РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 2002

УДК 681.5.015

И. В. Бурлай

(Ростов-на-Дону)

РЕГУЛЯРНЫЙ МЕТОД ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

С использованием принципа инвариантного погружения разработан метод регулярной обработки измерительной информации, являющийся основой для синтеза непрерывных и дискретных алгоритмов фильтрации, устойчивых к погрешностям входных данных. Приведен иллюстративный пример.

Введение. Задача обработки измерительных данных в условиях априорной неопределенности традиционно решается в рамках теории статистических решений [1, 2]. Такой подход предполагает знание вероятностных характеристик помех и возмущений, неизбежно присутствующих в информационных каналах. Вместе с тем при решении практических задач достоверная информация о вероятностных характеристиках формирующих шумов, а также ошибок измерений в большинстве случаев отсутствует.

Существующее положение вещей усугубляется тем, что многие задачи обработки измерительных данных являются плохо обусловленными [3–6], при этом зачастую не удовлетворяются условия существования решения, его единственности или устойчивости к возмущениям. В такой ситуации задачу синтеза методов и алгоритмов оценивания целесообразно рассматривать с точки зрения теории регуляризации, определяющей методологию построения устойчивых алгоритмов обработки измерительной информации [5].

В настоящей работе рассмотрена задача обработки измерительных данных в динамической постановке, при этом имеющаяся информация о неизвестных величинах ограничивается знанием только допустимого диапазона их изменения. Задача обработки измерений сводится к построению решения, близкого по норме к некоторому априорно заданному вектору и согласованного с нормой помех и возмущений.

Постановка задачи, построение регуляризирующего оператора. Пусть динамическая система описывается на интервале $[t_0, T]$ следующей моделью:

$$\dot{x} = f(x,t) + G(x,t)w(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in R^n$ – вектор состояния; $w = w(t) \in R^m$ – вектор возмущений; функция $f = f(x,t) \in R^n$ непрерывна и дифференцируема по совокупности аргументов; функция $G = G(x,t) \in R^{n \times m}$ непрерывна; t_0 и T – начальный и конечный моменты времени соответственно.

Уравнение измерений имеет вид

$$h(t) = z(x,t) + \eta(t), \tag{2}$$

где $h = h(t) \in R^l$ – вектор измерений; $\eta = \eta(t) \in R^l$ – помеха в канале измерения; $z = z(x,t) \in R^l$ – известная вектор-функция, дифференцируемая по совокупности аргументов.

Дискретные модели объекта и измерений, соответствующие (1) и (2), определяются следующими выражениями:

$$x(k+1) = \varphi[x(k),k] + B[x(k),k]w(k), \tag{3}$$

$$h(k) = z[x(k),k] + \eta(k), \tag{4}$$

где $x(k) \in R^n$; $w(k) \in R^m$; $\varphi = \varphi[x(k),k] \in R^n$; $B = B[x(k),k] \in R^{n \times m}$; $h(k) \in R^l$; $z[x(k),k] \in R^l$; $\eta(k) \in R^l$, $k \in \{k_0, k_1, ..., k_T\}$.

Предельные соотношения для перехода от непрерывной модели к дискретной имеют вид [7]:

$$f(x,t) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ t_k \to t}} \frac{1}{\Delta t}\{\varphi[x(k),k] - x(k)\}, \tag{5}$$

$$z(x,t) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ t_k \to t}} z[x(k),k], \tag{6}$$

$$G(x,t) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ t_k \to t}} \frac{1}{\Delta t}\{B[x(k),k]\}, \tag{7}$$

где Δt – шаг квантования, $\Delta t = t_{k+1} - t_k$.

Определим на интервале измерений пространство $L_2[t_0, T]$. Полагаем, что для возмущений и помех известны следующие оценки сверху:

$$\|w\|_{L_2}^2 \le w_0^2, \tag{8}$$

$$\|\eta\|_{L_2}^2 \le \eta_0^2, \tag{9}$$

где w_0^2 и η_0^2 – заданные числа; $\|\cdot\|$ – норма.

