РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 2001

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.218.82 + 517.518.85

В. М. Ефимов, А. Л. Резник, А. В. Торгов

(Новосибирск)

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛЯТОРОВ ПРИ РАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ СИГНАЛА

Рассматриваются характеристики интерполяторов, построенных на основе «скользящего» интерполирования полиномом Лагранжа. Приводятся соотношения для отсчетных функций, их спектров, а также средних по времени и по ансамблю дисперсий ошибок восстановления сигнала. Формулируется «теорема отсчетов» для сигналов с различными дифференциальными свойствами. Оценивается помехоустойчивость интерполяторов.

Введение. При обычном интерполировании сигнала $f(t)$ по его $(n+1)$ равноотстоящим значениям $f(k\Delta)(k=\overline{0,n})$ полиномом Лагранжа степени n ошибка интерполяции неодинакова внутри различных интервалов дискретизации. Так, в [1] приводится оценка для этой ошибки:

$$\varepsilon_f(t) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{k=0}^{n}(t-k\Delta)\right|, \tag{1}$$

где $M_{n+1} = \sup\limits_{t\in[0,n\Delta]} |f^{(n+1)}(t)|$. В соответствии с (1) ошибка минимальна в среднем (средних) интервале и максимальна в крайних интервалах $(0 \le t \le \Delta,\ (n-1)\Delta \le t \le n\Delta)$.

В [2] рассмотрена процедура «скользящей» интерполяции, при использовании которой ошибка минимальна. При воспроизведении сигнала $f(t)$ на интервале $k\Delta \le t \le (k+1)\Delta$ при четном n в интерполяции участвуют значения функции от отсчета $f(k\Delta-[n/2]\Delta)$ до отсчета $f((k+1)\Delta+[n/2]\Delta)$, а при нечетном значении n сигнал $f(t)$ воспроизводится на интервале $k\Delta-0{,}5\Delta \le t \le k\Delta+0{,}5\Delta$ по значениям функции от отсчета $f(k\Delta-[n/2]\Delta)$ до отсчета $f((k+1)\Delta+[n/2]\Delta)$.

В [3] показано, каким образом можно получить отсчетные функции полиномиального интерполятора при восстановлении сигнала по бесконечной последовательности отсчетов:

$$f^*(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k\Delta)w(t-k\Delta), \tag{2}$$

где $w(t)$ – стационарная отсчетная функция.

Далее рассматриваются характеристики таких полиномиальных интерполяторов.

Отсчетные функции полиномиальных интерполяторов Лагранжа. При интерполировании $f(t)$ полиномом Лагранжа степени n (число отсчетов равно $n+1$) на интервале $-[n/2]\Delta < t < [n/2]\Delta + \Delta 1_-$ его отсчетные функции

$$w_r(t) = \prod_{\substack{m=-[n/2] \\ m \neq r}}^{[n/2]+1_-} \frac{t - m\Delta}{r\Delta - m\Delta}, \tag{3}$$

где $1_- = (1-(-1)^n)/2$.

Используя (3), получим отсчетную функцию при интерполировании соотношением (2):

$$w(t) = \sum_{r=0}^{[n/2]} w_{-r}(|t| - r\Delta) 1\left[\left(|t| - r\Delta + \frac{\Delta}{2}1_+\right)\left((r+1)\Delta - \frac{\Delta}{2}1_+ - |t|\right)\right], \tag{4}$$

где $1_+ = (1+(-1)^n)/2$; $1[z]$ – функция, равная единице при $z > 0$ и нулю при $z < 0$.

На рис. 1 приведены графики отсчетных функций для различных степеней n полинома. Из них следует, что для четных значений n отсчетная функ-

