РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 1 2002

УДК 681.2.08

Ю. В. Бондаренко, А. Н. Касперович

(Новосибирск)

ИТЕРАЦИОННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА С ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСОЙ ПО НЕРАВНОМЕРНЫМ ОТСЧЕТАМ*

Приведены результаты компьютерного моделирования итерационного способа восстановления сигнала с ограниченной полосой по неравномерным отсчетам. Показано, что использование итерационной процедуры позволяет восстанавливать сигнал при значительной неравномерности, когда расстояния между соседними отсчетами более чем вдвое превышают средний интервал дискретизации. Точность восстановления (скорость сходимости к точному решению) определяется не столько величиной смещения отсчетов из равномерных положений, сколько отличием расстояния между соседними отсчетами от среднего интервала дискретизации.

Исследование эффективных методов восстановления сигнала по неравномерным отсчетам по-прежнему остается актуальным. Итерационный способ восстановления сигнала с ограниченной полосой при условии, что средняя частота неравномерных отсчетов соответствует частоте Найквиста, рассмотрен в [1–3]. Описанный в этих работах метод основан на восстановлении такого непрерывного сигнала, фильтрация которого дает тот же результат, что и фильтрация входных неравномерных отсчетов. По приведенным результатам трудно судить об эффективности метода, так как в качестве примера в [1] рассматривается сигнал, содержащий не кратные интервалу гармоники, т. е., по существу, не ограниченный по полосе.

Для ограниченного по полосе сигнала представляется естественным по заданным его значениям в N неравномерных точках восстанавливать значения сигнала не по всему интервалу, а в N равномерных точках, что значительно ускоряет процесс вычислений, и в дальнейшем по ним интерполировать сигнал на всем интервале с помощью стандартных процедур (в предположении о периодическом повторении сигнала и неравномерности во времени).

В данной работе оценивается возможность восстановления с помощью различных способов реализации итерационной процедуры в условиях, когда частота дискретизации близка к частоте Найквиста и отклонения отсчетов от равномерных позиций велики. Кроме того, уточняется влияние характера ис-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-15-99092).

ходного сигнала, степени и вида неравномерности отсчетов на скорость сходимости итерационной процедуры восстановления.

Отметим, что интервал существования сигнала при неравномерной дискретизации становится неопределенным (разные наборы неравномерных отсчетов одного и того же сигнала приводят к разной средней частоте дискретизации); такая ситуация часто встречается и на практике. При моделировании будем предполагать, что время существования сигнала известно точно, т. е. при процедуре восстановления сигнала в реальности необходимо задать интервал существования сигнала, определить среднюю частоту дискретизации и расставить равномерные отсчеты.

Введем соответствующие обозначения. Интервал существования сигнала приведем к $[-0{,}5;\ 0{,}5]$. В неравномерных точках $\{\tau_s\}$, $s=1,\ldots,N$, заданы значения сигнала $f(\tau)$. Набор точек равномерных отсчетов на интервале обозначим $\{t_n\}$, $n=1,\ldots,N$. Расстояния между ними $\Delta=1/N$, т. е. частота равномерной дискретизации соответствует средней частоте неравномерной дискретизации. Отклонения точек отсчетов от равномерных положений $\mu_n = \tau_n - t_n$, $n=1,\ldots,N$.

С помощью некоторого оператора P, который опишем далее, по совокупности неравномерных отсчетов $f(\tau)$ вычислим значения сигнала в равномерных точках, $f^0(t)$. Это нулевое приближение. Далее следует итерационная процедура, которая заключается в следующем. По значениям $f^0(t)$ в предположении о периодичности повторения сигнала и неравномерных отсчетов с помощью идеального фильтра нижних частот $h(t)$ находим значения сигнала в точках τ; обозначим их $\tilde{f}(\tau)$. После чего вычислим разность $\mathrm{dif}^0(\tau) = f(\tau)-\tilde{f}(\tau)$. Эта разность между исходными и полученными значениями сигнала определена в неравномерных точках τ. Находим $\mathrm{dif}^1(t)=P[\mathrm{dif}^0(\tau)]$ и, добавив эту поправку с некоторым множителем λ $(0<\lambda<1)$ к $f^0(t)$, получаем следующее приближение к значениям сигнала в равномерных точках, $f^1(t)$.

