

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ**

УДК 621.39 : 519.2

**В. Н. Васюков, Д. В. Голещихин***(Новосибирск)***ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ  
НА ОСНОВЕ ГИББСОВСКОГО ОПИСАНИЯ\***

Предлагается алгоритм восстановления изображений, подвергшихся линейному размытию и локальному нелинейному искажению, наблюдаемых в аддитивном гауссовском шуме. Устанавливается связь между каузальной авторегрессионной моделью, описывающей изображение, и распределением Гиббса. Нелинейный итерационный алгоритм восстановления изображения построен на основе метода стохастической релаксации. Приводятся результаты применения предложенного алгоритма для восстановления реального изображения при известных искажениях.

**Введение.** Восстановление изображений представляет собой одну из важнейших задач цифровой обработки изображений [1]. Задача восстановления изображений, подвергшихся не только линейным, но и нелинейным искажениям, имеет особенности, затрудняющие ее решение. Во-первых, нелинейность задачи не позволяет использовать хорошо разработанные методы фильтрации в частотной области, например метод винеровской фильтрации. Во-вторых, двумерность изображений и некаузальный характер большинства искажений сильно затрудняют применение подходов, разработанных для одномерной нелинейной марковской фильтрации. Решение задачи нелинейного восстановления на основе поиска максимума апостериорной вероятности методом наискорейшего градиентного спуска [2] практически нереализуемо из-за большой размерности задачи (число переменных равно числу точек восстанавливаемого изображения).

В работе [3] на основе аппарата распределения Гиббса с использованием процедуры стохастической релаксации построен итерационный алгоритм восстановления дискретных изображений с небольшим числом (3 и 5) уровней квантования. В то же время реальные полутоновые изображения имеют большое количество уровней квантования и обычно описываются непрерывнозначными, в частности, гауссовскими моделями.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (проект № Г00-4.2-7).

Данная работа посвящена построению алгоритма нелинейного восстановления изображений, описываемых авторегрессионной гаусс-марковской моделью, на основе стохастической релаксации. Для этого устанавливается связь параметров авторегрессионной модели и гиббсовской модели изображения.

Далее приводятся основные понятия, связанные с применением гиббсовских моделей в обработке изображений и необходимые для изложения полученных результатов. Более полную информацию о распределении Гиббса можно найти в [3].

Распределение Гиббса может использоваться для описания дискретных случайных процессов и полей произвольной размерности. В этой работе для определенности рассматривается двумерная последовательность (поле)  $X = \{x(m, n) : (m, n) \in L\}$ , заданная на прямоугольной решетке (растре)  $L = \{(m, n) : 0 \leq m < M, 0 \leq n < N\}$  размером  $M \times N$ . Для построения гиббсовской модели необходимо определить на множестве  $L$  отношение соседства, причем соседними могут быть объявлены произвольные точки раstra. Множество всех попарно соседних точек раstra  $c \subseteq L$  называется кликой. Множество всех клик, определяемое заданным отношением соседства, обозначается  $C$ . Каждой клике  $c \in C$  сопоставляется функция  $V_c(X)$ , называемая потенциалом клики и зависящая только от значений последовательности в точках клики  $c$ .

Распределение Гиббса поля  $X$  полностью определяется множеством  $C$  и потенциалами  $V_c(X)$  и имеет вид

$$P(X = x) = Z_x^{-1} \exp \left\{ - \sum_{c \in C} V_c(x) \right\}, \quad (1)$$

где  $Z_x$  – нормирующая константа;  $x$  – реализация поля  $X$ .

