РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 2 2002

УДК 517.958 + 510.51

С. М. Зеркаль

(Новосибирск)

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ АКУСТИЧЕСКОЙ ПАССИВНОЙ ЛОКАЦИИ В СЛОЖНЫХ ПОМЕХОСИГНАЛЬНЫХ СИТУАЦИЯХ*

Рассматривается вычислительная задача, возникающая в условиях диагностики (пассивной локации) источников акустического сигнала в помехосигнальных ситуациях, не допускающих разрешения источников традиционными методиками. В работе развит итерационный алгоритм, позволяющий с применением методов регуляризации получить решение исследуемой задачи при наличии случайных помех в каналах приема и «малых» угловых расстояний между источниками. Существенным является использование криволинейной системы наблюдений (антенны). Приводятся описание алгоритма и результаты вычислительного компьютерного моделирования, решения исследуемой задачи.

Введение. В статье исследуется задача пассивной локации источников акустического сигнала, расположенных в дальней зоне (на значительном удалении от антенной решетки), определяются мощность и угловые координаты диагностируемых источников. Одной из возможных областей применения излагаемых далее результатов является геотомография, где разработанная вычислительная методика может быть использована при диагностике эпицентров близких (территориально и по времени события) землетрясений или взрывов. Естественно, в этом случае исходной информацией служит регистрируемый сейсмический сигнал (поверхностная волна Рэлея). Данная задача представляет практический интерес в сложных помехосигнальных ситуациях, характеризующихся случайными помехами в каналах приема и неустойчивостью разрешения источников, обусловленной их взаимно близким расположением вместе со значительной разницей в мощностях (амплитудах). В качестве устройства, принимающего исследуемый акустический сигнал, используется цилиндрическая фазированная антенная решетка [1], что в отличие от случая прямолинейных эквидистантных антенн увеличивает нелинейность задачи. Таким образом, требуется разделить сливающиеся источники и определить параметры слабого по мощности на фоне сильного.

Устойчивость задачи в таких условиях можно повысить за счет:

– учета априорной информации о специфике шумов и искажений, а также об искомом решении (предварительное целеуказание);

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-07-90342).

– увеличения числа наблюдений (приемников).

Существенным для успешного использования разработанного алгоритма является наличие априорной информации о количестве разрешаемых источников, носящей характер предварительного целеуказания [2]. Априорная информация может быть получена в ситуации, когда при перемещении разрешаемые источники находятся достаточно далеко друг от друга и могут предварительно диагностироваться, а при сближении источников (угловое сближение) требуется их повторное диагностирование. Кроме того, такая априорная информация получается в случае, когда источники начинают работать не одновременно, однако разрешить их нужно после включения последнего. Предлагаемый алгоритм основан на использовании принципа итеративной регуляризации [3, 4], позволяющего уверенно решать подобные вычислительные задачи, сводящиеся к решению нелинейных систем трансцендентных уравнений специального вида. В простейшем случае прямолинейной эквидистантной системы наблюдений эти задачи редуцируются к обратным задачам для разностных уравнений и эффективно решаются методом Прони [5, 6], не требуя при этом априорной информации о количестве разрешаемых источников. Рассмотренная в работе задача относится к асимптотической постановке обратной задачи определения правой части специального вида для волнового уравнения. Правая часть имеет вид линейной комбинации расположенных в дальней зоне точечных источников. Исходной информацией являются функционалы волнового поля, излучаемого диагностируемыми источниками, которые измерены на приемниках, расположенных на дуге окружности.

1. **Постановка задачи.** В пространстве R^3, заполненном средой со скоростью распространения волн c, происходит волновой процесс, описываемый уравнением

$$U_{tt} - c^2 \Delta u = \sum_{j=1}^{m} a_j \delta(x - x_j) e^{ikt} \tag{1}$$

с начальными данными

$$U(x,0) = 0, \qquad U_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

где m – количество источников; x_j – местоположение j-го источника; a_j – амплитуда j-го источника, работающего с частотой k. Считаем, что поле измеряется после его установления и $c \equiv 1$, тогда решение прямой задачи (1), (2) выписывается в явном виде (константа c в дальнейшем изложении опускается):

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{m} a_j \exp(ik(t - |x - x_j|))\theta(t - |x - x_j|)/|x - x_j|, \tag{3}$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда, т. е.