Итерационная процедура может быть записана в виде

$$f^{k+1}(t)=f^k(t)+\lambda P[f(\tau)-\tilde{f}^k(\tau)],$$

где k – номер итерации. Цикл может повторяться либо указанное число раз, либо прерываться при достижении заданной точности. Поскольку достоверно известны только значения сигнала в неравномерных точках, в качестве критерия точности восстановления естественно взять среднеквадратическое отклонение восстановленных неравномерных отсчетов от исходных. Схема процесса восстановления приведена на рис. 1.

В качестве оператора P можно использовать различные методы восстановления значений сигнала в равномерных точках по заданным неравномерным. Для сравнения были выбраны следующие методы: полином нулевого порядка, кубический сплайн, идеальный фильтр нижних частот, нелинейное восстановление [3, 4], деформация неравномерного времени в равномерное [5].

Очевидно, что поправки к значениям равномерных отсчетов для различных методов восстановления будут разными и, следовательно, скорость сходимости итерационной процедуры будет разной. Полезно было оценить

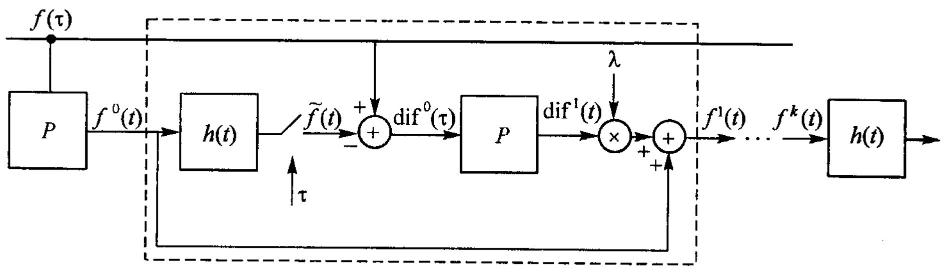

Рис. 1. Схема процесса восстановления сигнала

сравнительную эффективность указанных методов с этой точки зрения. Отметим, что в [1–3] для коррекции приближенного решения в итерационной процедуре используется только фильтр нижних частот.

Моделирование проведено с использованием пакета прикладных программ MatLab. Моменты взятия неравномерных отсчетов определяются путем наложения детерминированного либо случайного шума на координату времени равномерных отсчетов. При этом возможен выход момента отсчета за интервал существования сигнала. Поскольку при симуляции используется предположение о периодичности повторения сигнала (и отсчетов) во времени, такой отсчет переносится в соответствующую точку внутри интервала. Конечно, при этом отсчеты должны быть перенумерованы во времени.

Моделирование проведено для нескольких вариантов входного сигнала. Ниже приведен типичный пример. Входной сигнал описывался выражением $f(t)=(\cos 2\pi t+0{,}2\cos 6\pi t+\cos 12\pi t+1{,}9)/4{,}2$, и на интервале $[-0{,}5;\ 0{,}5]$ было взято 15 отсчетов. В различных примерах $\mu(t)$ предполагалась либо детерминированной, либо случайной функцией.

Моделирование показало, что при малых отклонениях отсчетов от равномерных положений ($\max|\mu| \le \Delta/4$) все перечисленные методы, за исключением метода нелинейного восстановления, обеспечивают сходимость итерационного процесса. Это исключение понятно, так как при таком выборе сигнала, частоты дискретизации и даже низкочастотной неравномерности верхняя частота разности $\mathrm{dif}^1(\tau)$ превышает частоту Найквиста [4], и итерационная процедура расходится. При соответствующем выборе параметра λ и этот метод также обеспечивает сходимость. В различных примерах оптимальное значение λ для метода нелинейного восстановления составляло $0{,}8<\lambda<0{,}95$. Для остальных методов при малых отклонениях отсчетов от равномерных положений разумно полагать $\lambda \sim 1$. Однако заметим, что при большой неравномерности, когда расстояния между соседними отсчетами достигают величины 2Δ, полезно бывает несколько уменьшить λ и тем самым немного «пожертвовать» скоростью сходимости «в угоду» большей устойчивости.

