РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 2002

УДК 519.2

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов, А. В. Французов

(Новосибирск)

К ПРИМЕНЕНИЮ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ АДЕКВАТНОСТИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ*

Показана возможность применения непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, типа ω^2 и Ω^2 Мизеса для проверки адекватности непараметрических моделей законов распределения наблюдаемым данным. Показано, что при использовании непараметрических оценок на распределения статистик критериев согласия влияет ряд факторов, определяющих сложную проверяемую гипотезу H_0: закон распределения наблюдаемой случайной величины, соответствующий H_0; вид используемой ядерной функции; объем выборки; метод оценивания параметров размытости.

Введение. Создание любой измерительной системы на разных стадиях разработки и исследования, аттестация измерительных устройств, метрологическое обеспечение любого технологического процесса обязательно связаны с необходимостью определения точности измерений, статистическим анализом результатов наблюдений и построением моделей законов распределений ошибок. К сожалению, далеко не всегда ошибки измерений описываются нормальным законом. Более того, не всегда из множества часто используемых в приложениях законов распределений удается подобрать параметрическую модель, адекватно описывающую наблюдаемую величину. В этом случае пытаются воспользоваться некоторой непараметрической моделью закона, непараметрической оценкой.

Построение вероятностной модели для некоторого объекта, как правило, включает два этапа. На первом этапе выбирается тип модели, при необходимости оцениваются параметры этой модели, на втором – проверяется адекватность модели наблюдаемым данным. В параметрической статистике этим этапам соответствуют два основных типа задач: оценивание параметров и проверка статистических гипотез.

В простейшей ситуации, когда мы имеем дело с наблюдаемой случайной величиной, при параметрическом подходе на первом этапе высказываются

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00913).

предположения о виде модели закона распределения и по выборкам, извлекаемым из генеральной совокупности, оцениваются параметры этой модели. На втором этапе адекватность модели наблюдаемым данным проверяется с использованием критериев согласия типа χ^2 Пирсона, типа Колмогорова, типа ω^2 Мизеса и др.

Естественно, что ограниченное множество параметрических моделей, наиболее часто используемых на практике, не всегда позволяет адекватно описать реально существующие случайные величины. Последние десятилетия характеризуются интенсивным развитием непараметрической статистики, расширением применения непараметрических методов в различных приложениях. Иногда непараметрические методы противопоставляются параметрическим. Противопоставление обычно сопровождается далеко не всегда справедливой критикой параметрического подхода. В процессе такой критики как-то упускается из виду, что применение непараметрических оценок наблюдаемых законов распределений также имеет свои «узкие места». Например, существует проблема наилучшего выбора параметра (параметров) размытости используемых ядерных оценок функции плотности, которая обостряется в случае ограниченности области определения наблюдаемой случайной величины и конечных объемов выборки. В последнем случае ядерная оценка функции распределения зачастую существенно отличается от эмпирической функции распределения на границах области (на «хвостах» распределения). Но наиболее важно то, что пока остаются открытыми вопросы проверки адекватности непараметрических моделей.

На наш взгляд, излишне негативное отношение некоторых авторов к параметрическим методам и противопоставление им непараметрических ничем не оправдано: применять следует те методы, которые в конкретной ситуации дают наилучший результат. Параметрические и непараметрические методы не являются взаимоисключающими, а с развитием математического аппарата граница между ними начинает размываться. Например, как только мы начинаем говорить об оптимальном выборе параметра размытости в непараметрической модели, стирается принципиальное отличие такой модели от параметрической. С другой стороны, непараметрические модели и методы имеют ряд конкретных достоинств, обуславливающих возрастающий интерес к ним в различных приложениях.

В настоящий момент практически все силы статистиков направлены на нахождение более точных непараметрических оценок, на исследование свойств этих оценок. Проблема проверки адекватности полученной непараметрической модели закона обходится вниманием исследователей. Проверка адекватности модели представляет собой заключительный этап статистического анализа, следующий за построением параметрической или непараметрической модели наблюдаемого закона и обосновывающий возможность применения данной модели в конкретном приложении. Отсутствие аппарата проверки адекватности непараметрических моделей препятствует широкому применению методов непараметрической статистики на практике.