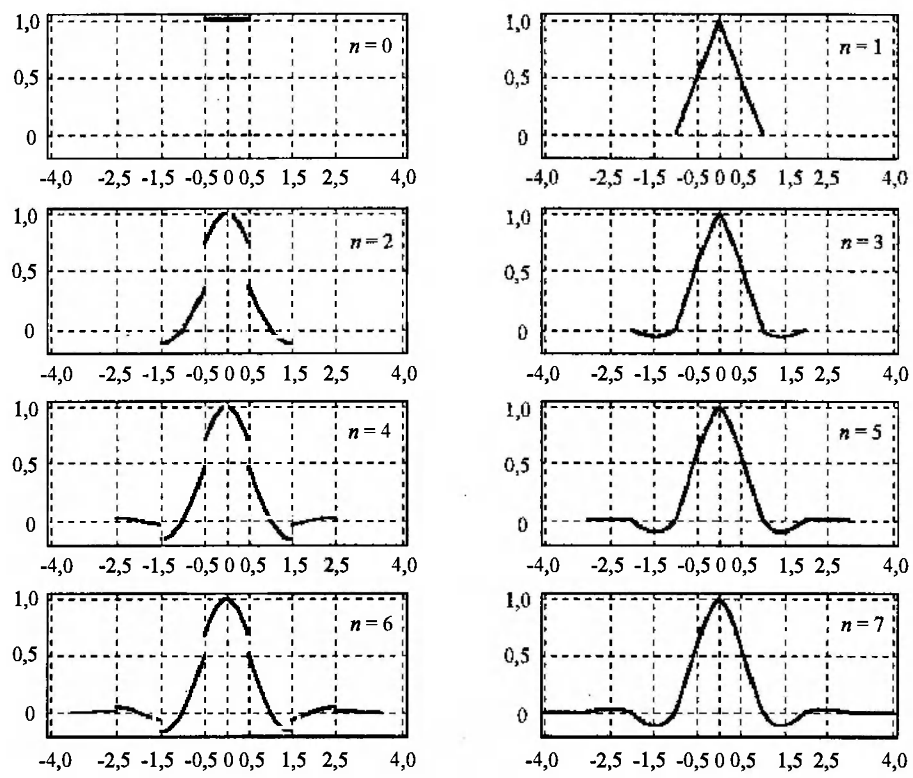

Рис. 1. Отсчетные функции полиномиальных интерполяторов

Таблица 1

Коэффициенты C_{mn}

m	n							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1/2	2/3	5/6	1	7/6	4/3
2	0	0	0	0	3/8	8/15	259/360	14/15
3	0	0	0	0	0	0	5/16	16/35

ция разрывна. Однако полином четной степени n при интерполировании по его равноотстоящим значениям восстанавливается без ошибок.

Спектр отсчетной функции. Непосредственное вычисление преобразования Фурье функции (4) по формуле

$$\tilde{w}(\omega)=\frac{1}{\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}w(t)\cos\omega t dt$$

показывает, что

$$\tilde{w}(\omega)=\left(\frac{\sin 0,5\omega\Delta}{0,5\omega\Delta}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{[n/2]}C_{mn}(0,5\omega\Delta)^{2m}. \tag{5}$$

Значения коэффициентов C_{mn} для различных степеней интерполяционного полинома приведены в табл. 1. На рис. 2 изображены частотные характеристики (5) для n из табл. 1. Из этих данных следует, что спектр отсчетной функции при увеличении степени полинома n приближается к частотной характеристике фильтра нижних частот [2].

Дисперсия ошибки интерполяции. Необходимо отметить, что уже при степени полинома $n=0$ постоянная составляющая сигнала «скользящим» интерполятором Лагранжа восстанавливается без искажения. Следовательно, отпадает необходимость в операции центрирования сигнала перед интерполяцией. Дисперсия ошибки интерполяции сигнала $f(t)$ при использовании для воспроизведения сигнала отсчетной функции (4)

$$\langle\varepsilon_f^2\rangle=\sigma_f^2+\sigma_f^2\sum_{m=0}^{n}C_m(n)\rho_f(m\Delta)-2\sigma_f^2\,\frac{2}{\Delta}\sum_{r=-[n/2]}^{[n/2]+1}\int_0^{0,5\Delta}w_r(t)\rho_f(t-r\Delta)dt. \tag{6}$$

В соотношении (6) величины σ_f^2 и $\rho_f(\tau)$ – дисперсия и нормированная корреляционная функция сигнала $f(t)$ соответственно, второе слагаемое – средняя по времени дисперсия сигнала на выходе интерполятора. Коэффициенты $C_m(n)$ определяются соотношениями:

$$C_m(n)=\frac{2}{\Delta}\sum_{r=-[n/2]}^{[n/2]+1}\int_0^{0,5\Delta}w_r(t)w_{r+m}(t)dt. \tag{7}$$