Запишем функционал невязки в виде

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[h(t) - z(x,t)]^T R_\eta^{-1}[h(t) - z(x,t)]dt, \tag{10}$$

где $R_\eta = R_\eta(t) \in R^{l \times l}$ – диагональная весовая матрица, характеризующая интенсивность помех в канале измерений.

В дискретной форме невязка (10) примет вид

$$\widetilde{I} = \frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{k_T}[h(k) - z[x(k),k]]^T V_\eta^{-1}[h(k) - z[x(k),k]], \tag{11}$$

где $V_\eta = V_\eta(k) \in R^{l \times l}$, $\lim\limits_{\substack{\Delta t \to 0 \\ t_k \to t}} V_\eta(k)\Delta t = R_\eta(t)$.

Известно, что оптимизационные задачи типа (10), (11) относятся к классу некорректных, при этом либо не выполняется условие единственности (например, в случае $l < n$), либо для избыточного числа измерений может нарушаться условие существования решения [3, 6].

Согласно вариационному принципу решения некорректных задач для построения устойчивой оценки $\hat{x}$ вектора x необходимо сузить множество допустимых решений, при этом необходимо привлекать дополнительную информацию в виде уравнений (1), (3), а также качественную информацию об искомом решении (в частности целесообразно осуществить отбор решения, имеющего минимальную абсолютную или относительную норму) [4, 5].

По аналогии с [6] запишем сглаживающий функционал в виде

$$I_\alpha = \frac{1}{2}[(\hat{x}_0 - x_0)^T R_0^{-1}(\hat{x}_0 - x_0)] + \int_{t_0}^{T}\frac{1}{2}[h(t) - z(\hat{x},t)]^T R_\eta^{-1}[h(t) - z(\hat{x},t)]dt +$$

$$+\int_{t_0}^{T}\frac{1}{2}w^T(t)R_w^{-1}w(t)dt + \alpha\Omega(\hat{x}), \tag{12}$$

где $\Omega(\hat{x}) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}(\hat{x} - \bar{x})^T(\hat{x} - \bar{x})dt$ – стабилизирующий функционал; $\bar{x} = \bar{x}(t) \in$ $\in R^n$ – априорно заданный вектор; $R_0 = R(t_0) \in R^{n \times n}$ и $R_w = R_w(t) \in R^{m \times m}$ – диагональные весовые матрицы; $\alpha = \alpha(w_0, \eta_0) > 0$ – параметр регуляризации, определяемый с учетом (8), (9) по невязке [5]:

$$\rho[h(t), z(\hat{x},t)] = \eta_0 + w_0[\Omega(\hat{x})]^{1/2} \tag{13}$$

(здесь $\rho[\cdot]$ – расстояние).

Следуя вариационному принципу, сформируем вспомогательный критерий качества I_α^* путем прибавления к (12) системы дифференциальных уравнений (1) с учетом вектора множителей Лагранжа $\lambda(t) = \{\lambda_i(t),\ i = \overline{1,n}\}^T$:

$$I_\alpha^* = \frac{1}{2}[(\hat{x}_0 - x_0)^T R_0^{-1}(\hat{x}_0 - x_0)] + \int_{t_0}^{T}\Bigg\{\frac{1}{2}[h(t) - z(\hat{x},t)]^T R_\eta^{-1}[h(t) - z(\hat{x},t)] +$$

$$+\alpha\frac{1}{2}(\hat{x} - \bar{x})^T(\hat{x} - \bar{x}) + \frac{1}{2}w^T(t)R_w^{-1}w(t) + \lambda^T(t)[f(\hat{x},t) + G(\hat{x},t)w(t) - \dot{\hat{x}}]\Bigg\}dt. \tag{14}$$

Минимизация функционала (14) приводит к решению двухточечной краевой задачи (ДКЗ):