Цель данной работы – исследование возможности проверки адекватности непараметрических моделей с применением непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, типа ω^2 и Ω^2 Мизеса.

Простые непараметрические оценки плотности. В качестве непараметрических моделей в работе рассматриваются непараметрические оценки плотности Розенблата – Парзена [1], которые имеют вид

$$p_n(x) = \frac{1}{n\lambda_n} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{x - x_i}{\lambda_n}\right), \tag{1}$$

где x_i, $i = 1, \ldots, n$,– выборка наблюдений одномерной непрерывной случайной величины; λ_n – параметр размытости; $\varphi(u)$ – колоколообразная (ядерная) функция, удовлетворяющая следующим условиям регулярности:

$$\begin{gathered} \varphi(u) = \varphi(-u); \quad 0 \le \varphi(u) \le \infty; \quad \int \varphi(u)du = 1; \quad \int u^2 \varphi(u)du = 1; \\ \int u^m \varphi(u)du < \infty; \quad 0 \le m < \infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Асимптотические свойства оценки (1), такие как несмещенность, состоятельность, сходимость почти наверное к плотности $f(x)$, подробно исследованы в работах [2–4]. В частности, показано, что среднеквадратическая ошибка аппроксимации оценки (1), определяемая соотношением

$$J = M\left\{ \int [f(x) - p_n(x)]^2 \, dx \right\} = M\left\{ \left\| f(x) - p_n(x) \right\|^2 \right\}, \tag{3}$$

существенно зависит от выбора параметра размытости λ_n и в меньшей степени от вида ядерной функции $\varphi(u)$.

В исследованиях данной работы используются ядерные функции двух видов:

1) квадратичная ядерная функция [4], обладающая наилучшими свойствами при минимизации среднеквадратической ошибки аппроксимации (3), в виде

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\sqrt{5}} - \dfrac{3}{20\sqrt{5}}\, u^2, & \text{если } |u| \le \sqrt{5}; \\ 0, & \text{если } |u| > \sqrt{5}, \end{cases} \tag{4}$$

2) функция плотности стандартного нормального закона

$$\varphi_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2}. \tag{5}$$

Выбор параметра размытости λ_n оказывает существенное влияние на вид непараметрических оценок функции плотности. И всегда существует проблема нахождения значения этого параметра, оптимального в определенном смысле. Если исходить из условий минимума среднеквадратической ошибки аппроксимации (3), то оптимальная оценка параметра размытости принимает вид [4]:

$$\lambda^* = \left[\frac{\|\varphi\|^2}{n\|f''\|^2} \right]^{1/5}. \tag{6}$$

Недостатком оценки (6) является то, что для ее определения необходимо знать плотность $f(x)$ истинного закона распределения случайной величины, который, вообще говоря, не известен.

При $n \to \infty$ выражение (6) стремится к $n^{-1/5}$. Вследствие этого иногда предлагают параметр размытости выбирать равным:

$$\tilde{\lambda}'_n = n^{-1/5}. \tag{7}$$

Выбор параметра (или параметров) размытости может осуществляться различными методами на основании различных критериев оптимальности [5], например, с использованием различных мер близости эмпирической функции распределения и ее непараметрической оценки. Однако в этом случае теряются преимущества непараметрических оценок относительно параметрических моделей.

Исследование поведения распределений статистик непараметрических критериев согласия при непараметрическом оценивании. Проверка адекватности параметрической модели закона распределения наблюдаемым данным чаще всего осуществляется с использованием критериев согласия типа χ^2 Пирсона или непараметрических критериев типа Колмогорова, типа ω^2 и Ω^2 Мизеса.

При использовании критериев согласия следует различать простые и сложные гипотезы. Простая проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: F(x) = F(x,\theta)$, где $F(x,\theta)$ – функция распределения вероятностей, с которой проверяется согласие наблюдаемой выборки, а θ – известное значение параметра (скалярного или векторного). Сложная проверяемая гипотеза записывается в виде H_0: $F(x) \in \{F(x,\theta),\ \theta \in \Theta\}$. Со сложной гипотезой имеем дело в том случае, если ее проверка осуществляется по той же выборке, по которой оценивались и параметры закона распределения.