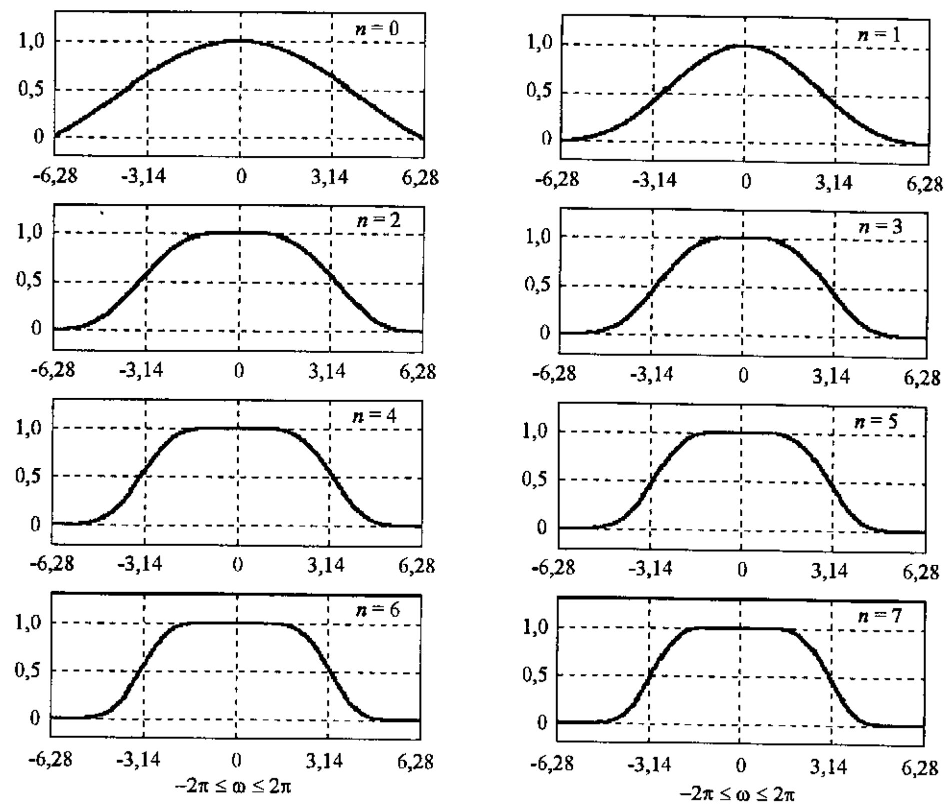

Рис. 2. Частотные характеристики интерполяторов

Табл. 2 содержит данные об этих коэффициентах для различных степеней интерполирующего полинома *n*.

Таблица 2

Коэффициенты $C_m(n)$

m	*n*							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0,66667	0,89375	0,77567	0,89573	0,82245	0,90279	0,84942
1	0	0,33332	0,14167	0,30595	0,15924	0,27264	0,15878	0,24617
2	0	0	−0,03542	−0,08571	−0,06824	−0,11949	−0,08532	−0,13285
3	0	0	0	0,00410	0,01408	0,02663	0,02886	0,04563
4	0	0	0	0	−0,00081	−0,00237	−0,00563	−0,00945
5	0	0	0	0	0	0,00014	0,00056	0,00119
6	0	0	0	0	0	0	−0,00003	−0,00012
7	0	0	0	0	0	0	0	$6,08 \times 10^{-6}$