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0; \\ 0, & \text{если } t \le 0. \end{cases}$$

Приемники располагаются на антенне – дуге $(-\beta, \beta)$ окружности радиуса R. Количество приемников n, угол на l-й приемник определяется по формуле

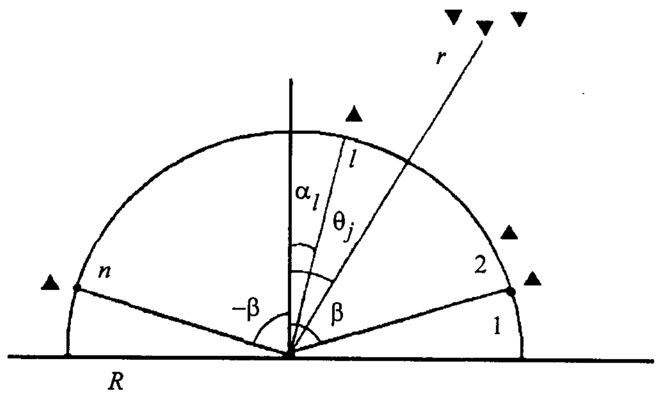

Рис. 1. Система наблюдений для круговой антенны и удаленных источников: r – расстояние от центра антенны до ближайшего источника, a – источник (▼), b – приемник (▲) (элемент антенны)

$\alpha_l = \beta - (l-1)\gamma$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\gamma = 2\beta/(n-1)$. Все источники располагаются в дальней зоне, θ_j – угол на j-й источник, $j = 1, 2, \ldots, m$ (рис. 1).

По полю U, измеренному на антенне, требуется определить угловые координаты и мощности (амплитуды) источников, причем их число m считается известным. Отметим, что трехмерный случай легко сводится к последовательному решению двух плоских задач. Рассмотрим ситуацию, когда источники, находясь на большом удалении от антенны и имея значительную разницу в амплитудах, могут располагаться настолько близко друг к другу, что решение становится неустойчивым, источники не разделяются и для решения задачи требуется применение методов регуляризации. Эта постановка относится к одной из важных проблем в теории дискретных обратных задач разрешения сигналов.

2. Построение решения и вычислительный алгоритм решения обратной задачи. Предположение асимптотического характера о расположении диагностируемых источников в дальней зоне позволяет исследовать задачу при $r \to \infty$ ($r = \min r_j$ (см. рис. 1)) и свести ее к решению трансцендентных уравнений специального вида.

Пусть $x_j = r_j \omega_j$, $r_j \gg 1, |\omega_j| = 1, \omega_j \in R^3$, где r_j и ω_j – полярные (сферические) координаты x_j, причем $r_j = r + \rho_j$, $r \gg 1$; ρ_j – расстояние от j-го источника до ближайшего к центру координат. Обозначим $|x - x_j| = d$ и заметим, что $|x_j| = r_j$, тогда имеем

$$d - r_j = \frac{d^2 - r_j^2}{d + r_j} = \frac{|x|^2 - 2r_j \langle x, \omega_j \rangle + |x_j|^2 - r_j^2}{2r_j\,(0{,}5 + d/(2r_j))},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{r_j} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d^2}{r_j^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|x|^2 - 2r_j \langle x, \omega_j \rangle + |x_j|^2}{r_j^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{|x|^2 - 2r_j \langle x, \omega_j \rangle}{r_j^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + O\left(\frac{1}{r_j}\right)} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{r_j}\right),$$

$$d - r_j = \frac{|x|^2 - 2r_j\langle x,\ \omega_j\rangle}{2r_j(0{,}5 + 0{,}5)} = \frac{|x|^2 - 2r_j\langle x,\ \omega_j\rangle}{2r_j} = -\langle x,\omega_j\rangle + O\left(\frac{1}{r_j}\right)$$