В критерии Колмогорова в качестве расстояния между эмпирическим и теоретическим законами используется величина

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} |F_n(x) - F(x,\theta)|,$$

где $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения; n – объем выборки. Обычно используется статистика вида [6]:

$$S_K = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \tag{8}$$

где

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-);\quad D_n^+ = \max_{1\le i\le n}\left\{\frac{i}{n} - F(x_i,\theta)\right\};\quad D_n^- = \max_{1\le i\le n}\left\{F(x_i,\theta) - \frac{i-1}{n}\right\};$$

n – объем выборки; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – упорядоченные по возрастанию выборочные значения. Распределение величины S_K при простой гипотезе в пределе подчиняется закону Колмогорова $K(S)$ [6].

В критериях типа ω^2 расстояние между гипотетическим и истинным распределениями рассматривается в квадратичной метрике

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{E[F_n(x)]-F(x)\}^2\psi(F(x))dF(x),$$

где $E[\cdot]$ – оператор математического ожидания.

При выборе $\psi(t)\equiv 1$ в критериях типа ω^2 Мизеса пользуются статистикой (статистика Крамера – Мизеса – Смирнова) вида

$$S_\omega = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{n}\left\{F(x_i,\theta)-\frac{2i-1}{2n}\right\}^2, \tag{9}$$

которая при простой гипотезе подчиняется распределению $a_1(S)$ [6].

При выборе $\psi(t)\equiv 1/t(1-t)$ в критериях типа Ω^2 Мизеса статистика (статистика Андерсона – Дарлинга) имеет вид

$$S_\Omega = n\Omega_n^2 = -n-2\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2i-1}{2n}\ln F(x_i,\theta)+\left(1-\frac{2i-1}{2n}\right)\ln(1-F(x_i,\theta))\right\}. \tag{10}$$

В пределе эта статистика подчиняется распределению $a_2(S)$ [6].

В случае простых гипотез предельные распределения статистик непараметрических критериев типа Колмогорова, типа ω^2 и Ω^2 Мизеса не зависят от вида наблюдаемого закона распределения и от его параметров. Именно поэтому эти критерии называются непараметрическими и говорят, что они являются «свободными от распределения». Но при проверке сложных гипотез свойство «свободы от распределения» теряется [7]. Как выяснилось, на условные законы распределения статистик $G(S\,|\,H_0)$ непараметрических критериев согласия влияет целый ряд факторов, определяющих «сложность» гипотезы: вид наблюдаемого закона $F(x,\theta)$, соответствующего истинной гипотезе H_0; тип оцениваемого параметра и количество оцениваемых параметров; в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения); используемый метод оценивания параметров [8–11].

В данной работе излагаются результаты исследований возможности применения непараметрических критериев согласия для проверки адекватности непараметрических моделей законов распределений (непараметрических оценок), начатых в [12]. Для этого, опираясь на методику компьютерного моделирования статистических закономерностей [8–11], исследовались: зависимости распределения статистик вышеупомянутых критериев согласия от типа ядерных функций; изменения вида этих распределений с ростом объема выборки; зависимости распределения статистик от закона, соответствующего проверяемой гипотезе H_0; отражение на распределениях статистик оценивания параметра размытости.

При непараметрическом подходе мы так же, как и при параметрическом, сталкиваемся с проверкой простых и сложных гипотез. Допустим, по некоторой *ранее* наблюдаемой выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы получили непараметрическую оценку плотности вида (1). Значения $\theta_1 = x_1, \theta_2 = x_2, ..., \theta_n = x_n$ можно трактовать как параметры этой модели

$$p_n(x) = \frac{1}{n\lambda_n} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{x - \theta_i}{\lambda_n}\right). \tag{11}$$

Если проверка адекватности непараметрической оценки осуществляется по *новой* выборке, объем которой не обязательно тот же самый, то очевидно, что мы будем иметь дело с простой проверяемой гипотезой. Это классический случай, при котором статистики критериев типа Колмогорова, типа ω^2 и Ω^2 Мизеса при справедливости проверяемой гипотезы H_0 должны подчиняться распределениям $K(S)$, $a_1(S)$, $a_2(S)$ соответственно.

