = (i+1)\delta_0$, т. е. $\delta_1 = 2\delta_0$, $\delta_2 = 3\delta_0$ и так далее, решение системы уравнений (1) можно найти разложением в ряд Фурье [2]:

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{\sum_i I_i \cos(i\delta_i)}{\sum_i I_i \sin(i\delta_i)}. \tag{2}$$

Однако этот подход неприменим, если фазовые сдвиги δ_i произвольны. В этом случае приходится решать систему трансцендентных уравнений (1) непосредственно, что при большом числе сдвигов довольно сложно.

В данной работе рассматривается принцип построения разрешающих алгоритмов при произвольных фазовых сдвигах. Представим выражение (1) в векторной форме:

$$\mathbf{I} = A\mathbf{R} + (AV\cos\phi)\mathbf{C} + (AV\sin\phi)\mathbf{S}, \tag{3}$$

где $\mathbf{R} = (1,\ldots,1)^T$, $\mathbf{C} = (\cos\delta_0, \ldots, \cos\delta_{N-1})^T$, $\mathbf{S} = (\sin\delta_0, \ldots, \sin\delta_{N-1})^T$, размер-

* Работа выполнена при поддержке Международного фонда INTAS 00-135.

ность векторов определяется числом фазовых сдвигов. Несложно показать, что

$$AV\sin\phi = \frac{\mathbf{I}\cdot\mathbf{C}^{\perp}}{\mathbf{S}\cdot\mathbf{C}^{\perp}}, \qquad AV\cos\phi = \frac{\mathbf{I}\cdot\mathbf{S}^{\perp}}{\mathbf{C}\cdot\mathbf{S}^{\perp}}, \tag{4}$$

где оператор $a\cdot b$ означает скалярное произведение векторов, а $\mathbf{S}^{\perp}$ и $\mathbf{C}^{\perp}$ – векторы, ортогональные векторам $\mathbf{S},\mathbf{R}$ и $\mathbf{C},\mathbf{R}$ соответственно. Учитывая свойство скалярного произведения, получим $\mathbf{S}\cdot\mathbf{C}^{\perp} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{S}^{\perp}$. Тогда

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{\mathbf{I}\cdot\mathbf{C}^{\perp}}{\mathbf{I}\cdot\mathbf{S}^{\perp}} \tag{5}$$

или

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{\mathbf{I}^{\perp}\cdot\mathbf{C}}{\mathbf{I}^{\perp}\cdot\mathbf{S}}. \tag{6}$$

В последнем случае требуется определить лишь один вектор $\mathbf{I}^{\perp}$. Для этого удобно использовать матричный оператор $\mathbf{I}^{\perp} = M\mathbf{I}$. Матрица преобразования M должна удовлетворять следующим требованиям: $(M\mathbf{I})\mathbf{I} = 0$ и $M\mathbf{R} = 0$.

Например, при трех фазовых сдвигах этим условиям удовлетворяет кососимметричная матрица

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Тогда из (6) получим следующий алгоритм расшифровки:

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{(M\mathbf{I})\cdot\mathbf{C}}{(M\mathbf{I})\cdot\mathbf{S}} = \operatorname{arctg}\frac{(I_1-I_2)c_0+(I_2-I_0)c_1+(I_0-I_1)c_2}{(I_1-I_2)s_0+(I_2-I_0)s_1+(I_0-I_1)s_2}, \tag{8}$$

где $c_i = \cos\delta_i$ и $s_i = \sin\delta_i$ – соответствующие компоненты векторов $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$.

При нечетном числе фазовых сдвигов больше трех матрица M получается путем симметричного продолжения матрицы (7):

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Например, при пяти сдвигах алгоритм расшифровки примет вид

$$\phi = \mathrm{arctg}\frac{(I_1 - I_2 + I_3 - I_4)c_0 + (I_2 - I_0 + I_4 - I_3)c_1 +}{(I_1 - I_2 + I_3 - I_4)s_0 + (I_2 - I_0 + I_4 - I_3)s_1 +}\ldots$$

$$\ldots\frac{+ (I_0 - I_1 + I_3 - I_4)c_2 + (I_1 - I_0 + I_4 - I_2)c_3 + (I_0 - I_1 + I_2 - I_3)c_4}{+ (I_0 - I_1 + I_3 - I_4)s_2 + (I_1 - I_0 + I_4 - I_2)s_3 + (I_0 - I_1 + I_2 - I_3)s_4}. \quad (10)$$

При четном количестве фазовых сдвигов матрицу M можно представить в виде

$$M = \begin{bmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \vdots & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 1 & \vdots & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

При четырех сдвигах получим следующий алгоритм:

$$\phi = \mathrm{arctg}\frac{(I_2 - I_3)(c_1 - c_0) + (I_1 - I_0)(c_2 - c_3)}{(I_2 - I_3)(s_1 - s_0) + (I_1 - I_0)(s_2 - s_3)}. \quad (12)$$

Заметим, что при числе фазовых сдвигов более трех, кроме самостоятельных решений уравнений расшифровки (5) и (6), можно получить дополнительные решения путем линейной комбинации решений, найденных для трехкомпонентных подвекторов $\mathbf{I}^{(\cdot)}$ и соответствующих им подвекторов $\mathbf{C}^{(\cdot)}$ и $\mathbf{S}^{(\cdot)}$:

$$\phi = \mathrm{arctg}\frac{\sum\limits_m \mathbf{I}^{(m)}\mathbf{C}^{\perp^{(m)}}}{\sum\limits_m \mathbf{I}^{(m)}\mathbf{S}^{\perp^{(m)}}} = \mathrm{arctg}\frac{\sum\limits_m \begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_i^{\perp} \\ C_j^{\perp} \\ C_k^{\perp} \end{bmatrix}}{\sum\limits_m \begin{bmatrix} I_i \\ I_j \\ I_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_i^{\perp} \\ S_j^{\perp} \\ S_k^{\perp} \end{bmatrix}}, \quad (13)$$

где $m = C_N^3 = \dfrac{N!}{3!(N-3)!}$ – число возможных сочетаний. Например, при четырех сдвигах возможны следующие комбинации подвекторов $\mathbf{I}^{(\cdot)}$:

$$\mathbf{I}^{(0)} \to \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{(1)} \to \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{(2)} \to \begin{bmatrix} I_0 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{(3)} \to \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Отметим, что если фазовые сдвиги имеют кратную величину, то рассмотренные алгоритмы расшифровки переходят непосредственно в (2).

Таким образом, получен обобщенный алгоритм, позволяющий получать решения системы трансцендентных уравнений (1) при произвольных фазовых сдвигах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Creath K.** Phase-shifting speckle interferometry // Appl. Opt. 1985. **24**, N 18. P. 3053.
2. **Surrel Y.** Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping // Appl. Opt. 1996. **35**, N 1. P. 51.

Новосибирский государственный технический университет,
E-mail: ls@ftf.nstu.ru

Поступило в редакцию 8 января 2002 г.