или

$$|x - x_j| = r_j - \langle x,\omega_j\rangle + O\left(\frac{1}{r_j}\right).$$

Поскольку $r_j = r + \rho_j$, то

$$|x - x_j| = r + \rho_j - \langle x,\omega_j\rangle + O\left(\frac{1}{r_j}\right). \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда поле измеряется после установления, т. е. $t > |x_l^0 - x_j|$, $\forall x_l^0 \in D$, $\forall x_j$ (D – антенна), тогда $\theta(t - |x_l^0 - x_j|) \equiv 1$, что с использованием (3) приводит к системе уравнений

$$U(x_l^0,\ t) = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{m} a_j \exp(ik(t - |x_l^0 - x_j|)\big/|x_l^0 - x_j|.$$

Подставляя в это выражение соотношение (4) ($x_l^0 \equiv x$) и полагая

$$V(x) = \lim_{r\to\infty} 4\pi r \exp(ik(r - t))U(x,t),$$

получим основную систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \mathrm{e}^{-ik\rho_j}\mathrm{e}^{ik\langle x,\ \omega_j\rangle} = V(x).$$

На практике при обработке результатов измерений применяются специальные методики, разработанные в теории сигналов и учитывающие особенности экспериментальных данных, в том числе и то, что a_j носят случайный характер, так что приходится иметь дело не с самим решением задачи (1), (2), а с некоторыми функционалами от него. В данном случае для решения обратной задачи формируется следующая система уравнений (спектрально-ковариационная матрица):

$$\Phi_{lp} = \mathrm{M}(V_l \overline{V}_p) \equiv F_{lp}, \qquad l = 1,2,\ldots,n;\quad p = 1,2,\ldots,n,$$

где $\mathrm{M}(\cdot)$ – математическое ожидание случайной величины; $V_l = V(x_l)$; $\overline{V}_p$ – величина, комплексно-сопряженная V_p;

$$\Phi_{lp} \equiv \sum_{j=1}^{m} A_j \exp\left\{ i\frac{4\pi R}{\lambda}\sin\left(\frac{\alpha_p - \alpha_l}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_p + \alpha_l}{2} + \theta_j\right)\right\}. \tag{5}$$

Здесь A_j характеризует среднюю амплитуду сигнала от j-го источника, λ – длина волны. Поскольку $F_{lp} = \overline{F}_{pl}$, то достаточно ограничиться случаем $p < l$. Рассмотрим переопределенную систему (5) (т. е. $n \geq m+1$) и применим для ее решения метод наименьших квадратов. Построим функционал

$$f(x) = f(A,\theta) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{p=1}^{l} |\Phi_{lp}(A,\theta) - F_{lp}|^2 \qquad (6)$$

и минимизируем его в пространстве искомых параметров

$$x = \begin{pmatrix} A \\ \theta \end{pmatrix} \in R^{2m},$$

где A – вектор-столбец искомых амплитуд, θ – вектор-столбец искомых углов. Далее построим $f'(x) \equiv F(x)$ и матрицу Якоби $f''(x) \equiv F'(x)$, где $F(x)$ – вектор-столбец с элементами $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2m$, а

$$F'(x) = \begin{pmatrix} A & C \\ C^* & D \end{pmatrix},$$

здесь A, C^*, C, D – матрицы с элементами $\dfrac{\partial^2 f}{\partial A_k \, \partial A_q}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta_k \, \partial A_q}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial A_k \, \partial \theta_q}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta_k \, \partial \theta_q}$ $(k, q = 1, 2, \ldots, m)$ соответственно. Оценим норму

$$|F'(x)| \leq 2m \max\{|A_{kq}|, |C_{kq}|, |D_{kq}|\}.$$

Если предположить, что амплитуды не превосходят $M = \text{const}$ и погрешность измерений тоже не превосходит M, то оценка выглядит следующим образом:

$$|F'(x)| \leq 12m(2m+1)M^2(4\pi R/\lambda)^2 \equiv L. \qquad (7)$$

Эта оценка будет использована далее.