Для того чтобы удостовериться, что в случае простой гипотезы предельными распределениями статистик $G(S \mid H_0)$, действительно, являются распределения $K(S)$, $a_1(S)$, $a_2(S)$, выборки случайных величин, соответствующие гипотезе H_0, моделировались в соответствии с (11) по методу обратных функций. Моделирование подтвердило, что получаемые эмпирические распределения статистик исследуемых критериев хорошо согласуются с классическими предельными законами $K(S)$, $a_1(S)$ и $a_2(S)$. Например, на рис. 1 представлены результаты моделирования распределения статистики типа Колмогорова при объеме выборок моделируемых случайных величин $n = 50$ и количестве таких выборок $N = 500$. На рисунке приведены результаты проверки согласия полученного эмпирического распределения с распределением $K(S)$ по критериям χ^2 Пирсона, отношения правдоподобия, Колмогорова, ω^2 и Ω^2 Мизеса с отражением по каждому критерию достигнутого уровня значимости $P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s \mid H_0) ds$, где S^* – значение статистики критерия, вычисленное по выборке; $g(s \mid H_0)$ – плотность предельного распределения статистики соответствующего критерия при справедливости ги-

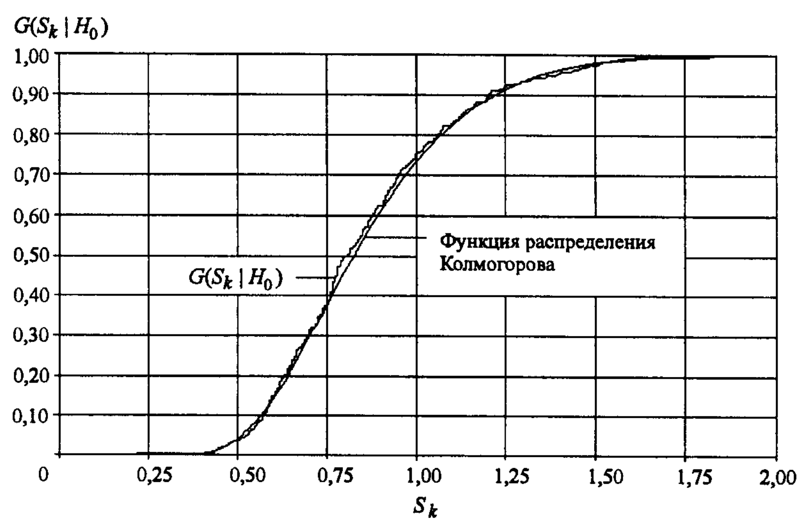

Рис. 1. Распределение статистики Колмогорова при простой гипотезе

потезы H_0. ($P\{S > S^*\} = 0{,}37264$ для критерия отношения правдоподобия; $0{,}35344 - \chi^2$ Пирсона; $0{,}14299$ – Колмогорова; $0{,}45431 - \omega^2$ Мизеса; $0{,}57374 - \Omega^2$ Мизеса.)

В параметрическом случае мы сталкиваемся со сложной гипотезой, если проверке предшествует оценивание параметров модели по этой же самой выборке. Для непараметрической модели такой ситуации в привычном понимании соответствует случай оценивания по конкретной выборке параметра (или параметров) размытости. С другой стороны, при построении по выборке модели (1) происходит неявная оценка ее параметров $\theta_1 = x_1$, $\theta_2 = x_2$, ..., $\theta_n = x_n$ (см. модель в форме (11)). Проверяя согласие с этой моделью по этой же выборке, даже без оценки параметра размытости мы, вообще говоря, также имеем дело со сложной гипотезой. Чтобы выделить эту наиболее часто встречаемую на практике ситуацию и подчеркнуть, что в данном случае не происходит оценивание параметров каким-либо методом, назовем ее проверкой «квазисложной» гипотезы.