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, t) - G(\hat{x}, t) R_w G^T(\hat{x}, t) \lambda(t), \tag{15}$$

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial z^T(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} R_\eta^{-1} [h(t) - z(\hat{x}, t)] - \frac{\partial f^T(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \lambda(t) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \hat{x}} [\lambda^T(t) G(\hat{x}, t) R_w G^T(\hat{x}, t)] \lambda(t) - \alpha(\hat{x} - \bar{x}) \tag{16}$$

для заданных граничных условий

$$\hat{x}_0 = x_0 - R_0 \lambda(t_0), \tag{17}$$

$$\lambda(T) = 0. \tag{18}$$

Для дискретного случая с учетом [7, 8] ДКЗ имеет вид (дискретная форма минимизируемого функционала для сокращения записей опущена):

$$\hat{x}(k+1) = \varphi[\hat{x}(k), k] - B[\hat{x}(k), k] V_w(k) B^T[\hat{x}(k), k] \psi^{-1}[\hat{x}(k), k] \lambda(k), \tag{19}$$

$$\lambda(k+1) = \psi^{-1}[\hat{x}(k), k] \lambda(k) + \frac{\partial z^T[\hat{x}(k+1), k+1]}{\partial \hat{x}(k+1)} V_\eta^{-1}(k+1) \times$$

$$\times \{h(k+1) - z[\hat{x}(k+1), k+1]\} - \alpha[\hat{x}(k+1) - \bar{x}(k+1)], \tag{20}$$

где

$$\psi[\hat{x}(k), k] = \frac{\partial \varphi^T[\hat{x}(k), k]}{\partial \hat{x}(k)} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}(k)} \{B[\hat{x}(k), k] V_w(k) B^T[\hat{x}(k), k] \lambda(k)\}^T,$$

$$V_w(k) \in R^{m \times m}, \ \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ t_k \to t}} V_w(k) \Delta t = R_w(t).$$

Граничные условия для задачи (19), (20) имеют вид

$$\hat{x}(k_0) = x(k_0) - V_0 \lambda(k_0), \tag{21}$$

$$\lambda(k_T) = 0, \tag{22}$$

где $V_0 = V(k_0) \in R^{n \times n}$.

Параметр регуляризации α определяется с учетом (4) из условия

$$\rho\{h(k) - z[\hat{x}(k), k]\} = \eta_0 + w_0 \{\Omega[\hat{x}(k)]\}^{1/2}, \tag{23}$$

где $k \in \{k_0, k_1, \ldots, k_T\}$.

Уравнения (15)–(18) для непрерывного случая и (19)–(22) для дискретного случая определяют регуляризирующий оператор, задаваемый краевой задачей для фазовых и сопряженных переменных. Далее рассмотрим эффективный в вычислительном плане подход к решению задачи регулярной обработки измерительных данных на основе метода инвариантного погружения [7, 8].

Синтез алгоритмов регулярной обработки данных. Рассмотрим сначала задачу синтеза алгоритма обработки измерительной информации для дискретного случая, а соответствующий непрерывный алгоритм затем получим, используя предельный переход (5)–(7). Запишем ДКЗ (19), (20) в общем виде:

$$\hat{x}(k+1)=\xi[\hat{x}(k),\lambda(k),k], \tag{24}$$

$$\lambda(k+1)=\mu[\hat{x}(k),\lambda(k),k,\alpha]. \tag{25}$$

Заметим, что в формулах (19), (20) присутствуют квадратичные относительно $\lambda(t)$ выражения. Поскольку при использовании процедуры инвариантного погружения члены степени выше первой по $\lambda(t)$ исчезают, при дальнейших выкладках справедливо выражение [7, 8]:

$$\psi[\hat{x}(k),k]=\psi=\frac{\partial\varphi^{T}[\hat{x}(k),k]}{\partial\hat{x}(k)}. \tag{26}$$

