РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 6 2001

УДК 621.391 : 517.97

М. П. Иванов, В. В. Кашинов

(Санкт-Петербург)

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛА ПО МИНИМУМУ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ДЛЯ КАНАЛА СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Получено общее выражение для оптимального фильтра на основе модели канала, формально общей для некоторых помеховых ситуаций. Исследованы частные случаи решения.

Для разных помеховых ситуаций оказалось возможным использовать формально общую модель канала с помехами. Рассмотрим ее в виде соотношения

$$U(t) = cAS(t) + \sum_{i=1}^{n} \rho_i(t) AS(t - \tau_i) + \eta(t), \tag{1}$$

где $U(t)$ – сигнал на выходе канала (на входе фильтра); A – амплитуда этого сигнала; $S(t)$ – сигнал на входе канала; $n+1$ – число путей распространения сигнала в канале связи (лучей); τ_i – случайная задержка сигнала в i-м пути распространения; $\eta(t)$ – флуктуационный шум.

Соотношение (1) описывает следующие модели канала связи.

1. $\rho_i(t) = \rho_i$ – случайные величины, $c = 0$. Это дискретная модель с частотно-селективными замираниями, соответствующая многолучевой по времени среде распространения [1–3].

2. $\rho_i(t) = P_i$ – случайные величины, $c = 1$. В таком канале основным является сигнал, а по остальным n каналам приходят задержанные на время τ_i сигналы (переотражения от местных предметов). Такая задача, например, возникает при приеме телевизионного сигнала в городских условиях [4].

3. $\tau_i = 0$, $\rho_i = \exp(j\omega t)$, $c = 0$. Дискретный канал с временными селективными замираниями, соответствующий многолучевой по частоте среде распространения [1–3].

4. $\rho_i(t)$ – стационарные случайные процессы, $n = 1$ и $\tau_i = 0$. Непрерывная модель со стационарной мультипликативной (модулирующей) помехой [5, 6], в том числе канал с временными селективными замираниями.

5. В общем случае нестационарных процессов ($\rho_i(t)$ и $c = 1$) соотношение (1) описывает модель канала связи с временными и частотными селективными замираниями, причем эта модель является непрерывной по отношению к

описанию временных замираний и дискретной по отношению к частотным замираниям.

Рассмотрим общий случай модели, описанной формулой (1). Мультипликативные помехи $\rho_i(t)$ будем считать нестационарными случайными с корреляционными функциями $B_{\rho_i}(t,\tau)$ и математическими ожиданиями $\rho_{0_i}(t)$. Нестационарные помехи ρ_i возникают при передаче сигналов по ионосферному каналу связи, стационарные – по тропосферным каналам [7]. Сигнал $S(t)\in L_2(T_1,T_2)$ и шум $\eta(t)$ будем также считать нестационарными с корреляционными функциями $B_s(t,\tau)$, $B_\eta(t,\tau)$ и нулевыми математическими ожиданиями $S_0(t)$ и $\eta_0(t)$. Случайные задержки τ_i опишем плотностями распределений вероятностей $W_{\tau_i}(x)$. Процессы $S(t)$, $\eta(t)$ и $\rho_i(t)$, а также параметры τ_i предполагаем некоррелированными.

Задача состоит в наилучшем выделении сигнала $S(t)$ из выходного процесса канала $U(t)$, причем критерием качества выделения служит средний по множеству реализаций квадрат ошибки выделения, т. е. точечная оценка.

Критерий минимума среднеквадратической ошибки (СКО) предопределяет линейную фильтрацию. Оператор, описывающий оптимальный фильтр, будем искать в классе линейных операторов. Согласно теореме об общем виде линейного оператора, действующего из L_2 в L_2, искомый фильтр описывается интегральным оператором с ядром $h(t,\tau)$, которое может быть обобщенной функцией. Процесс на выходе такого фильтра имеет вид

$$U_{\text{вых}}(t)=\int_{T_1}^{T_2} h(t,\tau)U(\tau)d\tau,\quad U(t)\in L_2(-\infty,\infty). \tag{2}$$

При точечной оценке средний по множеству реализаций квадрат ошибки фильтрации

$$\sigma^2(t)=\left\langle [U_{\text{вых}}(t)-S(t)]^2\right\rangle, \tag{3}$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю, является функционалом, зависящим от интегральных операторов с ядрами $h(t,\tau)$, в которые время входит в качестве параметра.

