РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 2002

УДК 519.68

В. Ю. Корнилов

(Санкт-Петербург)

СИСТЕМА МОМЕНТНЫХ ИНВАРИАНТОВ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Известные семь моментных инвариантов изображения приведены к простому виду. Это позволило продолжить ряд моментных инвариантов.

В 1962 г. с помощью алгебраической теории инвариантов были получены семь моментных инвариантов изображения [1]. В [2] была уточнена основная теорема [1], однако до сих пор известно только семь моментных инвариантов [3].

Моментные инварианты выражаются через центральные моменты

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x,y)\,dxdy, \qquad p,q = 0,1,2,\ldots,$$

$$(m_{00} = 1,\ m_{01} = 0,\ m_{10} = 0)$$

функции яркости изображения $f(x,y)$ в виде

$$I_1 = m_{20} + m_{02}, \tag{1}$$

$$I_2 = (m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2, \tag{2}$$

$$I_3 = (m_{30} - 3m_{12})^2 + (3m_{21} - m_{03})^2, \tag{3}$$

$$I_4 = (m_{30} + m_{12})^2 + (m_{21} + m_{03})^2, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} I_5 = {} & (m_{30} - 3m_{12})(m_{30} + m_{12})[(m_{30} + m_{12})^2 - 3(m_{21} + m_{03})^2] + \\ & + (3m_{21} - m_{03})(m_{21} + m_{03})[3(m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + m_{03})^2], \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} I_6 = {} & (m_{20} - m_{02})[(m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + m_{03})^2] + \\ & + 4m_{11}(m_{30} + m_{12})(m_{21} + m_{03}), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} I_7 = {} & (3m_{21} - m_{03})(m_{30} + m_{12})[(m_{30} + m_{12})^2 - 3(m_{21} + m_{03})^2] - \\ & - (m_{30} - 3m_{12})(m_{21} + m_{03})[3(m_{30} + m_{12})^2 - (m_{21} + m_{03})^2]. \end{aligned} \tag{7}$$

Выражения (1)–(7) инвариантны к повороту изображения вокруг начала координат.

В данной работе моментные инварианты приводятся к простому виду. Для этого используется представление моментов в полярной системе координат:

$$m_{pq} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^{p+q}\cos^p\theta\sin^q\theta f(r\cos\theta,\, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

После интегрирования по r

$$m_{pq} = \int_0^{2\pi}\cos^p\theta\sin^q\theta F_n(\theta)d\theta\,, \tag{8}$$

где $n = p + q$. Функции $F_n(\theta)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$F_n(\theta) = \frac{a_{n0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}\cos(k\theta) + b_{nk}\sin(k\theta)),$$

$$a_{nk} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(\theta)\cos(k\theta)d\theta = A_{nk}\cos\varphi_{nk},$$

$$b_{nk} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(\theta)\sin(k\theta)d\theta = A_{nk}\sin\varphi_{nk},$$

где A_{nk} – амплитуды, а φ_{nk} – фазы гармоник.

После подстановки (8) в (1)–(7) и использования тригонометрических формул сложения углов и кратных углов получается:

$$I_1 = \pi a_{20}, \quad I_2 = \pi^2 A_{22}^2, \quad I_3 = \pi^2 A_{33}^2, \quad I_4 = \pi^2 A_{31}^2,$$

$$I_5 = \pi^4 A_{33} A_{31}^3 \cos(\varphi_{33} - 3\varphi_{31}),$$

$$I_6 = \pi^3 A_{22} A_{31}^2 \cos(\varphi_{22} - 2\varphi_{31}),$$

$$I_7 = \pi^4 A_{33} A_{31}^3 \sin(\varphi_{33} - 3\varphi_{31}).$$

Как видно, инварианты $I_1 - I_4$ тривиальны, а I_7 – то же самое, что и I_5.

Обобщая полученное представление моментных инвариантов и выполняя обратные преобразования, можно реконструировать все возможные моментные инварианты.

Тривиальные моментные инварианты получаются из тождества $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_{n_i k_i}, \tag{9}$$

где c_i – целые со знаком коэффициенты, а разности $n_i - k_i$ – положительные четные числа или нули.

Остальные моментные инварианты получаются из $\sin\varphi$ или $\cos\varphi$ с аргументами вида (9) при условии $\sum_{i=1}^{N} c_i k_i = 0$ (см. [4]).

Обратные преобразования выполняются следующим образом.

С помощью тригонометрических формул сложения углов и кратных углов $\sin\varphi$ или $\cos\varphi$ преобразуется в выражение, содержащее степени $\sin\varphi_{n_i k_i}$ и $\cos\varphi_{n_i k_i}$. По определению

$$\sin\varphi_{n_i k_i} = \frac{1}{\pi A_{n_i k_i}} \int_0^{2\pi} F_{n_i}(\theta)\sin(k_i\theta)d\theta.$$

Под интегралом $\sin(k_i\theta)$ раскрывается по формуле кратных углов. В результате получается выражение, содержащее

$$\int_0^{2\pi} F_{n_i}(\theta)\cos^{k_i - \nu}\theta \sin^{\nu}\theta d\theta = \int_0^{2\pi} F_{n_i}(\theta)\cos^{k_i - \nu}\theta \sin^{\nu}\theta (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^{(n_i - k_i)/2} d\theta,$$

где $\nu = 1, 3, 5, \ldots$. Затем под интегралом раскрывается степень суммы. После этого получается выражение, содержащее

$$\int_0^{2\pi} F_{n_i}(\theta)\cos^{n_i - \nu - w}\theta \sin^{\nu + w}\theta d\theta = m_{pq},$$

где $w = 0, 2, 4, \ldots, n_i - k_i$, $n_i - \nu - w = p$, $\nu + w = q$ $(p + q = n_i)$. Амплитуды гармоник A_{nk} выражаются через моменты аналогично $(A_{nk} = \sqrt{a_{nk}^2 + b_{nk}^2})$.

Следует отметить, что инвариантность к повороту изображения вокруг начала координат сохраняется и в случае нецентральных моментов.

Остается открытым вопрос о возможности восстановления изображения по известным моментным инвариантам. В связи с этим необходимо указать на простую полную систему аффинных инвариантов изображения, позволяющих восстановить изображение с точностью до аффинного преобразования [4–6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hu M-K.** Visual pattern recognition by moment invariants // IRE Trans. on Inform. Theory. 1962. February. P. 179.
2. **Reiss T. H.** The revised fundamental theorem of moment invariants // IEEE Trans. PAMI. 1991. N 8. P. 830.
3. **Wood J.** Invariant pattern recognition: a review //Pattern Recogn. 1996. N 1. P. 1.
4. **Корнилов В. Ю.** Простое инвариантное описание изображения // Автометрия. 2000. № 1. С. 104.
5. **Корнилов В. Ю.** Инвариантное описание изображения // Автометрия. 1996. № 2. С. 71.
6. **Корнилов В. Ю.** Аффинно-инвариантное представление изображения и контура // Автометрия. 1999. № 5. С. 60.

Поступила в редакцию 30 марта 2001 г.