Заменяя однородное краевое условие (22) более общим условием $\lambda(k_T)=c$, $c\in R^n$, запишем выражение для функции $r(c+\Delta c,\ k_T+1)$:

$$r(c+\Delta c,\ k_T+1)=r(c,\ k_T)+\frac{\partial r(c,\ k_T)}{\partial c}\Delta c+\frac{\partial r(c,\ k_T)}{\partial k_T}\Delta t+\frac{\partial^2 r(c,\ k_T)}{\partial c\partial k_T}\Delta c\Delta t. \tag{27}$$

Из уравнений (24), (25) следует

$$r(c+\Delta c,\ k_T+1)-r(c,\ k_T)=\xi[r(c,k_T),c,k_T]-r(c,\ k_T), \tag{28}$$

$$\Delta c=\lambda(k_T+1)-\lambda(k_T)=\mu[r(c,\ k_T),c,k_T,\alpha]-c. \tag{29}$$

Подстановка (28), (29) в (27) заканчивает процедуру инвариантного погружения в дискретном времени:

$$\frac{\partial r(c,\ k_T)}{\partial k_T}+\left[\frac{\partial r(c,\ k_T)}{\partial c}+\frac{\partial^2 r(c,\ k_T)}{\partial c\partial k_T}\right][\mu[r(c,k_T),c,\ k_T,\alpha]-c]=$$

$$=\xi[r(c,k_T),c,k_T]-r(c,\ k_T). \tag{30}$$

Решение уравнения (30) будем искать в виде

$$r(c,\ k_T)=\hat{x}(k_T)-P(k_T)c. \tag{31}$$

Из (30) с учетом (31) следует

$$\hat{x}(k_T+1)-P(k_T+1)\mu[\hat{x}(k_T)-P(k_T)c,c,k_T,\alpha]=$$

$$=\xi[\hat{x}(k_T)-P(k_T)c,c,k_T]. \tag{32}$$

Разлагая ξ и μ в ряд Тейлора в окрестности точки $c = 0$, можно переписать (32) в виде

$$-P(k_T+1)\left\{\mu[\hat{x}(k_T), 0, k_T, \alpha] + \left.\frac{\partial\mu[\hat{x}(k_T) - P(k_T)c, c, k_T, \alpha]}{\partial c}\right|_{c=0} c\right\} + \hat{x}(k_T+1) =$$

$$= \xi[\hat{x}(k_T), 0, k_T] + \left.\frac{\partial\xi[\hat{x}(k_T) - P(k_T)c, c, k_T]}{\partial c}\right|_{c=0} c. \qquad (33)$$

Приравняем в (33) коэффициенты при нулевой и первой степени c:

$$\hat{x}(k_T+1) = \xi[\hat{x}(k_T), 0, k_T] + P(k_T+1)\mu[\hat{x}(k_T), 0, k_T, \alpha], \qquad (34)$$

$$P(k_T+1)\left\{\left.\frac{\partial\mu[\hat{x}(k_T) - P(k_T)c, c, k_T, \alpha]}{\partial c}\right|_{c=0}\right\} = -\left.\frac{\partial\xi[\hat{x}(k_T) - P(k_T)c, c, k_T]}{\partial c}\right|_{c=0} \qquad (35)$$

По аналогии с [8] подставим в (34) и (35) выражения для ξ и μ из (19), (20). При этом следует учесть, что в правой части уравнения (20) имеет место зависимость от $\hat{x}(k_T+1)$ [8], но данную трудность можно преодолеть, подставляя $\hat{x}(k_T+1)$ из (19). Используя разложение в окрестности $\varphi[\hat{x}(k_T), k_T]$, с учетом соотношения (26) имеем

$$\xi[\hat{x}(k_T), c, k_T] = \varphi[\hat{x}(k_T), k_T] - B[\hat{x}(k_T), k_T]V_w(k_T)B^T[\hat{x}(k_T), k_T]\psi^{-1}c, \qquad (36)$$