Используя фильтрующее свойство δ-функции, представим функционал (3) в виде

$$\sigma^2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\left\langle\left[\int_{T_1}^{T_2} U(\nu)h(\tau,\nu)d\nu-S(\tau)\right]^2\right\rangle d\tau.$$

Применяя обобщенное уравнение Эйлера – Пуассона [7], получим необходимое условие экстремума функционала (3):

$$2\int_{T_1}^{T_2} h(t,\tau_1)\langle U(\tau_1)U(t)\rangle d\tau_1-2\langle S(t)U(\tau)\rangle=0. \tag{4}$$

Будем считать процессы $U(t)$ и $S(t)$ нестационарными и нестационарно связанными с корреляционными функциями $B_s(t,\tau)=\langle S(t)S(\tau)\rangle$, $B_{su}(t,\tau)=$

$= \langle S(t)U(\tau)\rangle$, $B_u(t,\tau) = \langle U(t)U(\tau)\rangle$. С учетом введенных обозначений уравнение (4) преобразуем к виду

$$\int_{T_1}^{T_2} h(t,\tau)B_u(\tau_1, t)d\tau_1 - B_{su}(t,\tau) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) решим методом перехода к операторному уравнению [8]. Корреляционные функции $B_u(t,\tau)$ и $B_{su}(t,\tau)$ представляют собой ядра линейных интегральных операторов

$$B_1 f = \int_{T_1}^{T_2} B_u(t,\tau)f(\tau)d\tau, \qquad B_2 f = \int_{T_1}^{T_2} B_{su}(t,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Учитывая обозначения, переходим от уравнения (5) к эквивалентному операторному уравнению

$$KB_1 - B_2 = 0. \tag{7}$$

Умножаем (7) справа на оператор B_1^{-1} и имеем

$$KB_1 B_1^{-1} = B_2 B_1^{-1}, \quad \text{или} \quad K = B_2 B_1^{-1}. \tag{8}$$

Этот оператор описывает оптимальный фильтр. Подставляя в (8) выражения (6), получим явное выражение для ядра оператора оптимального фильтра

$$h(t,\tau) = \int_{T_1}^{T_2} B_{su}(t,\text{v})B_u^{-1}(\text{v},\tau)d\text{v}. \tag{9}$$

Выведем теперь общее выражение для минимальной СКО фильтрации. Из формул (2) и (3) будем иметь

$$\sigma^2(t) = \left\langle \left[\int_{T_1}^{T_2} h(t,\tau)U(\tau)d\tau - S(t) \right]^2 \right\rangle =$$

$$= B_s(t,t) - 2\int_{T_1}^{T_2} h(t,\tau)B_{su}(t,\tau)d\tau + \int_{T_1}^{T_2}\int_{T_1}^{T_2} h(t,\tau_1)h(t,\tau_2)B_u(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

или

$$\sigma^2_{\min}(t) = B_s(t,t) - \int_{T_1}^{T_2} h(t,x)B_{su}(t,x)dx. \tag{10}$$

Подставляя в (10) выражение (9), окончательно получим

$$\sigma^2_{\min}(t) = B_s(t,t) - \int_{T_1}^{T_2}\int_{T_1}^{T_2} B_{su}(t,x)B_u^{-1}B_{su}(t,\tau)dxd\tau. \tag{11}$$

Импульсная характеристика оптимального фильтра определяется из формулы (9). Функции $B_u^{-1}(t,\mathrm{v})$ и $B_{su}(t,\mathrm{v})$, входящие в (9), легко выражаются через заданные характеристики входного процесса фильтра $U(t)$. Найдем сначала функцию

$$B_u(t,\mathrm{v}) = \langle U(t)U(\mathrm{v})\rangle = c^2A^2B_s(t,\mathrm{v}) + A^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{p_ip_j}(t,\mathrm{v})\langle S(t-\tau_i)S(\mathrm{v}-\tau_j)\rangle +$$

$$+c^2A^2\sum_{i=1}^{n}[\rho_{0_i}(t)\langle S(t-\tau_i)S(\mathrm{v})\rangle + \rho_{0_i}(\mathrm{v})\langle S(t)S(\mathrm{v}-\tau_i)\rangle] + B_\eta(t,\mathrm{v}),$$

где

$$B_{p_ip_j}(t,\mathrm{v}) = \begin{cases} B_{p_i}(t,\mathrm{v}) + \rho_{0_i}(t)\rho_{0_j}(\mathrm{v}), & i=j, \\ \rho_{0_i}(t)\rho_{0_j}(\mathrm{v}), & i\neq j. \end{cases}$$

Усредним слагаемые в суммах с учетом их зависимости от случайных параметров τ_i:

$$\langle S(t-\tau_i)S(\mathrm{v}-\tau_j)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{\tau_i}(x)W_{\tau_j}(y)[B_s(t-x,\mathrm{v}-y)]dxdy;$$

$$\langle S(t-\tau_i)S(\mathrm{v})\rangle = \int_{T_1}^{T_2}W_{\tau_i}(x)B_s(t-x,\mathrm{v})dx;$$

$$\langle S(t)S(\mathrm{v}-\tau_i)\rangle = \int_{T_1}^{T_2}W_{\tau_i}(x)B_s(t,\mathrm{v}-x)dx.$$