Метод стохастической релаксации применяется для генерирования реализаций гиббсовского поля с заданным распределением. По известному алгоритму Метрополиса [4] для текущего элемента  $s$ , выбранного согласно некоторому порядку обхода раstra, новое значение  $x'_s$  поля генерируется с учетом прежнего значения  $x_s$  при помощи датчика случайных чисел в соответствии с некоторым заданным распределением  $q(x'_s | x_s)$  и принимается с вероятностью

$$P = \min \left\{ 1, \frac{P(X = x')q(x'_s | x_s)}{P(X = x)q(x_s | x'_s)} \right\}, \quad (2)$$

где  $x'$  и  $x$  – реализации поля  $X$ , совпадающие всюду, кроме точки  $s$ , в которой они принимают значения  $x'_s$  и  $x_s$  соответственно. С вероятностью  $1 - P$  в текущей точке сохраняется значение  $x_s$  и происходит переход к следующей точке раstra. Необходимо, чтобы обрабатываемые в последовательные моменты времени элементы не были соседними и при бесконечном повторении итераций каждый элемент раstra обрабатывался бесконечное число раз. Независимо от начальной реализации распределение поля сходится к (1) при неограниченном увеличении числа итераций [4]. Обычно в качестве  $q(\cdot | \cdot)$  выбирается симметричное распределение, так что  $q(x'_s | x_s) = q(x_s | x'_s)$ , тогда

отношение в (2) может быть представлено в виде

$$\frac{P(X = x')}{P(X = x)} = \frac{P(X_s = x'_s | X' \setminus x'_s)P(X' \setminus x'_s)}{P(X_s = x_s | X \setminus x_s)P(X \setminus x_s)} = \frac{P(X_s = x'_s | X' \setminus x'_s)}{P(X_s = x_s | X \setminus x_s)}, \quad (3)$$

где  $X_s$  – значение поля в точке  $s$ , а  $X \setminus x_s$  обозначает поле  $X$  за вычетом элемента  $x_s$ . Учитывая, что

$$P(X_s = x_s | X \setminus x_s) = \left( e^{-\sum_{c \in C_s} V_c(x)} \right) / \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum_{c \in C_s} V_c(x)} dx_s \right),$$

где  $C_s = \{c: s \in c\}$  – множество клик, содержащих точку  $s$  (их объединение за вычетом точки  $s$  образует окрестность точки  $s$ ), отношение (3) принимает вид

$$\frac{P(X = x')}{P(X = x)} = \exp \left\{ - \left[ \sum_{c \in C_s} V_c(x') - \sum_{c \in C_s} V_c(x) \right] \right\}.$$

Таким образом, принятие решения о новом значении элемента последовательности основывается лишь на разности суммарных потенциалов клик, образующих окрестность данной точки.

Процедура стохастической релаксации порождает марковскую цепь изображений, которая является эргодической [3] с финальным распределением вероятностей, совпадающим с (1). После стационаризации цепи процедура служит генератором реализаций двумерного случайного поля с заданным распределением Гиббса. Аналогичная процедура может использоваться для низкоуровневой обработки (фильтрации, восстановления и т. п.). При этом генерируются реализации, подчиняющиеся апостериорному распределению поля, которое должно иметь гиббсовскую форму, аналогичную (1), а решение принимается на основе получаемых реализаций в соответствии с выбранным критерием оптимальности, например критерием максимума апостериорной вероятности (МАВ).

Точным решением задачи восстановления изображения по критерию МАВ является реализация поля, обеспечивающая максимум апостериорного распределения. Нахождение точного решения представляет собой очень сложную проблему. Один из способов получения приближенного решения предполагает введение в выражение (1) управляющего параметра  $T(t)$ , называемого температурой и зависящего от номера итерации («марковского времени»)  $t$ ; таким образом формируется последовательность распределений Гиббса

$$P_t(X = x) = [Z_x(t)]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{T(t)} \sum_{c \in C} V_c(x) \right\}, \quad t = 1, 2, \dots$$

В процессе стохастической релаксации температура постепенно понижается, что приводит к заострению моды (мод) последовательности распределений  $P_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , и концентрации генерируемых реализаций вблизи состояния с максимальной вероятностью (минимальной энергией [3]), тогда в качестве приближенного решения можно выбрать любую реализацию поля по прошествии достаточно большого числа итераций. Такая процедура в литературе получила название моделируемого отжига; закон убывания темпе-

ратуры называют графиком отжига. Чем быстрее убывает температура, тем выше скорость сходимости, однако при этом повышается вероятность получения не глобального, а локального экстремума. В работе [3] доказано, что оптимальным является график

$$T(t) \geq C / \log(t), \quad (4)$$

где  $C$  – константа, значение которой подбирается эмпирически.