$$\mu[\hat{x}(k_T), c, k_T, \alpha] = \psi^{-1}c + M[\hat{x}(k_T+1), k_T+1] - \frac{\partial M[\hat{x}(k_T+1), k_T+1]}{\partial\hat{x}(k_T+1)} \times$$

$$\times B[\hat{x}(k_T), k_T]V_w(k_T)B^T[\hat{x}(k_T), k_T]\psi^{-1}c - \alpha[\hat{x}(k_T+1) - \bar{x}(k_T+1)] +$$

$$+ \alpha B[\hat{x}(k_T), k_T]V_w(k_T)B^T[\hat{x}(k_T), k_T]\psi^{-1}c, \qquad (37)$$

где

$$M[\hat{x}(k_T+1), k_T+1] =$$

$$= \frac{\partial z^T[\hat{x}(k_T+1), k_T+1]}{\partial\hat{x}(k_T+1)} V_\eta^{-1}(k_T+1)\{h(k_T+1) - z[\hat{x}(k_T+1), k_T+1]\},$$

$$\hat{x}(k_T+1) = \varphi[\hat{x}(k_T), k_T].$$

Из (36), (37) получим необходимые выражения:

$$\xi[\hat{x}(k_T), 0, k_T] = \varphi[\hat{x}(k_T), k_T] = \hat{x}(k_T+1), \qquad (38)$$

$$\left.\frac{\partial\xi[\hat{x}(k_T) - P(k_T)c, c, k_T]}{\partial c}\right|_{c=0} = -\psi^T P(k_T) - BV_wB^T\psi^{-1}, \qquad (39)$$

$$\mu[\hat{x}(k_T),0,k_T,\alpha]=M[\hat{x}(k_T+1),k_T+1]-\alpha[\hat{x}(k_T+1)-\bar{x}(k_T+1)], \quad (40)$$

$$\left.\frac{\partial\mu\,[\hat{x}(k_T)-P(k_T)c,c,k_T,\alpha]}{\partial c}\right|_{c=0}=\psi^{-1}-\frac{\partial M[\hat{x}(k_T+1),k_T+1]}{\partial\hat{x}(k_T+1)}\psi^T P(k_T)-$$

$$-\frac{\partial M[\hat{x}(k_T+1),k_T+1]}{\partial\hat{x}(k_T+1)}BV_wB^T\psi^{-1}+\alpha\psi^T P(k_T)+\alpha BV_wB^T\psi^{-1}. \quad (41)$$

Подставляя выражения (38)–(41) в уравнения (34), (35) и заменяя k_T текущим временем k, получим

$$\hat{x}(k+1)=\varphi[\hat{x}(k),k]+P(k+1)\left\{\frac{\partial z^T[\hat{x}(k+1),k+1]}{\partial\hat{x}(k+1)}V_\eta^{-1}(k+1)\times\right.$$

$$\left.\times[h(k+1)-z[\hat{x}(k+1),k+1]]-\alpha[\hat{x}(k+1)-\bar{x}(k+1)]\right\}, \quad (42)$$

$$P(k+1)\left\{\psi^{-1}-\frac{\partial M[\hat{x}(k+1),k+1]}{\partial\hat{x}(k+1)}[BV_wB^T\psi^{-1}+\psi^T P(k)]+\right.$$

$$\left.+\alpha[BV_wB^T\psi^{-1}+\psi^T P(k)]\right\}=[BV_wB^T\psi^{-1}+\psi^T P(k)]. \quad (43)$$

Умножая справа уравнение (43) на ψ и вводя обозначение

$$P(k+1\,|\,k)=B[\hat{x}(k),k]V_w(k)B^T[\hat{x}(k),k]+\psi^T P(k)\psi, \quad (44)$$

уравнение (43) перепишем в следующем компактном виде:

$$P(k+1)=\left\{I-\frac{\partial M[\hat{x}(k+1),k+1]}{\partial\hat{x}(k+1)}P(k+1\,|\,k)+\alpha P(k+1\,|\,k)\right\}^{-1}P(k+1\,|\,k), \quad (45)$$

где $I\in R^{n\times n}$ – единичная матрица.