Окончательно имеем

$$B_u(t,\mathrm{v}) = c^2A^2B_s(t,\mathrm{v}) +$$

$$+A^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{p_ip_j}(t,\mathrm{v})\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{\tau_i}(x)W_{\tau_j}(y)B_s(t-x,\mathrm{v}-y)dxdy +$$

$$+c^2A^2\sum_{i=1}^{n}\int_{T_1}^{T_2}W_{\tau_i}(x)[\rho_{0_i}(t)B_s(t-x,\mathrm{v}) + \rho_{0_i}(\mathrm{v})B_s(t,\mathrm{v}-x)]dx + B_\eta(t,\mathrm{v}). \quad (12)$$

Аналогично

$$B_{su}(t,\mathrm{v}) = cAB_s(t,\mathrm{v}) + A\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}W_{\tau_i}(x)\rho_{0_i}(\mathrm{v})B_s(t,\mathrm{v}-x)dx. \quad (13)$$

Функция $B_u^{-1}(t,\mathrm{v})$, входящая в формулу (9), определяется в каждом конкретном случае. Практически удобно находить ее в виде матрицы $B_u^{-1}(t,\mathrm{v})$, обратной матрице $B_u(t,\mathrm{v})$, используя методы теории матриц или стандартную программу обращения матриц при расчете на компьютере.

Заметим, что полученные соотношения описывают, вообще говоря, нереализуемые фильтры. Вопросы реализуемости фильтров подробно рассмотрены в литературе, и мы на них останавливаться не будем. Кроме того, нижнюю границу оценки практически всегда дают именно нереализуемые фильтры.

Рассмотрим теперь решения для частных случаев модели (1).

1. Дискретная модель многолучевого канала с частотно-селективными замираниями. Обозначим $\langle\rho_i\rangle = \rho_0$,

$$\langle\rho_i\rho_j\rangle = M_{2p_ip_j} = \begin{cases} \rho_{0_i}\rho_{0_j}, & i = j, \\ M_{2p_i} = \sigma_{p_i}^2 + \rho_{0_i}^2, & i \neq j. \end{cases}$$

Предполагаем входной процесс канала $S(t)$ и шум $\eta(t)$ стационарными. В этом случае

$$B_u(t, \mathrm{v}) = B_u(t - \mathrm{v}) =$$

$$= A^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{2p_ip_j} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{\tau_i}(x) W_{\tau_j}(y) B_s(t - x - \mathrm{v} + y) dx dy + B_\eta(t - \mathrm{v});$$

$$B_{su}(t - \mathrm{v}) = A \sum_{i=1}^{n} \rho_{0_i} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\tau_i}(x) B_s(t - \mathrm{v} + x) dx.$$

Найдем энергетические спектры $F_u(\omega)$ и $F_{su}(\omega)$:

$$F_u(\omega) = A^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{2p_ip_j} \theta_{\tau_i}(\omega) F_s(\omega) + N(\omega) =$$

$$= A^2 \sum_{i=1}^{n} \rho_{0_i} \theta_{\tau_i}(\omega) \sum_{j=1}^{n} \rho_{0_j} \theta^*(\omega) F_s(\omega) + A^2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_{p_i}^2 |\theta_{\tau_i}^*|^2 F_s(\omega) + N(\omega);$$

$$F_{su}(\omega) = A \sum_{i=1}^{n} \rho_{0_i} \theta^*(\omega) F_s(\omega),$$

где $\theta_{\tau_i}(\omega)$ – характеристическая функция случайной задержки τ_i (преобразование Фурье от $W(x)$); $N(\omega)$ – энергетический спектр флуктуационного шума; $F_s(\omega)$ – энергетический спектр процесса $S(t)$. Отсюда найдем коэффициент передачи оптимального фильтра:

$$K(\omega) = \frac{L^*(\omega) F_s(\omega)}{|L(\omega)|^2 F_s(\omega) + A^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{p_i}^2 |\theta_{\tau_i}(\omega)|^2 F_s(\omega) + N(\omega)}, \qquad (14)$$

где $L(\omega) = A \sum_{i=1}^{n} \rho_{0_i} \theta_{\tau_i}(\omega)$.

