РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 6 2001

УДК 519.24

Е. Л. Кулешов

(Владивосток)

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ИЗВЕСТНОМ И НЕИЗВЕСТНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОЖИДАНИИ

Дан сравнительный анализ задач оптимального линейного прогноза стационарного случайного процесса при известном и неизвестном математическом ожидании. Показано, что в алгоритмах прогноза неизвестное математическое ожидание заменяется его оптимальной линейной оценкой. На основе этого получены рекомендации для построения практических алгоритмов прогноза. Установлена связь между ошибками прогнозов при известном и неизвестном математическом ожидании.

Введение. Пусть x_r, $r = \ldots, t-2, t-1, t,$ – стационарный в широком смысле случайный процесс с дискретным временем r, наблюдаемый до настоящего момента времени t, с математическим ожиданием $a = \mathbf{M}x_r$ ($\mathbf{M}$ – оператор математического ожидания), корреляционной функцией $B_{i-j} = \mathbf{M}x_i x_j$ и ковариационной функцией $R_{i-j} = \mathbf{M}(x_i - a)(x_j - a) = B_{i-j} - a^2$. Рассмотрим задачу линейного прогноза случайного процесса x_r в следующей постановке. Пусть

$$y_{t+l} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{t-i+1}, \qquad l \geq 1, \tag{1}$$

– оценка случайной величины x_{t+l}, причем коэффициенты прогноза $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_k$ находятся из условия минимума среднеквадратической ошибки

$$\varepsilon^2 = \mathbf{M}(y_{t+l} - x_{t+l})^2 \to \min_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}. \tag{2}$$

Таким образом, соотношения (1), (2) определяют задачу линейного прогноза с минимальной среднеквадратической ошибкой случайного процесса x_r на l шагов вперед по отношению к настоящему моменту времени t. Для вычисления прогноза по формуле (1) используются k значений наблюдаемого процесса в моменты $t-k+1, t-k+2, \ldots, t$.

Подстановка (1) в (2) и решение системы уравнений

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \alpha_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{3}$$

приводят к известному результату

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i B_{i-j}=B_{j+l-1},\qquad j=1,\dots,k, \tag{4}$$

– системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, обеспечивающих минимальное значение ε_1^2 среднеквадратической ошибки (2), которое определяется соотношением

$$\varepsilon_1^2=B_0-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i B_{i+l-1}=B_0-\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\alpha_j B_{i-j}. \tag{5}$$

В отличие от типичной задачи прогнозирования стационарного случайного процесса в постановке (1), (2), которая широко обсуждалась в литературе, в данной работе рассматривается задача прогнозирования при известном математическом ожидании. Приведен сравнительный анализ их решений. Показано, что в алгоритмах оптимального прогноза неизвестное математическое ожидание заменяется его оптимальной линейной оценкой. На основе этого получены рекомендации для построения практических алгоритмов прогноза. Установлена связь между ошибками прогнозов при известном и неизвестном математическом ожидании.

Прогноз с дополнительным параметром. Пусть

$$z_{t+l}=\beta_0+\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_{t-i+1},\qquad l\geq 1, \tag{6}$$

– оценка случайной величины x_{t+l} и $\beta_0,\dots,\beta_k$ – параметры, которые находятся из условия минимума среднеквадратической ошибки

$$\varepsilon^2=\mathbf{M}(z_{t+l}-x_{t+l})^2\to\min_{\beta_0,\dots,\beta_k}. \tag{7}$$

По сравнению с соотношениями (1), (2) в задаче (6), (7) имеется дополнительный параметр β_0.

Решение этой задачи сводится к поиску минимума функции ε^2 по $k+1$ переменным $\beta_0,\dots,\beta_k$. Известно [1], что достаточные условия минимума функции $k+1$ переменных имеют вид

$$\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial\beta_j}=0,\qquad j=0,1,\dots,k, \tag{8}$$

$$Q=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial\beta_i\partial\beta_j}\lambda_i\lambda_j>0, \tag{9}$$

где $\lambda_0,\dots,\lambda_k$ – любые числа. Найдем решение системы (8), а также покажем, что это решение удовлетворяет условию (9).