Как и в параметрическом случае, при проверке сложных (квазисложных) гипотез распределения статистик критериев типа Колмогорова, типа ω^2 и Ω^2 Мизеса зависят от истинного закона распределения, соответствующего гипотезе H_0 [7–10]. Рис. 2, $a-c$, на котором представлены результаты моделирования распределений статистик критериев типа Колмогорова, типа ω^2 и Ω^2 Мизеса при проверке «квазисложных» гипотез H_0, демонстрирует зависимость распределений статистик от вида истинного закона, соответствующего H_0. При моделировании параметры $\theta_1 = x_1$, $\theta_2 = x_2$, ..., $\theta_n = x_n$ модели (11), соответствующей истинной гипотезе H_0, выбирались таким образом, чтобы она была близкой к одной из следующих параметрических моделей: экспоненциальному закону с плотностью

$$\exp(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{ -\frac{x-\mu}{\sigma} \right\},$$

закону распределения Коши с плотностью

$$\text{Koshi}(\mu, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi[\sigma^2 + (x-\mu)^2]}$$

или логистическому распределению с плотностью

$$\log(\mu, \sigma) = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}} \exp\left\{ -\frac{\pi(x-\mu)}{\sigma\sqrt{3}} \right\} \Bigg/ \left[1 + \exp\left\{ -\frac{\pi(x-\mu)}{\sigma\sqrt{3}} \right\} \right]^2.$$

Выборки случайных величин объемом $n = 50$ моделировались по (11). Для формирования выборки статистик эксперимент повторялся $N = 500$. Полученные результаты наглядно подтверждают, что при проверке квазисложных гипотез распределения статистик существенно зависят от истинного закона, соответствующего H_0, и сильно отличаются соответственно от распределений Колмогорова, $a_1(S)$ и $a_2(S)$, которые являются предельными в случае простых гипотез.

В параметрическом случае распределения статистик $G(S \mid H_0)$ непараметрических критериев согласия типа Колмогорова, типа ω^2 и Ω^2 Мизеса за-