Уравнения (42), (45) решаются при следующих начальных условиях:

$$\hat{x}(k_0)=x_0, \qquad P(k_0)=V_0. \quad (46)$$

Применяя лемму об обращении матриц [7, 8], а также устремляя шаг дискретизации Δt к нулю, из (42), (44) и (45) получим

$$\dot{\hat{x}}=f(\hat{x},t)+P(t)\left\{\frac{\partial z^T(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}}R_\eta^{-1}[h(t)-z(\hat{x},t)]-\alpha(\hat{x}-\bar{x})\right\}, \quad (47)$$

$$\dot{P}(t)=\frac{\partial f(\hat{x},t)}{\partial \hat{x}}P(t)+P(t)\frac{\partial f^T(\hat{x},t)}{\partial \hat{x}}+G(\hat{x},t)R_w G^T(\hat{x},t)-$$

$$-P(t)\left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left\{\frac{\partial z^T(\hat{x},t)}{\partial \hat{x}}R_\eta^{-1}[h(t)-z(\hat{x},t)]\right\}-\alpha I\right)P(t). \quad (48)$$

Уравнения (47), (48) решаются при следующих начальных условиях:

$$\hat{x}_0=x_0, \qquad P(t_0)=P_0. \quad (49)$$

Соотношения (42), (45), (46) определяют алгоритмы регулярной обработки измерительных данных для дискретного случая, а (47)–(49) – для непрерывного. Полученные оценки в соответствии с основными теоремами теории регуляризации [3, 5] согласованы с погрешностями входных данных таким образом, что $\hat{x}$ стремится к точному решению при $w\to 0$ и $\eta\to 0$.

Как частный случай из уравнений (42), (45) и (47), (48) следуют классические уравнения нелинейного оценивания. Полагая помехи и возмущения распределенными по нормальному закону с известными статистическими характеристиками при $\alpha\to 0$, соотношения (42), (45) и (47), (48) легко трансформируются в уравнения соответствующих нелинейных фильтров калмановского типа [7, 8], при этом уравнения (45) и (48) приобретают смысл первого приближения оценки ковариационной матрицы ошибок.

Параметр регуляризации α в уравнениях оценивания (42), (45) и (47), (48) определяется согласно (23) и (13) соответственно. При практических расчетах, выполняемых в режиме реального времени, целесообразно назначить априорно значение параметра α, обеспечивающее порядок убывания $\alpha(w_0, \eta_0)$, достаточный для построения регуляризирующего алгоритма [5, 6], в частности можно положить $\alpha=w_0^2+\eta_0^2$. В этом случае оценка вектора состояния $\hat{x}(t)$ будет не хуже, чем при самой неблагоприятной помеховой обстановке.

Иллюстративный пример. Рассмотрим задачу оценивания вектора состояния динамического объекта, движение которого в геоцентрической системе координат определяется моделью [9]:

$$\begin{cases}\dot{x}=V_x,\\ \dot{y}=V_y,\\ \dot{z}=V_z,\\ \dot{V}_x=g_r\dfrac{x}{r}+\omega_3^2 x-2\omega_3 V_z-c_x\dfrac{\rho S}{2m}V_\text{в}V_{x\text{в}},\\ \dot{V}_y=g_r\dfrac{y}{r}+g_\omega-c_x\dfrac{\rho S}{2m}V_\text{в}V_{y\text{в}},\\ \dot{V}_z=g_r\dfrac{z}{r}+\omega_3^2 z+2\omega_3 V_x-c_x\dfrac{\rho S}{2m}V_\text{в}V_{z\text{в}},\end{cases} \quad (50)$$