Конечно, в различных примерах в зависимости от амплитуды и спектра функции μ (и в значительно меньшей степени от вида сигнала) скорость сходимости итерационной процедуры для разных методов была различной. Тем не менее из результатов моделирования однозначно следовало, что в сочетании с итерационной процедурой в общем случае, когда отклонения отсчетов от равномерных положений были велики и носили случайный характер, метод сплайн-интерполяции практически всегда оказывался предпочтительным, т. е. он обеспечивал самую быструю сходимость и оказывался наиболее устойчивым. Только в некоторых примерах, когда неравномерность отсчетов была невелика и носила явно низкочастотный характер, использование в качестве оператора P идеального фильтра нижних частот давало немного лучшие результаты.

Была исследована зависимость среднеквадратической ошибки восстановления от числа итераций. Моделирование показало, что логарифм среднеквадратической ошибки восстановления линейно падает с увеличением числа итераций. Это совпадает с выводами [3]. Скорость сходимости итерационной процедуры к точному решению очень сильно зависит от степени неравномерности. В условиях, когда расстояния между соседними отсчетами $\delta_s = \tau_{s+1} - \tau_s$ удовлетворяли условию $\Delta/4 \le \delta \le 2\Delta$, среднеквадратическая ошибка восстановления неравномерных отсчетов после 10 итераций не превышала 10^{-8} от максимального размаха сигнала. Для достижения такой точности при $\Delta/10 \le \delta \le 2\Delta$ требовалось в среднем около 50 итераций.

Итерационный процесс приводит к точному решению, однако отметим, что в случае большой неравномерности отсчетов достижение в процессе восстановления сравнительно точного совпадения сигнала в исходных неравномерных точках не всегда гарантирует такое же хорошее восстановление сигнала по всему интервалу. Так, на рис. 2 приведены исходная функция и неравномерные отсчеты для больших ($\mu \sim \Delta$) отклонений от равномерных положений. К точным значениям сигнала в неравномерных точках был добавлен небольшой (10^{-5}) случайный шум (10 реализаций). После 10 итераций ошибка восстановления неравномерных отсчетов не превышала 0,1 %, однако на тех участках интервала, где отсчеты были редкими, разность меж-