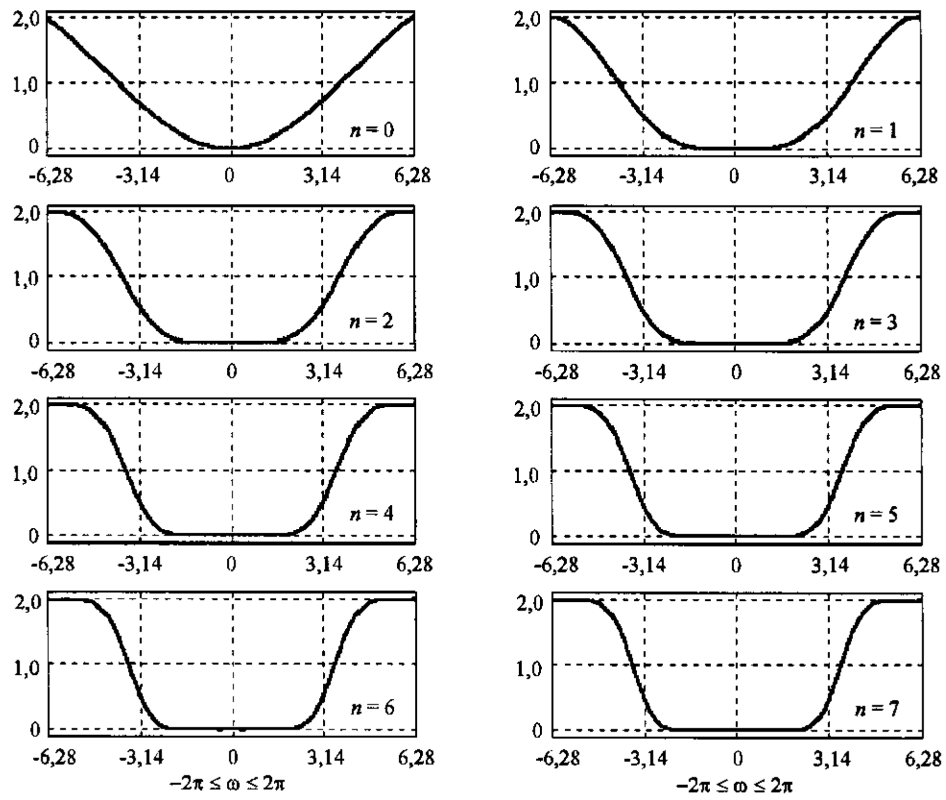

Рис. 3. Нормированная дисперсия ошибки восстановления гармонического сигнала как функция частоты ω

В частотном представлении дисперсия ошибки

$$\langle \varepsilon_f^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) \left(1 + \sum_{m=0}^{n} C_m(n) \cos m\omega\Delta - 2\widetilde{w}(\omega) \right) d\omega, \tag{8}$$

где $S_f(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $f(t)$.

На рис. 3 приведены зависимости нормированной дисперсии ошибки как функции частоты. В асимптотике при уменьшении интервала дискретизации Δ дисперсия ошибки интерполяции для сигнала соответствующей дифференцируемости в среднеквадратичном

$$\langle \varepsilon_f^2 \rangle = \sigma_f^2 \frac{|\rho_f^{2(n+1)}(0)|}{((n+1)!)^2} \frac{2}{\Delta} \int_0^{0,5\Delta} dt \prod_{m=-[n/2]}^{[n/2]+1} (t - m\Delta)^2. \tag{9}$$

Отметим, что величина

$$\sigma_f^2 |\rho_f^{2(n+1)}(0)| = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2(n+1)} S_f(\omega) d\omega. \tag{10}$$

Полиномиальная интерполяция и теорема отсчетов. Теорема отсчетов с весовой функцией $\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}t\right)\Big/\frac{\pi}{\Delta}t$ в (2) используется не только для сигналов с ограниченным по частоте одномодальным спектром ($|\omega_{\max}| \le \pi/\Delta$). Для сигнала с не ограниченным по частоте спектром дисперсия ошибки реконструкции сигнала

$$\langle\varepsilon_f^2\rangle = 2\int\limits_{|\omega|>\pi/\Delta} S_f(\omega)d\omega, \tag{11}$$

т. е. в 2 раза превышает энергию сигнала на частотах более высоких, чем половина частоты дискретизации.