8*

Соотношение (6) подставим в (7), тогда

$$\varepsilon^2 = \mathbf{M}\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1} - x_{t+l}\right)^2. \tag{10}$$

Рассмотрим первое уравнение (при $j=0$) системы (8). Несложно определить, что из уравнения $\partial\varepsilon^2/\partial\beta_0 = 0$ следует

$$\beta_0 = a\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\right), \tag{11}$$

где a – математическое ожидание случайного процесса x_t. Аналогично из (8) при $j=1,\dots,k$ следует

$$\beta_0 a + \sum_{i=1}^{k} \beta_i B_{i-j} = B_{j+l-1}, \qquad j=1,\dots,k. \tag{12}$$

Соотношения (11), (12) составляют систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\beta_0,\dots,\beta_k$. Параметр β_0 можно исключить из этой системы. Подстановка (11) в (12) с учетом равенства $R_i = B_i - a^2$ приводит к выражению

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i R_{i-j} = R_{j+l-1}, \qquad j=1,\dots,k. \tag{13}$$

Теперь параметр β_0 определяется по формуле (11) через решение системы (13).

Подставим соотношение (11) в (6), тогда формула для прогноза примет вид

$$z_{t+l} = a\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\right) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{t-i+1}, \tag{14}$$

что является взвешенным средним величин a, $x_t,\dots,x_{t-k+1}$ с весами $1-\sum_{i=1}^{k}\beta_i$, $\beta_1,\dots,\beta_k$. Из (14) следует $\mathbf{M}z_{t+l} = a$, т. е. прогноз (14) является несмещенной оценкой случайной величины x_{t+l}. Таким образом, постановка задачи прогноза (1), (2) предполагает неизвестным математическое ожидание исследуемого процесса x_t, а задача прогноза в постановке (6), (7) – известным математическое ожидание, на что явно указывает соотношение (14).

Решение системы (8) минимизирует ошибку ε^2 (7), если выполняется условие (9) положительности квадратичной формы Q. Для проверки этого условия вычислим вторые производные. Из соотношения (10) следует

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} = \begin{cases} 2B_{i-j}, & i, j \geq 1, \\ 2a, & i = 0,\ j \geq 1 \text{ или } j = 0,\ i \geq 1, \\ 2, & i = 0,\ j = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Подставим (15) в (9), тогда

$$\frac{Q}{2} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} B_{i-j} \lambda_i \lambda_j + 2a\lambda_0 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \lambda_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} R_{i-j} \lambda_i \lambda_j + a^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \lambda_j +$$

$$+ 2a\lambda_0 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \lambda_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} R_{i-j} \lambda_i \lambda_j + \left(a \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \lambda_0 \right)^2. \tag{16}$$

Таким образом, $Q > 0$, поскольку первое слагаемое в (16) положительно, так как ковариационная функция является положительно-определенной [2]. Следовательно, выполняются достаточные условия минимума функции ε^2, и решение системы уравнений (13) минимизирует ошибку прогноза.

Найдем минимальное значение ε_2^2 среднеквадратической ошибки (7). Для этого подставим (14) в (7):

$$\varepsilon_2^2 = \mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{k} \beta_i (x_{t-i+1} - a) - (x_{t+l} - a) \right]^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \beta_i \beta_j R_{i-j} - 2 \sum_{i=1}^{k} \beta_i R_{i+l-1} + R_0$$

и затем учтем, что $\beta_1, \ldots, \beta_k$ удовлетворяют системе уравнений (13), тогда минимальная ошибка

$$\varepsilon_2^2 = R_0 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i R_{i+l-1} = R_0 - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \beta_i \beta_j R_{i-j}. \tag{17}$$