где x, y, z – координаты объекта; V_x, V_y, V_z – составляющие вектора скорости; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – радиальная дальность; $V_\text{в}=\sqrt{V_{x\text{в}}^2+V_{y\text{в}}^2+V_{z\text{в}}^2}$ – модуль вектора воздушной скорости; $V_{x\text{в}} = V_x - V_w^x$, $V_{y\text{в}} = V_y - V_w^y$, $V_{z\text{в}} = V_z - V_w^z$ (V_w^x, V_w^y, V_w^z – проекции скорости ветра на оси геоцентрической системы координат); g_r – радиальная составляющая ускорения силы тяготения; g_ω – проекция ускорения силы тяготения на ось вращения Земли; c_x – коэффициент лобового сопротивления; S – площадь миделя; m – масса объекта; $\rho = \rho(h)$ – плотность воздуха на высоте h над поверхностью общеземного эллипсоида; ω_3 – угловая скорость вращения Земли.

Для корректного использования модели (50) необходимо учесть возмущения, характеризующие отклонения реальных условий от идеальных. По аналогии с [9, 10] добавим в три последних уравнения модели (50) ускорения $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$, составляющие вектор $\Omega = \Omega(t) \in R^3$, который удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Omega}(t) = -c\Omega(t) + N(t), \tag{51}$$

где c – константа, а $N(t) = [N_x(t), N_y(t), N_z(t)]^T$ – вектор возмущений.

С учетом (50), (51) движение объекта будет описываться системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x,t) + w(t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{52}$$

где $x \in R^9$, $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9]^T = [x, y, z, V_x, V_y, V_z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]^T$, а векторная функция $f(x,t) \in R^9$ содержит строки

$$\begin{cases} f_1 = x_4, \\ f_2 = x_5, \\ f_3 = x_6, \\ f_4 = g_r \dfrac{x_1}{r} + \omega_3^2 x_1 - 2\omega_3 x_6 - c_x \dfrac{\rho S}{2m} V_\text{в} V_{x\text{в}} + x_7, \\ f_5 = g_r \dfrac{x_2}{r} + g_\omega - c_x \dfrac{\rho S}{2m} V_\text{в} V_{y\text{в}} + x_8, \\ f_6 = g_r \dfrac{x_3}{r} + \omega_3^2 x_3 + 2\omega_3 x_4 - c_x \dfrac{\rho S}{2m} V_\text{в} V_{z\text{в}} + x_9, \\ f_7 = -c x_7, \\ f_8 = -c x_8, \\ f_9 = -c x_9, \end{cases} \tag{53}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $V_{x\text{в}} = x_4 - V_w^x$, $V_{y\text{в}} = x_5 - V_w^y$, $V_{z\text{в}} = x_6 - V_w^z$.

Вектор $w \in R^9$ имеет координаты $w = [0, 0, 0, 0, 0, 0, N_x, N_y, N_z]^T$; весовая матрица $R_w \in R^{9\times 9}$ полагалась диагональной с элементами $R_w^{11} = R_w^{22} = R_w^{33} = R_w^{44} = R_w^{55} = R_w^{66} = 0$, $R_w^{77} = R_w^{88} = R_w^{99} = \dfrac{2c}{\Delta t}\delta^2$; δ^2 – известная величина.

Уравнение измерений задавалось в виде

$$h(t) = x(t) + \eta(t), \tag{54}$$

где $h(t) \in R^9$, $\eta(t) \in R^9$. Помехи $\eta(t)$ и возмущения $N(t)$ полагались гармоническими: $\eta(t) = [\eta_i(t) = a_i \sin\omega_i t, \quad i = \overline{1,9}]^T$, $N_x(t) = b_x \cos\omega_x t$, $N_y(t) = b_y \cos\omega_y t$, $N_z(t) = b_z \cos\omega_z t$. При моделировании использовались следующие исходные данные (для сокращения записей размерности физических величин здесь и далее опускаются): $x_0 = [5\cdot10^4, 4\cdot10^4, 2\cdot10^4, 3\cdot10^3, 2\cdot10^3, 10^3, 0, 0, 0]^T$; $t_0 = 0$; $T = 10$; $S = 5$; $m = 100$; $c = 1$; $\delta = 10^{-1}$; $\Delta t = 10^{-2}$; $a_1 = a_2 = a_3 = 3$; $a_4 = a_5 = a_6 = 5\cdot10^{-1}$; $a_7 = a_8 = a_9 = 10^{-1}$; $\omega_i = 2\cdot10^2$, $i = \overline{1,9}$; $b_x = 4\cdot10^{-1}$; $b_y = b_z = 10^{-1}$; $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 10^3$; $w_0^2 = 10$; $\eta_0^2 = 45$.