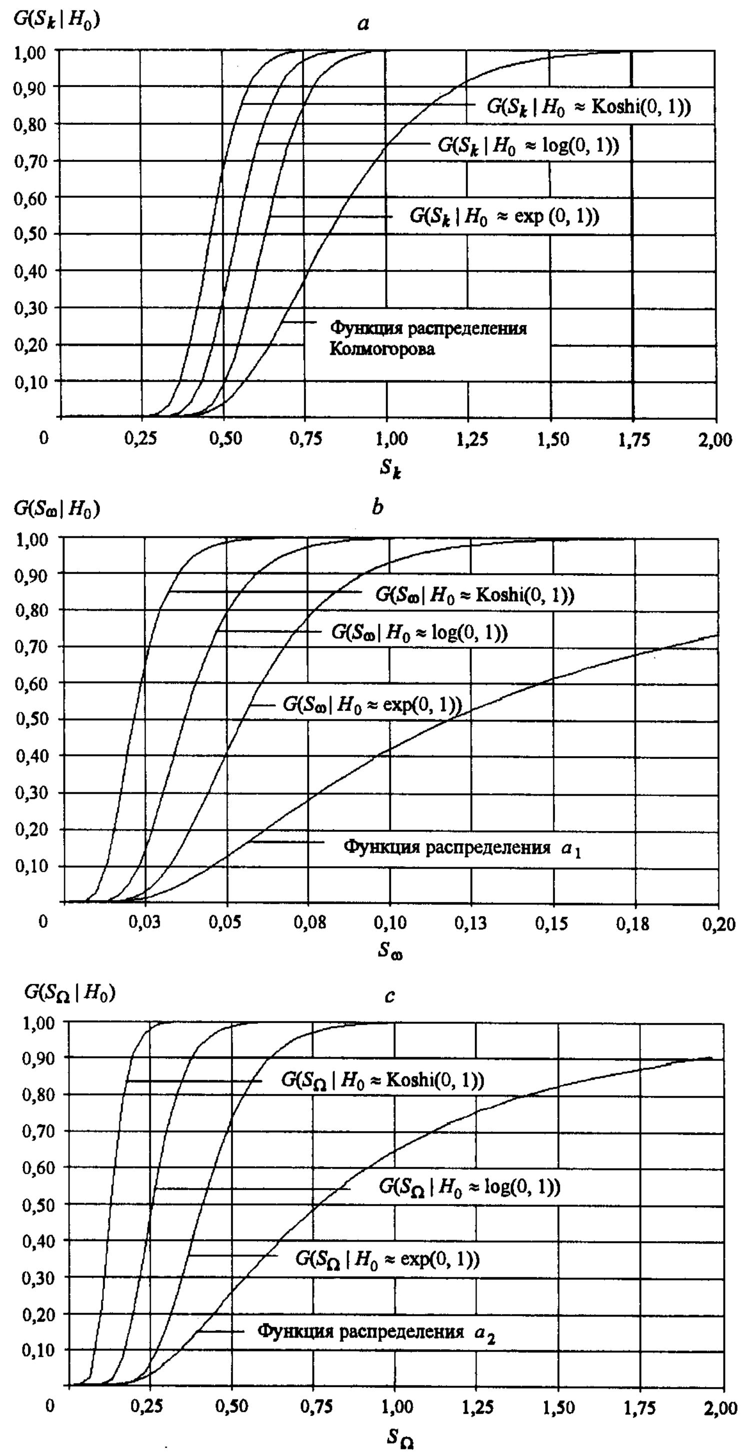

Рис. 2. Распределения статистики типа Колмогорова (*a*), типа ω^2 Мизеса (*b*) и типа Ω^2 Мизеса (*c*) при «квазисложной» гипотезе в зависимости от истинного закона, соответствующего гипотезе H_0

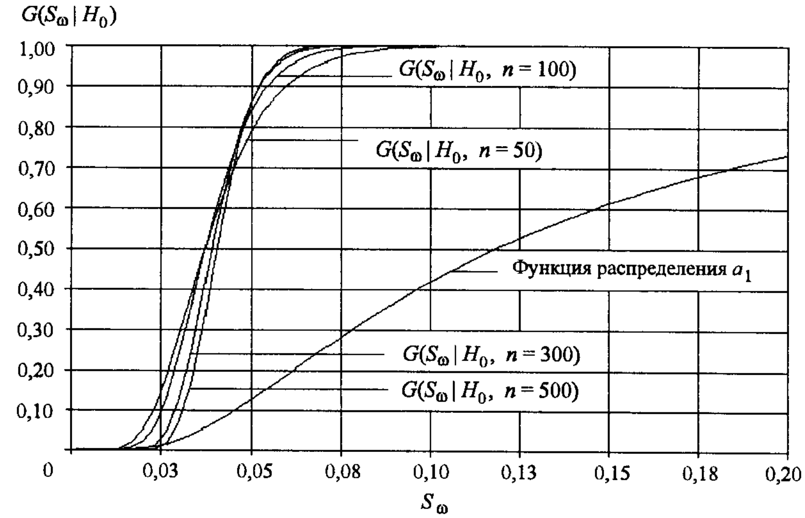

Рис. 3. Изменение распределений статистики типа ω^2 Мизеса при проверке «квазисложной» гипотезы в зависимости от объема выборки n

висят от объема выборок n, но с ростом n очень быстро сходятся к предельным как при простых, так и сложных гипотезах. Начиная с объемов выборок $n \geq 15-20$ при проверке простых гипотез и $n \geq 20-25$ при проверке сложных, можно пользоваться предельными распределениями статистик [8].

В случае непараметрических моделей при проверке сложных (квазисложных) гипотез прослеживаются несколько бóльшая зависимость от n и более медленная сходимость распределений статистик к предельным. Рис. 3 показывает характер изменения распределений статистики критерия типа ω^2 Мизеса при «квазисложной» гипотезе в зависимости от объема выборки случайных величин. В данном случае при моделировании параметры $\theta_1 = x_1$, $\theta_2 = x_2, ..., \theta_n = x_n$ модели (11), соответствующей истинной гипотезе H_0, выбирались таким образом, чтобы она была близкой к логистическому закону. Аналогичным образом меняются с ростом n и распределения статистик критериев типа Колмогорова и типа Ω^2 Мизеса.