Величина дисперсии (11) зависит от скорости убывания спектральной плотности. Например, для сигнала с марковской корреляционной функцией $\sigma_f^2 e^{-\alpha|\tau|}$ и спектральной плотностью $S_f(\omega) = \sigma_f^2 \frac{\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$ при высокой частоте дискретизации значение интеграла (11) составляет $\langle\varepsilon_f^2\rangle \approx \frac{4}{\pi^2}\sigma_f^2\alpha\Delta$. При использовании весовой функции (4) для воспроизведения этого сигнала при $n=1$ $\left(w(\tau)=\frac{1}{\Delta}(\Delta-|\tau|)1[\Delta-|\tau|]\right)$ дисперсия ошибки $\langle\varepsilon_f^2\rangle \approx \frac{1}{3}\sigma_f^2\alpha\Delta$, т. е. в этом случае использование в формуле (2) всего двух отсчетов дает лучшие результаты по сравнению с интерполяционным фильтром нижних частот.

Корреляционную функцию сигнала в асимптотике можно представить в виде ряда

$$\rho_f(t) \cong 1 + \sum_{k=1}^{m} \rho_f^{(2k)}(0)\frac{t^{2k}}{(2k)!} + \rho_f^{(2m+1)}(0)\frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}. \tag{12}$$

Скорость убывания спектральной плотности – $O\left(\frac{1}{\omega^{2(m+1)}}\right)$. Сигнал с такой корреляционной функцией m раз дифференцируем в среднеквадратичном, а его $(m+1)$-й производной не существует.

Сравним фильтр нижних частот с полиномиальной интерполяцией на примере m-кратно дифференцируемого в среднеквадратичном сигнала. Таковым сигналом является сигнал со спектральной плотностью

$$S_f(\omega) = \sigma_f^2 \frac{\alpha^{2m+1}2^m m!}{\pi(2m-1)!!}\frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)^{m+1}}. \tag{13}$$

При $m=0$, если положить $m!=1$, $(2m-1)!!=1$, соотношение (13) совпадает со спектральной плотностью марковского процесса. Величина $\rho_f^{(2m+1)}(0)$ для спектральной мощности (13) представляется в виде

$$|\rho_f^{(2m+1)}(0)| = \sigma_f^2 \frac{\alpha^{2m+1}2^m m!}{\pi(2m-1)!!}, \tag{14}$$

Таблица 3

Отношение $\gamma(m, n)$ дисперсий ошибок восстановления сигнала

m	n	$\gamma(m, n)$
0	1	0,823
1	3	0,899
2	5	1,001
3	9	0,999
4	14	1,014
5	20	1,011
6	27	1,002
7	35	1,003

а дисперсия ошибки при высокой точности воспроизведения (в случае $n+1>m$) описывается соотношением

$$\langle\varepsilon_f^2\rangle = \beta_n \sigma_f^2 |\rho_f^{(2m+1)}(0)| \Delta^{2m+1}. \quad (15)$$

Вычисление (11) для спектра мощности (13) дает следующий результат:

$$\langle\varepsilon_f^2\rangle \approx \sigma_f^2 (\alpha\Delta)^{2m+1} \frac{2^{m+2} m!}{\pi^{2(m+1)}(2m+1)!!}. \quad (16)$$

В табл. 3 приведены значения отношения γ дисперсий ошибок воспроизведения для сигналов различной дифференцируемости. При этом в числителе отношения стоит дисперсия, полученная с использованием отсчетной функции (4), а в знаменателе – дисперсия, полученная при использовании отсчетной функции фильтра нижних частот $\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}t\right)\Big/\frac{\pi}{\Delta}t$.

