РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 1 2002

НАУЧНЫЕ ДИСКУССИИ

УДК 519.24

Е. Л. Кулешов

(Владивосток)

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ*

Обсуждаются проблемы, возникающие в приложениях оптимальных линейных спектральных оценок. Рассмотрены среднеквадратические ошибки этих оценок в сравнении с другими показателями качества.

В работе [1] высказан ряд замечаний о результатах, полученных нами в [2], поэтому возникла необходимость дать ответ на эти замечания.

1. Первое замечание (см. [1, с. 133]): «... периодограмма ... не может служить оценкой спектральной плотности $f(\omega)$ ни при больших, ни тем более при малых T». Здесь T – длина реализации исследуемого случайного процесса.

Ответ: замечание неверное. Для справки по этому вопросу обратимся к литературе. Так, в справочнике [3, с. 622] сказано: «... периодограмма является асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности». В известной книге [4, с. 163], ориентированной на приложения методов спектрального анализа, после обсуждения свойств периодограммы говорится: «... это делает ... периодограмму несостоятельной оценкой спектральной плотности». В классической книге по статистической радиотехнике [5, с. 202] рассматривается «... в качестве оценки энергетического спектра (спектральной плотности) стационарного случайного процесса величина $\hat{F}$ ...», т. е. периодограмма [5, (3.279)]. Таким образом, как в математике [3], так и в приложениях спектрального анализа [4, 5] периодограмма рассматривается как оценка спектральной плотности.

Можно только предполагать, что автор замечания хотел сказать нечто иное, а именно: периодограмма является «плохой» оценкой спектральной плотности. К этому можно было бы добавить и ее известные свойства: 1) относительная среднеквадратическая ошибка такой оценки составляет примерно 100 %; 2) оценка является смещенной и только асимптотически несмещенной; 3) не является состоятельной. Однако и в таком, модифицирован-

* Редакция оставляет за собой право на этом закончить дискуссию на страницах журнала.

ном варианте замечание не имеет отношения к работе [2], поскольку в ней нет рекомендаций использования на практике домноженной на функцию периодограммы, а рассмотрение таких оценок, как частный случай линейных оценок, обусловлено самой логикой задачи [2]. Действительно, в работе [2] введены линейные оценки общего вида спектральной плотности и корреляционной функции, а также рассмотрены два частных случая сглаживающих окон, которые формально являются полностью равноправными. Первый частный случай определяется условиями (27), (30) (см. формулы в [2]) (зависимостью спектрального окна от разности своих аргументов) и сводится к традиционным формулам непараметрического спектрального анализа. Второй частный случай определяется условием (35) (см. формулу в [2]), эквивалентным зависимости корреляционного окна от разности двух своих аргументов, и приводит к спектральной оценке в виде произведения спектрального окна и периодограммы. Оставить вне рассмотрения второй частный случай было бы совершенно нелогично.

2. Второе (и основное) замечание (см. [1, с. 133]): «Итоговые разделы (статьи) не содержат информации, сколько-нибудь полезной для читателя».

Ответ: с этим замечанием также нельзя согласиться. Из второго замечания с очевидностью следует, что и вся статья [2] не содержит сколько-нибудь полезных сведений для читателя, т. е. замечание имеет «всеобщий» характер и отвечать на него сложно в том смысле, что невозможно найти готовый ответ в литературе, как это было для первого замечания. Обратимся к работе [2].

Рассмотрим один из основных результатов [2], состоящий в следующем. Линейная спектральная оценка общего вида

$$f_c(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega,\lambda) f(\lambda)d\lambda \tag{1}$$

(f – периодограмма, h – спектральное окно) оптимизируется выбором спектрального окна h по критерию минимума среднеквадратической ошибки

$$\mathbf{M}[f_c(\omega)-F(\omega)]^2 \to \min_h, \tag{2}$$

где F – спектральная плотность, $\mathbf{M}$ – оператор математического ожидания. Показано, что оптимальное спектральное окно h удовлетворяет уравнению

$$F(\omega)\mathbf{M}f(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega,\lambda)\mathbf{M}f(\lambda)f(\nu)d\lambda, \tag{3}$$

а минимальная среднеквадратическая ошибка

$$\varepsilon_f^2(\omega)=F^2(\omega)-\mathbf{M}f_c^2(\omega)=F^2(\omega)-F(\omega)\mathbf{M}f_c(\omega). \tag{4}$$

В разделе «Спектральный фильтр с постоянными параметрами» рассмотрена задача (1), (2) и ее решение (3), (4) в частном случае $h(\omega,\lambda)=$ $=h_1(\omega-\lambda)$ – зависимости спектрального окна от разности своих аргументов, имеющем важное практическое значение ввиду его широкого применения в прикладных исследованиях. Кратко эти результаты можно сформулировать так: для линейных спектральных оценок вида (1) найдена нижняя граница (4) среднеквадратической ошибки, причем функция h в (1), обеспечивающая минимум ошибки, удовлетворяет уравнению (3).