Тип используемых ядерных функций также оказывает влияние на распределения статистик критериев согласия. Например, рис. 4 иллюстрирует зависимость распределений статистики критерия типа Колмогорова при той же «квазисложной» гипотезе (близкой к логистическому закону) и $n = 50$ от вида используемых ядерных функций (4) и (5), оказывающих аналогичное влияние на характер изменения распределений статистик типа ω^2 и Ω^2 Мизеса. Исследования показали, что с ростом объема выборки различие распределений статистик рассматриваемых критериев согласия при использовании разных видов ядерных функций становится более существенным.

При проверке сложных гипотез, когда по наблюдаемой выборке мы оцениваем параметр размытости, распределения статистик исследуемых критериев согласия зависят от тех же факторов, что и при «квазисложной» гипотезе, и дополнительно от метода оценивания параметра размытости. Например, рис. 5 показывает распределения статистики критерия согласия типа Колмогорова при сложной гипотезе (близкой к логистическому закону),

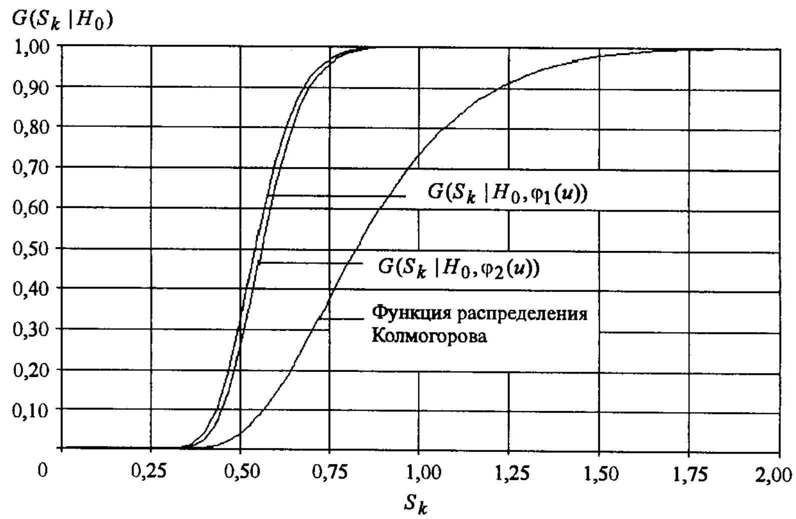

Рис. 4. Влияние типа ядерной функции на распределения статистики типа Колмогорова при проверке «квазисложной» гипотезы

$n = 50$ и различных оценках параметра размытости, вычисляемых в соответствии с соотношениями (6) и (7). На этом же рисунке для сравнения представлены распределения статистики Колмогорова в случае проверки сложной гипотезы о согласии с логистическим законом (с параметрической моделью) при одновременном вычислении оценок максимального правдоподобия (ОМП) двух параметров этого закона и при использовании MD (minimum distance)-оценок, получаемых минимизацией статистики соответствующего критерия согласия [9–11]. Аналогичным образом выбор оценки параметра

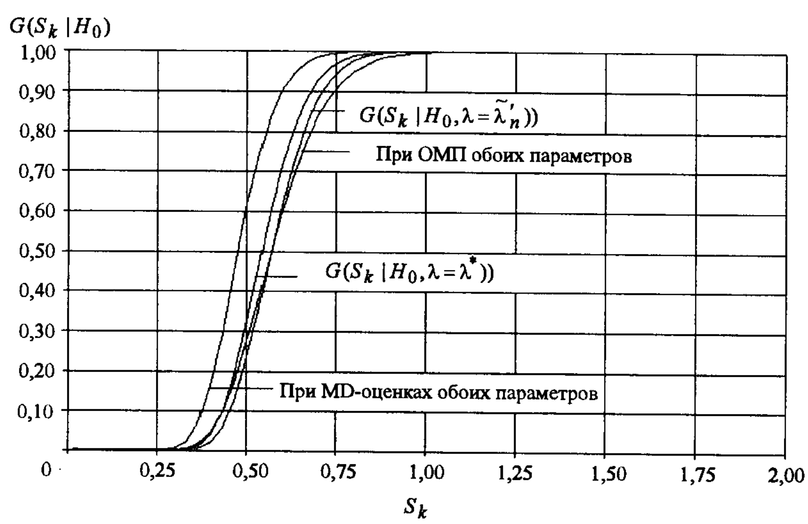

Рис. 5. Влияние метода оценивания параметра размытости на распределения статистики типа Колмогорова при проверке сложной гипотезы

размытости влияет на изменение распределений статистик критериев типа ω^2 и Ω^2 Мизеса.