Линейная фильтрация, прогнозирование и оценивание математического ожидания. Задачу оптимального линейного прогноза можно рассматривать как частный случай задачи оптимальной линейной фильтрации, основные положения которой для дискретного времени состоят в следующем [3]. Пусть наблюдаемый случайный процесс $x_r = s_r + \xi_r$, $r = k_0, k_0 + 1, \ldots$ $\ldots, k_0 + k - 1$, где s_r, ξ_r – в общем нестационарные случайные процессы, называемые полезным сигналом и помехой. Линейная оценка $s_0(t)$ случайного процесса s_t в момент времени t определяется соотношением

$$s_0(t) = \sum_{\tau = k_0}^{k_0 + k - 1} h(t, \tau) x_\tau, \tag{18}$$

где $h(t,\tau)$ – импульсная реакция линейного фильтра. На классе оценок вида (18) находится оптимальная, минимизирующая среднеквадратическую ошибку:

$$\mathbf{M}[s_0(t) - s_t]^2 \to \min_h. \tag{19}$$

Решением этой задачи является функция $h_\nu(t,\tau)$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{M}s_t x_u = \sum_{\tau = k_0}^{k_0+k-1} h_\nu(t,\tau)\mathbf{M}x_\tau x_u, \quad k_0 \le u \le k_0 + k - 1. \tag{20}$$

Пусть $s_\nu(t) = s_0(t)$ (18) при условии $h(t,\tau) = h_\nu(t,\tau)$, тогда оценка $s_\nu(t)$ имеет минимальную среднеквадратическую ошибку

$$\varepsilon_\nu^2(t) = \mathbf{M}s_t^2 - \mathbf{M}s_\nu^2(t) = \mathbf{M}s_t^2 - \mathbf{M}s_t s_\nu(t). \tag{21}$$

Уравнение (20) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы среднеквадратическая ошибка линейной оценки $s_0(t)$ достигала минимального значения. Доказательства условий необходимости и достаточности можно найти в литературе, например, в [4, с. 249] и [3, с. 215].

В задаче фильтрации (18)–(20) момент времени t принадлежит интервалу наблюдения: $k_0 \le t \le k_0 + k - 1$. При $t > k_0 + k - 1$ условия (18)–(20) определяют задачу оптимального линейного прогноза полезного сигнала s_t на фоне помехи в будущий момент времени t по отношению к последнему моменту $k_0 + k - 1$ интервала наблюдения. Рассмотрим задачу (18)–(20) в частном случае, который сводится к типичному варианту задачи прогноза (1), (2), (4) и задается следующими условиями.

1. Ставится задача прогноза непосредственно наблюдаемого процесса x_t. При этом полезный сигнал $s_t = x_t$, следовательно, помеха $\xi_t = 0$, и необходимо найти оценку случайной величины x_t, $t > k_0 + k - 1$, с минимальной среднеквадратической ошибкой по критерию (19).

2. Удобно представить момент прогноза в виде $t + l$, где $l \ge 1$, а $t = k_0 + k - 1$ равно последнему моменту из интервала наблюдения. При этом в формулах (18)–(20) $k_0 = t - (k-1)$, полезный сигнал s_t заменяется на $s_{t+l} = x_{t+l}$ и его оценка $s_0(t)$ обозначается как y_{t+l}.

3. Случайный процесс x_t является стационарным в широком смысле, а импульсная реакция фильтра зависит от своих аргументов t,τ через их разность: $h_\nu(t,\tau) = h_\nu(t-\tau)$. Следовательно, корреляционная функция наблюдаемого процесса в (20) зависит от разности своих аргументов: $\mathbf{M}x_\tau x_u = B_{\tau-u}$, левая часть (20) $\mathbf{M}s_{t+l}x_u = \mathbf{M}x_{t+l}x_u = B_{t+l-u}$. При этих условиях, заменяя в (18) индекс суммирования τ на новый индекс $i = t - \tau + 1$, несложно получить (1), где

$$\alpha_i = h_\nu(i-1), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{22}$$

Аналогично, если заменить в (20) индекс суммирования τ на новый индекс $i = t - \tau + 1$ и затем в полученное соотношение ввести $j = t - u + 1$, то из (20) следует (4).