Результаты (3), (4) являются новыми. Нам неизвестны публикации, в которых изложены аналогичные результаты. В логике развития спектрального анализа эти результаты представляются также актуальными, поскольку основная проблема непараметрического оценивания спектральной плотности – это выбор спектрального окна h (или h_1), обеспечивающего минимум среднеквадратической ошибки спектральной оценки вида (1) при заданной длине реализации T. В разработанной ранее асимптотической теории (случай большого T) такая проблема не рассматривалась, поскольку любая функция h_1 из широкого класса сглаживающих окон при большом T обеспечивала малую среднеквадратическую ошибку, вполне удовлетворяющую потребностям практики, и выбор оптимального спектрального окна не имел практического значения. Наконец, имеют ли результаты (3), (4) какое-либо практическое значение? В связи с этим отметим среди всех замечаний единственный существенный вопрос [1, с. 132].

3. Как найти функцию h_1 из уравнения (3)? Ведь нам не известны ни спектральная плотность $F(\omega)$, ни тем более величины $\mathbf{M}f(\nu)$ и $\mathbf{M}f(\lambda)f(\nu)$. Что касается математического ожидания периодограммы $\mathbf{M}f(\nu)$ и ее корреляции $\mathbf{M}f(\lambda)f(\nu)$, то эти функции здесь ни при чем, поскольку они выражаются через $F(\omega)$. Так, в асимптотике (при большом T) известны приближенные выражения для математического ожидания $\mathbf{M}f(\nu)$ и ковариации $\mathbf{M}[f(\lambda)-\mathbf{M}f(\lambda)][f(\nu)-\mathbf{M}f(\nu)]$ периодограммы [3, с. 621, 622]. Для коротких реализаций в [6] получены точные выражения математического ожидания периодограммы и ковариации конечного преобразования Фурье стационарного случайного процесса. Последним соотношением определяется точный вид корреляции периодограммы. Здесь наиболее простым является случай гауссова процесса. Таким образом, в уравнении (3) неизвестной является только спектральная плотность $F(\omega)$, следовательно, минимальная ошибка (4) также определяется через спектральную плотность. Можно указать, по крайней мере, одну область приложения соотношений (3), (4) – это моделирование спектральных оценок на ЭВМ. Проблемы в спектральном анализе весьма сложны и не всегда поддаются аналитическим методам исследования. Поэтому широко используется моделирование спектральных оценок [4], где практически для каждой обсуждаемой спектральной оценки наряду с результатами аналитических исследований ее свойств приводятся и результаты моделирования. При моделировании спектральных оценок ($F(\omega)$ – известная функция) обозначенная проблема с использованием уравнения (3) не возникает. Сравнение среднеквадратической ошибки исследуемой оценки с минимальной ошибкой (4), безусловно, поднимет качество моделирования в спектральном анализе.

Наконец, в связи с замечанием 3 и его следствием (замечание 2) уместно спросить, как должен выглядеть «полезный для читателя» результат, позволяющий судить о минимальном значении среднеквадратической ошибки или в общем о качестве оценки? Можно обратиться к литературе. К примеру, рассмотрим известное неравенство Рао – Крамера [5]:

$$\operatorname{var}\theta_0 \geq \frac{[1+b'(\theta)]^2}{I_n(\theta)}, \qquad (5)$$

где θ_0 – оценка параметра θ; $\mathrm{var}\theta_0$ – дисперсия оценки θ_0; функция $b(\theta)$ аргумента θ является смещением оценки θ_0; $b'(\theta)$ – производная функция $b(\theta)$; $I_n(\theta)$ – информация выборки (размера n) по Фишеру. Правая часть (5) определяет нижнюю границу дисперсии, а также и среднеквадратической ошибки оценки θ_0 [5], причем нижняя граница достигается далеко не во всех случаях. В рамках обсуждаемой проблемы важно подчеркнуть, что правая часть (5) неизвестна, поскольку является функцией неизвестного параметра θ, для оценивания которого используется величина θ_0. Следуя логике [1], результат (5) необходимо объявить «не содержащим сколько-нибудь полезной информации для читателя». Однако это не так, соотношение (5) приводится практически в любом учебнике по математической статистике.

Подведем итог. Высказанные в [1] критические замечания о работе [2] неубедительны. Результаты, представленные в [2], несомненно, новые, а также актуальные, поскольку критерий минимальной среднеквадратической ошибки (2) является основным не только в теоретических исследованиях, но и в практике спектрального анализа. Кроме того, эти результаты имеют практическое значение, например, в задачах моделирования спектральных оценок полученные соотношения могут быть использованы для расчетов.

«Позитивная часть» [1] не усиливает критические замечания. Представленные здесь результаты ранее опубликованы, но главное – эти результаты не решают обозначенную выше основную проблему спектрального анализа, поскольку получены в рамках асимптотического подхода (при большом T) и допускают неоднозначность выбора спектрального окна, что при неудачном выборе не исключает значительной ошибки спектральной оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В. Г.** Непараметрический спектральный анализ стационарных случайных процессов // Автометрия. 2000. № 4. С. 131.
2. **Кулешов Е. Л.** Оптимальные сглаживающие окна в спектральном анализе случайных процессов // Автометрия. 1999. № 2. С. 44.
3. **Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.** Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
4. **Марпл С. Л.-мл.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
5. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1975. Кн. 2.
6. **Кулешов Е. Л.** Непараметрические спектральные оценки с высоким разрешением // Автометрия. 1984. № 2. С. 17.

Дальневосточный государственный университет,
E-mail: kuleshov@lemoi.phys.dvgu.ru

Поступила в редакцию
17 октября 2000 г.