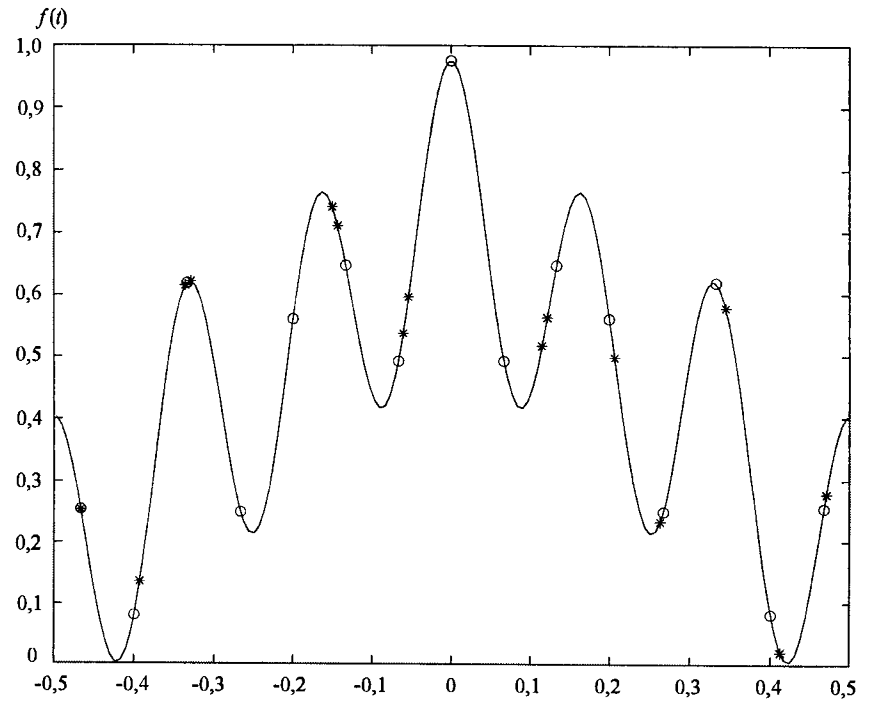

Рис. 2. Пример исходного сигнала: равномерные (○) и неравномерные (*) отсчеты

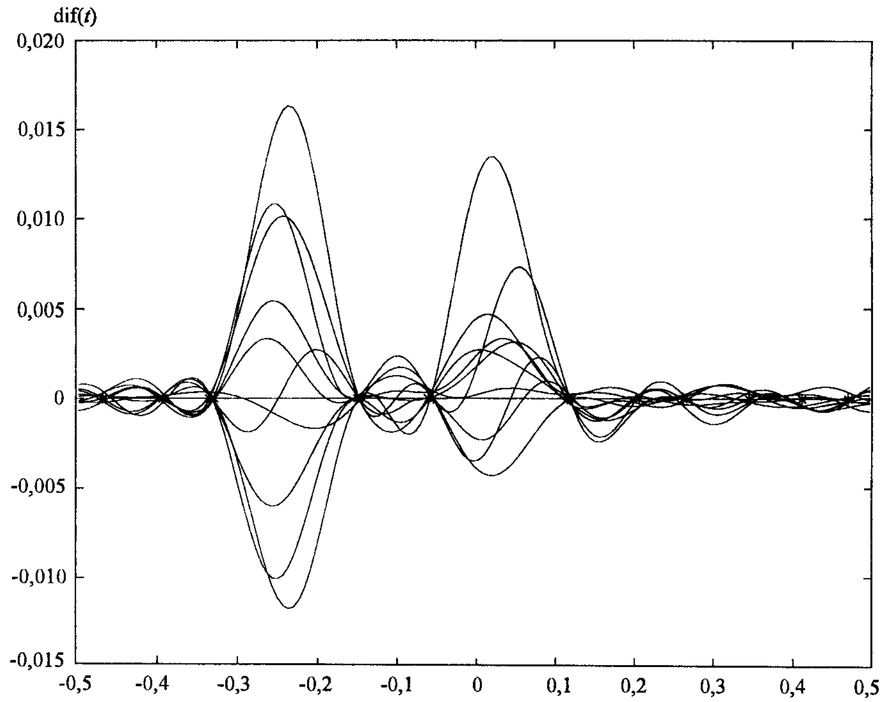

Рис. 3. Разность между исходным и восстановленными сигналами

ду исходным и восстановленными сигналами была существенной (рис. 3), что совпадает с замечаниями в [2] и [6]. Однако связь ошибки задания исходных данных с ошибками восстановления в зависимости от степени неравномерности отсчетов будет предметом отдельного рассмотрения.

ВЫВОДЫ

1. При соответствующем выборе оператора P и параметра λ использование итерационной процедуры позволяет точно восстанавливать сигнал при значительной неравномерности, когда расстояния между соседними отсчетами почти вдвое превышают средний интервал дискретизации.

2. Эффективность итерационной процедуры слабо зависит от характера исходного сигнала и определяется в первую очередь характером и величиной неравномерности отсчетов.

3. Из рассмотренных нами операторов P в итерационной процедуре наиболее эффективным оказывается метод сплайн-интерполяции, так как в этом случае обеспечивается самая быстрая сходимость и наибольшая устойчивость итерационного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Marvasti F.** An iterative method to compensate for the interpolation distortion // IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1989. **39**, N 10.

2. **Marvasti F., Analoui M., Gamshadrahi M.** Recovery of signals from nonuniform samples using iterative methods // IEEE Trans. Signal Processing. 1991. **39**, N 4.

3. **Marvasti F.** Nonuniform Sampling // Advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory /Ed. by R. Marks II. N. Y.: Springer Verlag, 1993.

4. **Бондаренко Ю. В., Касперович А. Н.** Нелинейное восстановление сигналов по неравномерным отсчетам // Автометрия. 1999. № 4. С. 61.

5. **Papulis A.** Error analysis in sampling theory // Proc. of IEEE. 1966. **54**, N 7.

6. **Ефимов В. М.** Влияние амплитудных шумов на точность восстановления сигнала при его периодически неравномерной дискретизации // Автометрия. 1999. № 5. С. 52.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: kasperovich@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
20 июня 2001 г.