Описанная модель применялась в [3] для восстановления изображений, принимающих конечное число значений. Предполагалось, что наблюдаемое изображение  $Y$  образовано согласно выражению

$$Y = \psi(\phi(H(X)), \xi),$$

где  $H(\cdot)$  – оператор линейного пространственного искажения (например, размытия вследствие дефокусировки или смаза);  $\phi(\cdot)$  – нелинейное преобразование;  $\xi$  – шумовое поле, а  $\psi(a, b)$  описывает взаимодействие изображения с шумом и предполагается обратимым при любом  $a$ .

В данной работе получено гиббсовское описание полутонового (непрерывнозначного) изображения, формируемого на основе авторегрессионной модели, в результате чего обеспечивается применимость стохастической релаксации для восстановления изображения, подвергнутого линейным и нелинейным искажениям.

**1. Постановка задачи нелинейного восстановления искаженных изображений.** Для описания полутонового изображения  $X$  воспользуемся стационарной авторегрессионной моделью случайного поля [5], определяемой на бесконечной двумерной решетке разностным уравнением

$$x(m, n) = - \sum_{(p, q) \in \Omega_a} a(p, q)x(m-p, n-q) + v + \eta(m, n), \quad (5)$$

где порождающий процесс  $\eta(m, n)$  – дискретный стационарный белый гауссовский шум с дисперсией  $\sigma_\eta^2$  и нулевым средним;  $v$  – параметр, определяющий математическое ожидание двумерной последовательности  $x(m, n)$ ;  $\Omega_a$  – носитель двумерной последовательности коэффициентов авторегрессии  $a(p, q)$ , определенный на несимметричной дискретной полуплоскости выражением

$$\Omega_a = \{(p, q): (p=0, 1 \leq q \leq Q_a) \cup (1 \leq p \leq P_a, -Q_a \leq q \leq Q_a)\},$$

соответствующим каузальной авторегрессионной модели. На рис. 1 показано графическое представление носителя для  $P_a = Q_a = 2$ .

Рассмотрим изображение  $X$  как фрагмент стационарного поля (5), определяемый носителем  $L$  размером  $M \times N$ , при этом будем полагать, что наблюдаемое искаженное изображение  $Y = \{y(m, n): (m, n) \in L_h\}$  формируется из  $X$  в соответствии с выражением

$$y(m, n) = \phi \left\{ \sum_{(p, q) \in \Omega_h} h(p, q)x(m-p, n-q) \right\} + \xi(m, n), \quad (6)$$

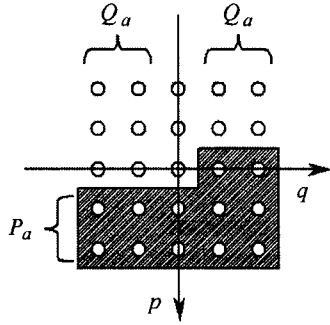


Рис. 1. Носитель множества коэффициентов авторегрессии

где  $h(p, q)$  – дискретная функция рассеяния точки, описывающая размытие изображения, возникающее в процессе регистрации;  $\phi(\cdot)$  – функция, моделирующая нелинейность регистрирующей среды (датчика);  $\xi(m, n)$  – последовательность независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma_\xi^2$ , представляющая собой шум на-

блюдения. Предполагается, что функция рассеяния точки  $h(p, q)$  задана на симметричном прямоугольном носителе  $\Omega_h$  размером  $(2P_h + 1) \times (2Q_h + 1)$ :

$$\Omega_h = \{(p, q): -P_h \leq p \leq P_h, -Q_h \leq q \leq Q_h\}.$$

Операция свертки в (6) приводит к тому, что носитель искаженного изображения

$$L_h = \{(m, n): P_h \leq m < (M - P_h), Q_h \leq n < (N - Q_h)\}$$

оказывается меньше носителя  $L$  исходного неискаженного изображения. Это обстоятельство необходимо учитывать для корректного восстановления изображений.