Коэффициент передачи винеровского фильтра для стационарного канала с частотно-селективными замираниями получен в [9]. Если ρ_i во всех случаях распространения являются неслучайными, то $\sigma_{p_i}^2 = 0$ и фильтр, коэффициент передачи которого

$$K(\omega) = \frac{L^*(\omega)F_s(\omega)}{|L(\omega)|^2 F_s(\omega) + N(\omega)}, \tag{15}$$

аналогичен по структуре винеровскому фильтру [9], оптимальному при фильтрации по критерию минимума СКО стационарного сигнала, прошедшего однолучевой канал с постоянными параметрами и характеристикой замираний $L(\omega)$. Действие этого фильтра проявляется в том, что на частотных участках, где энергетический спектр шума $N(\omega)$ мал по сравнению с энергетическим спектром принимаемого сигнала $|L(\omega)|^2 F_s(\omega)$, фильтр служит в основном для компенсации частотно-селективных замираний $K(\omega) \cong 1/L(\omega)$. В областях, где энергетический спектр шума сравним со спектром принимаемого сигнала, оптимальный фильтр вносит дополнительное затухание.

2. Канал с переотражениями от местных предметов. На выходе канала

$$U(t) = AS(t) + \sum_{i=1}^{n} \rho_i AS(t - \tau_i) + \eta(t).$$

При условии стационарности процессов $S(t)$ и $\eta(t)$

$$K(\omega) = \frac{AF_s(\omega)\left[1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_{0_i} \theta^*_{\tau_i}(\omega)\right]}{A^2 \left|1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_{0_i} \theta(\omega)\right|^2 F_s(\omega) + A^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{p_i}^2 \left|\theta_{\tau_i}(\omega)\right|^2 F_s(\omega) + N(\omega)}. \tag{16}$$

3. Стационарные процессы $\rho_i(t)$ и $c \neq 0$. В этом случае при $n = 1$, $W_{\tau_i}(x) = \delta(x)$ и $\rho_{0_i} = 0$ получаем коэффициент передачи оптимального фильтра для выделения сигнала $S(t)$ при действии мультипликативной помехи $\rho(t)$ и аддитивного шума $\eta(t)$ [9]:

$$K(\omega) = \frac{AF_s(\omega)}{A^2 F_s(\omega) + A^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_p(\Omega) F_s(\omega - \Omega) d\Omega + N(\omega)}. \tag{17}$$

Выражение (17) отличается от коэффициента передачи винеровского фильтра, оптимального при действии только аддитивного шума [9], наличием в знаменателе слагаемого в виде свертки спектральных плотностей переменной составляющей мультипликативной помехи и сигнала. При узкополосной (по сравнению с сигналом) мультипликативной помехе можно считать, что $F_p(\omega) \cong \delta(\omega)$. В этом случае фильтр становится эквивалентным винеровскому, оптимальному только при действии шума. При широкополосной помехе $F_s(\omega) \cong c\delta(\omega)$ выражение для коэффициента передачи оптимального фильтра принимает вид

$$K(\omega) = \frac{AF_s(\omega)}{A^2F_s(\omega) + A^2cF_p(\omega) + N(\omega)}.$$

В этом случае оптимальный фильтр также близок к винеровскому при аддитивной помехе, но с эквивалентной спектральной плотностью $A^2cF_p(\omega) + N(\omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кириллов Н. Е.** Помехоустойчивая передача сообщений по линейным каналам со случайно изменяющимися параметрами. М.: Связь, 1971.
2. **Коржик В. И., Финк Л. М.** Помехоустойчивое кодирование дискретных сообщений в каналах связи со случайной структурой. М.: Связь, 1975.
3. **Кеннеди Р.** Каналы связи с замираниями и рассеянием. М.: Сов. радио, 1973.
4. **Пахолков Г. А., Кашинов В. В.** Уменьшение влияния помех, обусловленных местными предметами в амплитудных радионавигационных системах // Вопр. радиоэлектрон. Сер. ОТ. 1968. Вып. 8. С. 106.
5. **Лекции** по теории систем связи /Под ред. Багдади. М.: Мир, 1964.
6. **Кремер И. Я., Владимиров В. И., Карпухин В. И.** Модулирующие помехи и прием радиосигналов. М.: Сов. радио, 1972.
7. **Вознесенский В. В., Кашинов В. В., Оганджанянц С. И.** Вариационный метод оптимизации обработки результатов эксперимента по разрывным критериям // Автометрия. 1995. № 3. С. 97.
8. **Кашинов В. В.** Оптимальная двухканальная линейная фильтрация при нестационарных помехах // Автометрия. 2000. № 3. С. 64.
9. **Френкс Л.** Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974.

Санкт-Петербургский государственный университет,
E-mail: Kashinov@VK3109.spb.edu

Поступила в редакцию 21 ноября 2000 г.