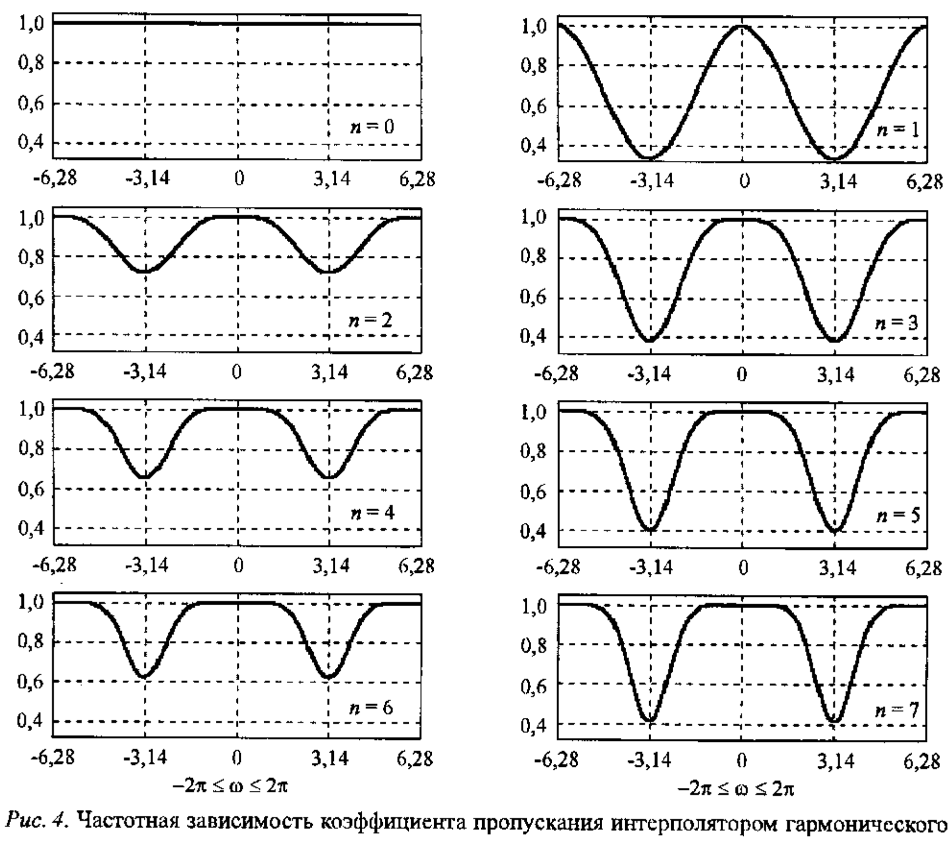

Рис. 4. Частотная зависимость коэффициента пропускания интерполятором гармонического сигнала

Из данных этой таблицы следует, что при высокой частоте дискретизации интерполирование сигнала с использованием отсчетной функции (4), построенной на основе полинома Лагранжа, при сравнительно небольшом числе используемых отсчетов практически эквивалентно применению для реконструкции сигнала фильтра нижних частот.

Помехоустойчивость. Если присутствует не коррелированный с сигналом амплитудный шум $\varphi(k\Delta)$, то при интерполировании сигнала с использованием отсчетной функции (4) дополнительная составляющая дисперсии ошибки определяется очевидным соотношением

$$\langle\varepsilon_{\varphi}^{2}\rangle = \sigma_{\varphi}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{\varphi}(\omega)\sum_{m=0}^{n} C_{m}(n)\cos m\omega\Delta. \tag{17}$$

На рис. 4 изображена частотная зависимость множителя в выражении (17), стоящего при спектральной плотности шума $S_{\varphi}(\omega)$ для различных степеней интерполирующего полинома. С ростом степени полинома его фильтрующие свойства изменяются, однако дополнительная дисперсия ошибки от амплитудного шума не превышает величины дисперсии σ_{φ}^{2}, так как коэффициент пропускания на любой частоте меньше или равен единице.

Заключение. Рассмотренные выше интерполяционные соотношения предполагают воспроизведение сигнала по бесконечной последовательности отсчетов. Однако, на наш взгляд, отсчетной функцией (4) можно успешно пользоваться и при конечном, но достаточно большом числе отсчетов. Например, если интерполирование производится по четырем отсчетам ($n = 3$), то только в двух интервалах дискретизации (первом и последнем) дисперсия ошибки будет превышать значение, определяемое соотношениями (6) и (8). Это превышение при высокой точности воспроизведения может быть определено исходя из соотношения типа (9) путем интегрирования в соответствующем интервале дискретизации. Отметим, что полученные результаты достаточно просто распространяются на случай неравномерной дискретизации. При этом отсчетная функция получается нестационарной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. М.: ГИФМЛ, 1962. Т. 1.
2. **Ефимов В. М.** Об интерполировании случайно изменяющихся величин при дискретном измерении и контроле с помощью полинома Лагранжа // Автометрия. 1965. №3. С. 19.
3. **Ефимов В. М.** Асимптотически оптимальные интерполяционные соотношения // Автометрия. 1992. № 4. С. 3.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: reznik@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
20 августа 2001 г.