Рассматриваемая задача относится к нелинейным задачам, для численного решения которых общим является итерационный подход [7]. Для решения задачи минимизации функционала (6) применялись итерационные методы нулевого порядка, а именно: метод проекции градиента и методы первого порядка, основанные на регуляризации метода Гаусса – Ньютона [8, 9]. Применение итеративной регуляризации в методах первого порядка оказалось нерезультативным, в то время как комбинирование итеративной и дескриптивной (учет априорной информации) регуляризаций в методе проекции градиента оказалось наиболее эффективным. Итерационный процесс организуется следующим образом:

$$x^{i+1} = P_Q\left(x^i - \frac{1}{2L} f(x^i)\right).$$

Здесь i – номер итерации; P_Q – метрический проектор на априори задаваемую область искомых параметров Q, которая определяется допустимыми значениями неизвестных; L – постоянная Липшица для $F(x) = f'(x)$ и оце-

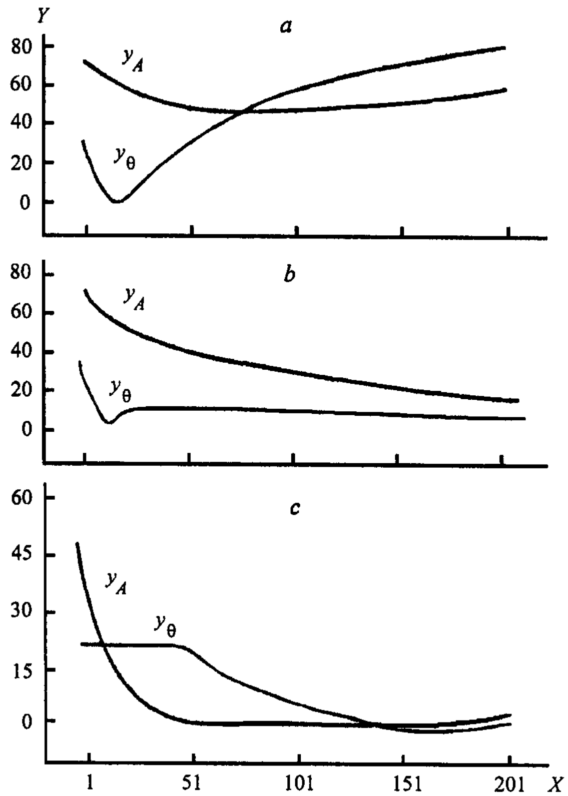

Рис. 2. Результаты численных экспериментов: *a* – без проектирования, *b* – включенное проектирование, $R = 5\lambda$, $m = 3$, $n = 6$ (исходные данные: $\theta_1 = -\theta_3 = 1{,}5°$, $\theta_2 = 0°$, $A_1 = A_3 = 1$, $A_2 = 10$; начальные приближения: $\theta_1^0 = -\theta_3^0 = -2°$, $\theta_2^0 = 0{,}2°$, $A_1^0 = A_2^0 = A_3^0 = 4$), *c* – включенное проектирование, $R = 3\lambda, m = 3, n = 6$ (исходные данные: $\theta_1 = -\theta_3 = 1{,}5°$, $\theta_2 = 0°$, $A_1 = A_2 = = A_3 = 1$; начальные приближения: $\theta_1^0 = -\theta_3^0 = -1{,}8°$, $\theta_2 = 0{,}573°$, $A_1^0 = A_2^0 = A_3^0 = 1{,}5$)

нивается по формуле (7). Отметим, что L принимает относительно большие значения $\sim 10^8$ ($R = 5\lambda$, $M = 10$, $m = 3$). Это приводит к неоправданно малому шагу вычислений, что значительно увеличивает число итераций, необходимых для достижения нужной точности. Введение различных L_A и L_θ при восстановлении амплитуд и углов на порядок ускорило сходимость итерационного процесса. L_A и L_θ определяются исходя из вида матрицы $F'(x)$, имеющей блочную структуру. В нашем случае элементы клеток C и C^* малы по сравнению с элементами клеток A и D, и чем ближе x^i к точному решению, тем значительнее эта разница. L_A выбиралась как верхняя оценка элементов клетки A, $L_A = 2mn(n+1)$, а L_θ – как верхняя оценка элементов клетки D, $L_\theta = (4\pi RM/\lambda)^2 n(n+1)/m$.