Весовая матрица $R_\eta \in R^{9\times9}$ полагалась диагональной с элементами $R_\eta^{11} = R_\eta^{22} = R_\eta^{33} = 2$, $R_\eta^{44} = R_\eta^{55} = R_\eta^{66} = 10^{-1}$, $R_\eta^{77} = R_\eta^{88} = R_\eta^{99} = 3\cdot10^{-3}$.

В качестве программной траектории $\bar{x}(t)$ использовалось высокоточное решение системы (52), полученное в отсутствие возмущений с использованием метода Рунге – Кутта четвертого порядка точности, значения $\rho(h)$ и c_x задавались таблично [10], параметр α определялся согласно (13).

Результаты моделирования алгоритма оценивания (47), (48) с использованием моделей (50)–(54) приведены в таблице и представляют собой зависимости абсолютных погрешностей оценивания координатных параметров $\Delta_i = \hat{x}_i - \bar{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ от времени t. Аналогичные погрешности, полученные с использованием алгоритма калмановской фильтрации при тех же исходных данных, обозначены в таблице Δ_i^K, $i = 1, 2, 3$.

Результаты численных расчетов показывают, что развитый подход за счет использования стабилизатора Ω обеспечивает достаточно высокую скорость сходимости оценок к точному решению в отличие от алгоритма калмановского типа, точностные характеристики которого весьма чувствительны к неадекватности используемых моделей и погрешностям входных данных.

Таким образом, полученные результаты позволяют решить задачу обработки измерительных данных в условиях априорной неопределенности. Построен регуляризирующий оператор, задаваемый краевой задачей для фазо-

t, с	Δ_1, м	Δ_2, м	Δ_3, м	Δ_1^K, м	Δ_2^K, м	Δ_3^K, м
1	5,556	–4,874	2,876	–7,681	–5,763	–2,004
2	4,116	–3,376	4,981	–4,870	–7,983	–7,950
3	–2,563	1,750	–1,056	5,831	–4,026	3,152
4	–4,587	4,762	1,563	6,942	–5,092	2,947
5	2,980	–3,005	1,983	7,543	5,930	6,927
6	2,002	–2,871	1,569	8,912	1,004	–9,591
7	2,431	–2,116	1,478	9,352	–5,093	–5,037
8	2,123	–2,003	1,258	13,879	–8,463	5,382
9	1,981	–1,994	1,115	14,984	–9,087	7,095
10	1,865	–1,678	1,005	12,096	–13,045	10,936

вых и сопряженных переменных, показан эффективный в вычислительном плане путь преобразования данного оператора к одноточечной задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Цапенко М. П.** Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование. М.: Энергоатомиздат, 1985.
2. **Тихонов В. И., Кульман Н. К.** Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975.
3. **Вапник В. Н.** Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979.
4. **Бурлай И. В.** Синтез цифровых дифференцирующих фильтров, устойчивых к случайным и сингулярным погрешностям входного сигнала // Автометрия. 2000. № 6. С. 26.
5. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
6. **Бурлай И. В.** Регулярные методы оценивания состояния объектов в динамической и кинематической постановке // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 17.
7. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
8. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974.
9. **Лебедев А. А., Герасюта Н. Ф.** Баллистика ракет. М.: Машиностроение, 1970.
10. **Ярошевский В. А.** Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 11 марта 2001 г.