Заключение. Проверка адекватности непараметрических моделей, используемых для описания ошибок измерений, безусловно, необходима. Очевидно, что эту проверку можно осуществлять с использованием критериев согласия, опираясь на применяемую методику.

При проверке адекватности непараметрической модели с простой проверяемой гипотезой мы имеем дело только в том случае, если построение оценки и проверка согласия проводятся по разным выборкам или по разным частям выборки. Результаты статистического моделирования подтвердили, что в таких ситуациях процедуры проверки должны опираться на классические результаты о предельных распределениях статистик критериев типа Колмогорова, типа ω^2 и Ω^2 Мизеса: распределения Колмогорова, $a_1(S)$ и $a_2(S)$ соответственно.

Проверка сложных гипотез о согласии по критериям типа Колмогорова, типа ω^2 и Ω^2 Мизеса при использовании непараметрических моделей по сравнению с применением параметрических моделей отличается большим многообразием факторов, определяющих «сложность» гипотезы. На распределения статистик рассматриваемых критериев существенно влияют: истинный закон распределения наблюдаемой случайной величины, соответствующий проверяемой гипотезе H_0; вид используемой ядерной функции; объем выборки; метод оценивания (вид оценки) параметра или параметров размытости. По сравнению с проверкой согласия с параметрическими моделями особенно следует подчеркнуть бóльшую зависимость распределений статистик от объема выборки. Это объясняется тем, что каждый новый элемент выборки, используемый в непараметрической оценке, является дополнительным «оцененным» параметром модели. И в этом состоит принципиальное отличие от задачи проверки сложных гипотез о согласии с применением параметрических моделей.

Проведенные исследования показали возможность использования непараметрических критериев согласия для проверки адекватности непараметрических моделей законов распределений при простых и сложных гипотезах, возможность построения моделей распределений статистик критериев согласия для различных проверяемых сложных гипотез.

Очевидно, многообразие сложных гипотез настолько велико, что построение моделей распределений статистик рассматриваемых критериев согласия для каждого определенного вида сложной гипотезы, задаваемой видом непараметрической оценки, заранее невозможно. Однако, опираясь на используемую методику компьютерного моделирования, для конкретной сложной проверяемой гипотезы (закона, соответствующего H_0; конкретного вида непараметрической оценки; объема выборки; метода оценивания параметра размытости) всегда можно построить модель распределения статистики применяемого критерия согласия, а следовательно, обеспечить проверку адекватности непараметрической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Parzen E.** On the estimation of probability density function and the mode // Ann. Math. Statist. 1962. **33**. P. 1065.

2. **Надарая Э. А.** Об оценке плотности распределения случайных величин // Сообщ. АН ГССР. 1964. **34**, № 2. С. 277.

3. **Надарая Э. А.** Непараметрическое оценивание плотности вероятности и кривой регрессии. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1983.

4. **Епанечников В. А.** Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. 1969. **14**, № 1. С. 156.

5. **Лапко А. В., Ченцов С. В.** Непараметрические системы обработки информации. М.: Наука, 2000.

6. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.

7. **Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J.** On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods // Ann. Math. Statist. 1955. **26**. P. 189.

8. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов // Завод. лаб. 1998. **64**, № 3. С. 61.

9. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим: Методические рекомендации. Ч. II. Непараметрические критерии. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999.

10. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез // Автометрия. 2001. № 2. С. 88.

11. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров // Завод. лаб. Диагностика материалов. 2001. **67**, № 7. С. 62.

12. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н., Французов А. В.** Исследование распределений статистики типа Колмогорова при использовании ядерных оценок // Материалы междунар. науч.-техн. конф. «Информатика и проблемы телекоммуникаций». Новосибирск: СибГУТИ, 2001. С. 82.

Новосибирский государственный
технический университет,
E-mail: headrd@fpm.ami.nstu.ru

Поступила в редакцию
23 октября 2001 г.