Задача восстановления изображения в принятых обозначениях формулируется следующим образом. Наблюдается последовательность случайных величин  $Y$ , заданная на решетке  $L_h$ . Необходимо найти оптимальную оценку  $\hat{X}$  последовательности  $X$ , определенную на решетке  $L$ . В качестве критерия оптимальности принят критерий максимума апостериорной вероятности [6]

$$\hat{X} = \arg \max_X w(X | Y),$$

где  $w(X | Y)$  – условная (апостериорная) плотность вероятности поля  $X$  при наблюдении поля  $Y$ .

**2. Построение алгоритма восстановления изображений.** Используя формулу Байеса, запишем выражение для апостериорной плотности вероятности

$$w(X | Y) = \frac{w(X)w(Y | X)}{w(Y)} = kw(X)w(Y | X), \quad (7)$$

где  $w(X)$  – априорная плотность вероятности поля  $X$ ;  $w(Y)$  – плотность вероятности наблюдаемого поля  $Y$ ;  $k = [w(Y)]^{-1}$  – константа при фиксированном поле  $Y$ . Условная плотность  $w(Y | X)$  с учетом выражения (6) и распределения независимой гауссовской последовательности  $\xi(m, n)$  имеет вид

$$w(Y | X) = (2\pi\sigma_\xi^2)^{-L_h/2} \times \times \exp \left( -\frac{1}{2\sigma_\xi^2} \sum_{(m, n) \in L_h} \left( y(m, n) - \phi \left\{ \sum_{(p, q) \in \Omega_h} h(p, q)x(m-p, n-q) \right\} \right)^2 \right), \quad (8)$$

где  $|L_n|$  – количество точек решетки.

Прежде чем перейти к выводу выражения для априорного распределения  $w(X)$ , определим следующие множества точек двумерной решетки:

– множество  $L_1 = \{(m, n): (m+p, n+q) \in L, (p, q) \in \Omega_a\}$  точек бесконечной двумерной решетки, участвующих в формировании исходного изображения  $X$  в соответствии с моделью (5);

– множество точек  $L_2 = \{(m, n): (m-p, n-q) \in L, (p, q) \in \Omega_a\}$ , в которых поле формируется только из точек исходного изображения  $X$  в соответствии с (5);

– множество точек, окаймляющих изнутри решетку  $L$ :

$$L_3 = \{(m, n): (m, n) \in L, (m+p, n+q) \in L \setminus L_2, (p, q) \in \Omega_{a+}\},$$

где  $\Omega_{a+} = \{\Omega_a \cup (0, 0)\}$ ;

– множество граничных точек  $\delta L = L_1 \setminus L$ .

Тогда условную плотность распределения изображения  $X$  при заданных значениях граничных элементов можно записать в форме

$$w(X | \delta X) = \prod_{(m, n) \in L} w(x(m, n) | x(m-p, n-q), (p, q) \in \Omega_a),$$

где

$$\begin{aligned} w(x(m, n) | x(m-p, n-q), (p, q) \in \Omega_a) = \\ = (2\pi\sigma_\eta^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} \left( \sum_{(p, q) \in \Omega_a} a(p, q)x(m-p, n-q) - v \right)^2}, \quad a(0, 0) = 1. \end{aligned}$$