3. **Результаты вычислений.** Результаты вычислений представлены графиками на рис. 2 и 3. По оси Y откладываются значения y_A и y_θ, определяемые формулами

$$y_A = \frac{100\left\| A - A^i \right\|}{\left\| A \right\|}, \qquad y_\theta = \frac{100\left\| \theta - \theta^i \right\|}{\left\| \theta \right\|},$$

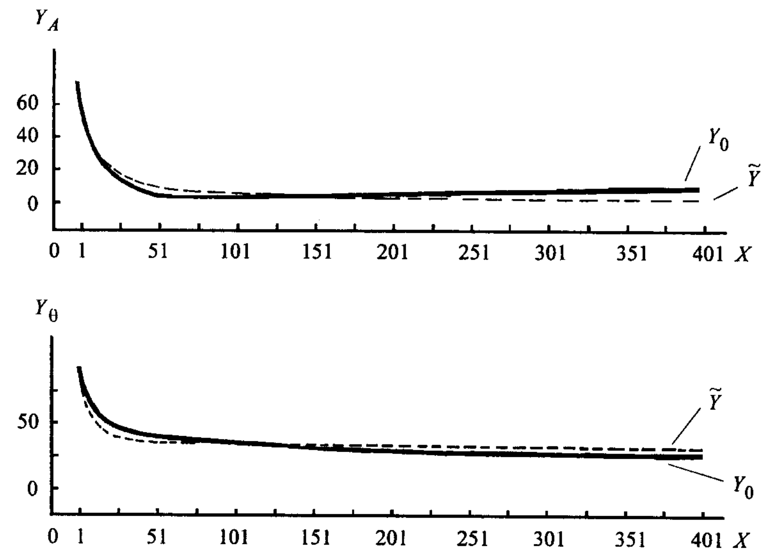

Рис. 3. Численное исследование помехоустойчивости алгоритма к случайному аддитивному искажению элементов спектрально-ковариационной матрицы. $R = 5\lambda$, $m = 3$, $n = 6$; исходные данные: $\theta_1 = -\theta_3 = 1{,}5°$, $\theta_2 = 0°$, $A_1 = A_3 = 1$, $A_2 = 10$; начальные приближения: $\theta_1^0 = -\theta_3^0 = 3°$, $\theta_2^0 = 0{,}1°$, $A_1^0 = A_2^0 = A_3^0 = 4$, $\chi = 40$ %; Y_0 соответствует случаю неискаженных элементов спектрально-ковариационной матрицы; $\tilde{Y}$ получено при случайном искажении элементов спектрально-ковариационной матрицы в соответствии с (6)

а по оси X – номер итерации. В нашем случае Q – выпуклое множество, задаваемое системой неравенств:

$$
\begin{gathered}
0 \le A_j \le \mathrm{M}, \quad j = \overline{1, m}, \\
\theta_1 \ge -\gamma_1, \\
\theta_2 \ge \theta_1 + \varepsilon_1, \\
\theta_3 \ge \theta_2 + \varepsilon_1, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\theta_j \ge \theta_{j-1} + \varepsilon_1, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\gamma_1 \ge \theta_m.
\end{gathered}
$$

Здесь $[-\gamma_1, \gamma_1]$ – задаваемый раствор углов, в котором содержатся искомые углы θ_j, а $\varepsilon_1 > 0$ – минимальный угол, ближе которого они не могут находиться. Таким образом, искомые углы занумерованы в порядке возрастания: $-\gamma_1 \le \theta_1 < \ldots < \theta_m \le \gamma_1$. При задании проектора P_Q минимальный угол между соседними источниками задавался равным 0,5°, граница для амплитуд $M = \sum_i^m A_i$ выбиралась равной первой компоненте вектора измерений. Рис. 2, *а* отражает ситуацию, когда проектирование выключено и процесс расходится. На рис. 2, *b* показано, что применение проектора позволяет получить решение. Из рис. 2, *c* видно, что проектор не дает значениям компонент θ^i выйти за пределы $-1{,}8°$ и $1{,}8°$, и с 50-й итерации начинается быстрая сходимость.

В численных экспериментах разработанный алгоритм показал хорошую помехоустойчивость к случайному шуму в элементах Φ_{lp}. На рис. 3 представлены результаты вычислений, когда значения элементов спектрально-ковариационной матрицы искажаются случайным образом пропорционально их локальному значению:

$$\widetilde{\Phi}_{lp} = \Phi_{lp}(1 + z\chi/100). \tag{8}$$

Здесь z – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-1;\ 1]$; χ – уровень шума в процентах.