Рассмотрим второй частный случай задачи оптимальной линейной фильтрации (18)–(20), необходимый в дальнейшем и определяемый следующими условиями.

1. Случайный процесс x_t является стационарным в широком смысле, а импульсная реакция фильтра зависит от своих аргументов t,τ через их разность: $h_\nu(t,\tau) = h_a(t-\tau)$.

2. Полезный сигнал $s_t = \mathbf{M}x_t = a$ – это математическое ожидание наблюдаемого процесса x_t.

3. Момент времени t, в который вычисляется оценка $s_0(t)$, полагается равным $t = k_0 + k - 1$ – последнему моменту из интервала наблюдения. При этом задача (18)–(20) определяет оптимальную линейную оценку $a_\text{v}(t) = s_0(t)$ математического ожидания стационарного случайного процесса, а соотношения (18), (20) сводятся к выражениям

$$a_\text{v}(t) = \sum_{i=1}^{k} h_a(i-1) x_{t-i+1}, \qquad t = k_0 + k - 1, \tag{23}$$

$$a^2 = \sum_{i=1}^{k} h_a(i-1) B_{i-j}, \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{24}$$

Среднеквадратическая ошибка $\varepsilon_a^2(t)$ оценки $a_\text{v}(t)$ согласно (21) представляется двумя выражениями:

$$\varepsilon_a^2(t) = a^2 - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} h_a(i-1) h_a(j-1) B_{i-j} = a^2 \left[1 - \sum_{i=1}^{k} h_a(i-1) \right]. \tag{25}$$

Прогноз и оптимальная оценка математического ожидания. Пусть $\alpha_i, \beta_i,\ i = 1, \ldots, k,$ – оптимальные коэффициенты прогнозов соответственно при неизвестном и известном математическом ожидании, определяемые уравнениями (4) и (13). Покажем, что оптимальная импульсная реакция $h_a(i)$ в формулах (23), (24) и разности $\delta_i = \alpha_i - \beta_i$ связаны соотношением

$$h_a(i-1) = \frac{\delta_i}{1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i}, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{26}$$

Действительно, разность уравнений (4) и (13) представляется соотношением

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i B_{i-j} - \beta_i R_{i-j}) = a^2, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{27}$$

которое с учетом равенства $R_i = B_i - a^2$ преобразуется в выражение

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\delta_i}{1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i} B_{i-j} = a^2, \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{28}$$

Таким образом, из (24), (28) следует (26).

Равенство (26) позволяет преобразовать формулу (1) для прогноза при неизвестном математическом ожидании в выражение, содержащее оптимальную линейную оценку $a_\text{v}(t)$ математического ожидания a:

$$y_{t+l} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{t-i+1} = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \right) \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta_i}{1 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i} x_{t-i+1} + \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \delta_i) x_{t-i+1} =$$

$$=\left(1-\sum_{i=1}^{k}\beta_i\right)a_{\text{v}}+\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_{t-i+1}. \qquad (29)$$

Следовательно, оптимальный прогноз y_{t+l} (29) при неизвестном среднем – это прогноз с коэффициентами β_i, $i=1,\ldots,k$ (для оптимального прогноза (14) при известном среднем), где роль математического ожидания выполняет его оптимальная линейная оценка a_{v}, которая определяется соотношениями (23), (24).