Безусловное распределение последовательности  $X$  можно найти, проинтегрировав произведение условной плотности  $w(X | \delta X)$  и безусловной совместной плотности  $w(\delta X)$  распределения граничных элементов по всем возможным значениям этих элементов. Вынося множители, не зависящие от граничных элементов  $\delta X$ , за знак интеграла, получим

$$\begin{aligned} w(X) &= \prod_{(m, n) \in L_2} w(x(m, n) | x(m-p, n-q), (p, q) \in \Omega_a) \times \\ &\times \int \prod_{(m, n) \in L \setminus L_2} w(x(m, n) | x(m-p, n-q), (p, q) \in \Omega_a) w(\delta X) d\delta X = \\ &= \prod_{(m, n) \in L_2} w(x(m, n) | x(m-p, n-q), (p, q) \in \Omega_a) F(x(m, n), (m, n) \in L_3), \quad (9) \end{aligned}$$

где  $F(x(m, n), (m, n) \in L_3)$  – множитель, зависящий от элементов последовательности  $X$ , окаймляющих изнутри двумерную решетку  $L$ .

Подставив выражения (8) и (9) в (7), получим искомое апостериорное распределение

$$w(X | Y) = Z_{x|y}^{-1} \exp \left( - \sum_{(m, n) \in L_2} V_{m, n}^a(x(m-p, n-q), (p, q) \in \Omega_{a+}) - \right.$$

$$\left. - f(x(m, n), (m, n) \in L_3) - \sum_{(m, n) \in L_h} V_{m, n}^h(x(m-p, n-q), (p, q) \in \Omega_h) \right\}, \quad (10)$$

$$V_{m, n}^a(x(m-p, n-q), (p, q) \in \Omega_{a+}) = \frac{1}{2\sigma_\eta^2} \left( \sum_{(p, q) \in \Omega_{a+}} a(p, q)x(m-p, n-q) - v \right)^2,$$

$$V_{m, n}^h(x(m-p, n-q), (p, q) \in \Omega_h) =$$

$$= \frac{1}{2\sigma_\xi^2} \left( y(m, n) - s \left\{ \sum_{(p, q) \in \Omega_h} h(p, q)x(m-p, n-q) \right\} \right)^2,$$

$$F(x(m, n), (m, n) \in L_3) = -\ln(f(x(m, n), (m, n) \in L_3)),$$

где  $Z_{x|y}$  – нормирующая константа;  $f(x(m, n))$  – наведенный потенциал, обусловленный переходом от поля, определенного на бесконечной двумерной решетке, к полю  $X$ . Сравнивая полученное выражение с (1), видим, что апостериорное распределение искаженного изображения является гиббсовским с потенциалами  $V_{m, n}^a(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  и  $V_{m, n}^h(\cdot)$  и соответствующими кликами. Таким образом, для получения оценки последовательности  $X$ , максимизирующей (10), может быть использована процедура стохастической релаксации.

Появление потенциала  $f(\cdot)$  связано с переходом от условного распределения  $w(X | \delta X)$  к безусловному  $w(X)$  и обеспечивает сохранение стационарности последовательности  $x(m, n)$  в пределах конечного фрагмента  $L$  бесконечной двумерной решетки. Замкнутое выражение для  $f(\cdot)$  в большинстве случаев найти трудно, а его игнорирование приводит к нежелательным краевым эффектам при восстановлении изображений. В качестве практически приемлемого компромисса предлагается замена точного выражения для  $f(\cdot)$  приближенным, имеющим вид

$$f(x(m, n), (m, n) \in L_3) \simeq \frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{(m, n) \in L_3} (x(m, n) - m_x)^2,$$

где  $\sigma_x^2$  и  $m_x$  – дисперсия и математическое ожидание последовательности  $x(m, n)$ .