Приведем результаты вычислений в виде конкретных числовых значений. Исходные данные: $n=6, R/\lambda=5, \theta_1=-\theta_3=0{,}02618, \theta_2=0, A_1=A_3=1, A_2=10$. Начальное приближение: $\hat\theta_1=-\hat\theta_2=0{,}03500$, $\hat\theta_3=0{,}01$, $\hat A_1=\hat A_2==\hat A_3=4$. В частности, при $\chi=4$ % на 300-й итерации получилось: $\theta_1==0{,}02560$, $A_1=1{,}231$; $\theta_2=1{,}25\cdot10^{-5}$, $A_2=9{,}580$; $\theta_3=-0{,}02566$, $A_3=1{,}246$. Далее сходимость продолжается.

Заключение. С математической точки зрения рассматриваемая постановка локационной задачи относится к области некорректно поставленных задач; с точки зрения физики – к обратным задачам математической физики, так как при их решении требуется обращение причинно-следственных связей; с точки зрения теории обработки информации эти задачи сводятся к оптимальной (как правило, нелинейной) фильтрации наблюдаемого поля. Статистическая природа шума и искажений в измерительной аппаратуре, статистический характер рассеивающих неоднородностей части пространства, в которой происходит волновой процесс, наконец, статистический характер самих искомых излучателей делают математическую статистику, конечно, первым и важнейшим этапом при обработке реальных сигналов. Второй важный этап заключается в создании устойчивых алгоритмов интерпретации предварительно статистически обработанных результатов измерений. Применительно к задачам локации с дискретными антеннами мы приходим здесь к проблемам устойчивого решения плохо обусловленных нелинейных систем уравнений, составленных на основе спектрально-ковариационных матриц. Задачу усложняет и то обстоятельство, что на практике антенны часто криволинейной конфигурации (для прямолинейных эквидистантных антенн уравнения решаемой системы имеют более простой вид).

Замечание. Система уравнений, аналогичная полученной при решении данной обратной задачи в случае прямолинейной эквидистантной антенны, возникает в активационном анализе, когда по измеряемому во времени суммарному излучению активированной смеси определяют число изотопов в ней, их периоды полураспада и интенсивности излучения [10].

Разработанный алгоритм применим как в случаях криволинейной, так и прямолинейной антенны и не требует эквидистантности. Ранее при решении подобной задачи угловое расстояние между ближайшими друг к другу источниками составляло не менее 9° [1], применение же разработанного алгоритма, имеющего за счет использования регуляризации повышенную разрешающую способность, позволило уверенно исследовать ситуации с угловыми расстояниями до 1,5° при отличии амплитуд (мощностей) диагностируемых источников на порядок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В. И., Гительсон В. С., Глебов Г. М. и др.** Точность определения параметров источников случайных акустических сигналов методом прямого разрешения // Акуст. журн. 1981. **XXVII**, вып. 1. С. 30.
2. **Зеркаль С. М.** О диагностике близко расположенных источников волнового поля с применением итеративной и дескриптивной регуляризации // Докл. РАН. 1997. **357**, № 6. С. 745.
3. **Бакушинский А. Б.** К принципу итеративной регуляризации // ЖВМиМФ. 1979. **19**, № 4. С. 1040.
4. **Бакушинский А. Б.** Принцип итеративной регуляризации: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1983.
5. **Бухгейм А. Л., Зеркаль С. М., Конев В. Т., Сабитова Г. С.** Об одном классе обратных задач в дискретной постановке // Обратные задачи математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. С. 57.
6. **Reddi S. S.** Multiple source location – A digital approach // IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst. 1979. **15**, N 1. P. 95.
7. **Дьяконов Е. Г.** Нелинейное уравнение: численные методы решения // МСЭ. М., 1982. Т. 3. С. 945.
8. **Ливитин Е. С., Поляк Б. Т.** Методы минимизации при наличии ограничений // ЖВМиМФ. 1966. 6, № 5. С. 787.
9. **Ортега Д., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
10. **Заикин П. Н., Моисеев В. Н.** Устойчивый метод интерпретации данных изотопного анализа // ЖВМиМФ. 1978. **18**, № 5. С. 487.

Институт математики СО РАН,
E-mail: zerkal@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
18 июля 2001 г.