Равенство (29) справедливо при любом k, в том числе малом k, например, $k=1, 2$. Отметим, что при малом k оценка a_{v} имеет значительную среднеквадратическую ошибку, поскольку a_{v} вычисляется по выборке, состоящей из небольшого числа k выборочных значений. Как правило, в задачах прогнозирования математическое ожидание a и корреляционная функция B_i неизвестны. Поэтому задача линейного прогноза формулируется в виде соотношений (1), (2), формально не требующих знания математического ожидания, а решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений (4) относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, в которой неизвестная корреляционная функция заменяется ее оценкой. Этот подход связан с принципиальной трудностью, обусловленной тем, что решение системы линейных уравнений (4) является некорректно поставленной задачей [5] и для получения ее устойчивого решения число k выбирается небольшим (или, что эквивалентно, используются сглаживающие корреляционные окна). Но это приводит к значительной среднеквадратической ошибке оценки a_{v}, что увеличивает ошибку прогноза. Поэтому из соотношения (29) следует вполне очевидный практический вывод, состоящий в том, что задачу прогнозирования следует решать в два этапа. На первом вычисляется оценка математического ожидания

$$a_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{t-i+1} \qquad (30)$$

по выборке максимальной длины n, что обеспечивает малую ошибку этой оценки. На втором этапе решается задача прогноза (1), (2) для процесса x_t-a_0. Для получения устойчивого решения системы (4) при этом допустим выбор сравнительно малого k.

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих соотношения (26), (29) при $k=1$ и $k=2$. Пусть для вычисления прогноза в момент $t+l$ используется только одно значение x_t. Тогда $k=1$ и система уравнений (4), а также (13) вырождаются в единственное уравнение. Для известного математического ожидания из (13) следует $\beta_1=R_l/R_0=\rho_l$, где $\rho_l=R_l/R_0$ – коэффициент корреляции случайного процесса x_t, а формула для оптимального прогноза (14) принимает вид

$$z_{t+l}=(1-\rho_l)a+\rho_l x_t. \qquad (31)$$

Аналогично при неизвестном математическом ожидании из (4) следует $\alpha_i=B_l/B_0$. Представим $B_l=\sigma^2\rho_l+a^2$, где $\sigma^2=\mathbf{M}(x_t-a)^2=\mathrm{var}x_t$ – дисперсия случайного процесса x_t. Тогда формула (1) для прогноза будет иметь вид

$$y_{t+l}=\frac{\sigma^2\rho_l+a^2}{\sigma^2+a^2}x_t=(1-\rho_l)\frac{a^2}{\sigma^2+a^2}x_t+\rho_l x_t. \qquad (32)$$

Здесь согласно (29) величина $a_1=(a^2/(\sigma^2+a^2))x_t$ должна быть оптимальной линейной оценкой математического ожидания. Действительно, непосредственно из формулы (24) следует $h_a(0)=a^2/(\sigma^2+a^2)$, а из (23) – оптимальная оценка $a_v=a_1$.

При вычислении прогноза по двум значениям x_t и x_{t-1} оптимальная оценка математического ожидания a_v в (29) определяется решением системы двух уравнений (24), которое имеет вид $h_a(0)=h_a(1)=a^2/(B_0+B_1)$, где знаменатель $B_0+B_1=2a^2+\sigma^2(1+\rho_1)$. Пусть $a_0=(x_t+x_{t-1})/2$ – оценка математического ожидания (30) при $n=2$. Тогда дисперсия $\mathrm{var}a_0$ оценки a_0 имеет вид $\mathrm{var}a_0=\sigma^2(1+\rho_1)/2$, и следовательно, $B_0+B_1=2(\mathrm{var}a_0+a^2)$ и $h_a(0)=$ $=a^2/(2(\mathrm{var}a_0+a^2))$. Таким образом, оптимальная оценка (23) при $k=2$ имеет вид $a_v=g_0a_0$, где a_0 – традиционная оценка в виде среднего арифметического и $g_0=a^2/(\mathrm{var}a_0+a^2)$ – множитель, минимизирующий среднеквадратическую ошибку оценки a_v. Отметим, что такой же вид $a_1=g_0a_0$ имеет оптимальная оценка a_1 среднего и при $k=1$. Действительно, при этом традиционная оценка $a_0=x_t$ есть среднее арифметическое по одному значению, а $\mathrm{var}a_0=\mathrm{var}x_t=\sigma^2$. Оценки вида $a_1=g_0a_0$ рассматривались в [6] и определялись критерием: $\mathbf{M}(ga_0-a)^2\to\min\limits_g$. Как показано, эти оценки при $k=1,2$ совпадают с решением системы уравнений (23), (24).