**Результат эксперимента.** Для экспериментальной проверки работоспособности алгоритма использовано реальное полутоновое (256 уровней яркости) тестовое изображение с искусственно внесенными искажениями, соответствующими выражению (6). Дискретная функция рассеяния точки  $h(p, q)$  аппроксимировалась двумерным гауссовским импульсом, определенным на носителе  $\Omega_h$  размерами  $P_h = Q_h = 3$ . Вид нелинейной функции  $\phi\{\cdot\}$  показан на рис. 2. Такой характер нелинейно-

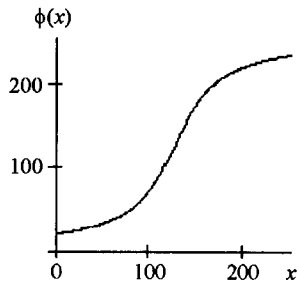


Рис. 2. Нелинейная функция  $\phi\{\cdot\}$



Рис. 3. Наблюдаемое изображение

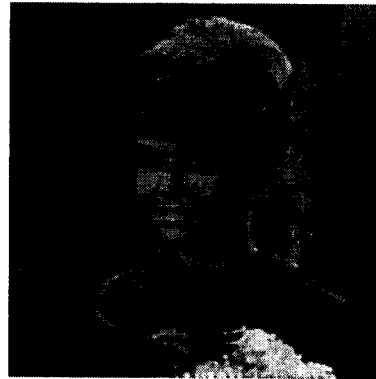


Рис. 4. Результат восстановления

сти является типичным для большинства систем регистрации изображений. Отношение сигнал/шум принято равным 40 дБ. Параметры авторегрессионной модели изображения (5) для случая  $P_a = Q_a = 1$  оценивались методом линейного предсказания [7] путем минимизации ошибки предсказания по всему исходному неискаженному изображению.

На рис. 3 и 4 показаны искаженное наблюдаемое изображение и результат его восстановления. Восстановление выполнено методом стохастической релаксации (1000 итераций) с постепенным понижением температуры в соответствии с графиком (4). Параметр температурной зависимости  $C = 0,25$  подобран экспериментально. В качестве начального приближения для процедуры восстановления использовалось наблюдаемое изображение. Недостающие элементы по краям раstra (множество точек  $L \setminus L_n$ ) заполнялись независимыми гауссовскими случайными величинами. Эксперименты показали, что выбор начального приближения незначительно влияет на скорость сходимости итерационной процедуры восстановления.

**Заключение.** Рассмотрена задача восстановления непрерывнозначных изображений, подвергшихся линейным искажениям известного вида и локальным нелинейным искажениям известной формы, наблюдаемых на фоне аддитивного гауссовского шума. Установлена связь авторегрессионной гаусс-марковской модели, описывающей неискаженное исходное изображение, с гиббсовской моделью, используемой для построения алгоритма восстановления. Параметры авторегрессионной модели оцениваются по исходному изображению и используются для идентификации гиббсовской модели. Построен алгоритм восстановления изображений методом стохастической релаксации (моделируемого отжига). Приведены результаты эксперимента по практическому применению предложенного метода для восстановления полутонового изображения, искаженного линейным оператором и нелинейным локальным преобразованием, наблюдаемого на фоне шума.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Реконструкция изображений /Под ред. Г. Старка. М.: Мир, 1992.
2. Hunt B. R. Bayesian methods in nonlinear digital image restoration // IEEE Trans. 1977. C-26, N 3. P. 219.



3. **Geman S., Geman D.** Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images // IEEE Trans. 1984. PAMI-6, N 6. P. 721.
4. **Metropolis N., Rosenbluth A., Rosenbluth M. et al.** Equations of state calculations by fast computing machines // Journ. Chem. Phys. 1953. 21, N 6. P. 1087.
5. **Джайн А. К.** Успехи в области математических моделей для обработки изображений // ТИИЭР. 1981. 69, № 5. С. 9.
6. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
7. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.

*Новосибирский государственный  
технический университет,  
E-mail: vasyukov@ktor.ref.nstu.ru*

*Поступила в редакцию  
18 мая 2001 г.*

---

---

**Подписка на наш журнал – залог Вашего успеха!**