Соотношения между ошибками. Очевидно, $\varepsilon_1^2>\varepsilon_2^2$, поскольку ошибка ε_1^2 прогноза при неизвестном среднем содержит в себе ошибку оценки среднего, а ε_2^2 такой ошибки не содержит. Получим соотношение между ошибками ε_1^2, ε_2^2 и ε_a^2. Из (5), (17) следует

$$\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2=B_0-R_0-\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i\alpha_j-\beta_i\beta_j)B_{i-j}-a^2\left(\sum_{i=1}^{k}\beta_i\right)^2=$$

$$=a^2\left[1-\left(\sum_{i=1}^{k}\beta_i\right)^2\right]-\sum_{i=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i\alpha_j-\beta_i\beta_j)B_{i-j}. \qquad (33)$$

Введем обозначение

$$c=1-\sum_{i=1}^{k}\beta_i, \qquad (34)$$

тогда согласно (26)

$$\alpha_i-\beta_i=ch_a(i-1). \qquad (35)$$

Рассмотрим выражение

$$\alpha_i\alpha_j=(ch_a(i-1)+\beta_i)(ch_a(j-1)+\beta_j)=$$
$$=c^2h_a(i-1)h_a(j-1)+\beta_i\beta_j+ch_a(i-1)\beta_j+c\beta_ih_a(j-1). \qquad (36)$$

Подставим (36) в (33), тогда

$$\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 = a^2 c(2-c) -$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}[c^2 h_a(i-1)h_a(j-1) + ch_a(i-1)\beta_j + c\beta_i h_a(j-1)]B_{i-j}. \qquad (37)$$

Используя формулы (24) и (25), получим

$$\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 = a^2 c(2-c) - c^2(a^2 - \varepsilon_a^2) - 2ca^2 \sum_{j=1}^{k}\beta_j = c^2\varepsilon_a^2 = \varepsilon_a^2\left(1 - \sum_{j=1}^{k}\beta_j\right)^2. \qquad (38)$$

Следовательно, разность ошибок $\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2$ может быть значительной, если велика ошибка ε_a^2 оптимальной оценки среднего или большим является весовой множитель $1 - \sum_{j=1}^{k}\beta_j$ среднего в формуле прогноза.

Ошибку ε_a^2 оптимальной оценки среднего можно представить через коэффициенты α_j, β_j, для этого подставим (26) в (25) и будем иметь

$$\varepsilon_a^2 = a^2\left[1 - \sum_{i=1}^{k} h_a(i-1)\right] = a^2\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - \beta_i)}{1 - \sum_{i=1}^{k}\beta_i}\right) = a^2\,\frac{1 - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i}{1 - \sum_{i=1}^{k}\beta_i}. \qquad (39)$$

Подстановка (39) в (38) приводит к представлению разности ошибок $\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2$ через коэффициенты α_j, β_j:

$$\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 = a^2\left(1 - \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)\left(1 - \sum_{j=1}^{k}\beta_j\right). \qquad (40)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике. М.: Наука, 1986.
2. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1974. Кн. 1.
3. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1975. Кн. 2.
4. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. Вып. 1.
5. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
6. **Кулешов Е. Л.** Непараметрические спектральные оценки стационарных случайных процессов на конечных реализациях // Автометрия. 1992. № 6. С. 107.

Дальневосточный государственный университет,
E-mail: kuleshov@lemoi.phys.dvgu.ru

Поступила в редакцию
22 июня 2000 г.