

УДК 681.324 : 681.3-192

Ю. К. Дмитриев, В. А. Мелентьев, Н. Г. Грязнов

(Новосибирск)

АНАЛИЗ ЖИВУЧЕСТИ ВЛОЖЕННЫХ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ СТРУКТУР*

Изучается возможность самодиагностики вычислительных систем со связями точка–точка на системном уровне в присутствии множественных неисправностей. Известный подход к диагностике основан на введении непосредственных связей между всеми парами из тестирующих и тестируемых модулей. Предлагается формировать необходимые диагностические соединения в виде составных каналов между тестирующим и тестируемым модулями, образованными из рабочих связей системы. Введены показатели, характеризующие качество вложенного диагностического графа, обеспечивающего t -диагностируемость без ремонта, при использовании в качестве графа связей системы двумерного тора. Для оценки структурной живучести системы введен показатель, характеризующий вероятность существования связи между тестирующим и тестируемым модулями в динамике изменения состояния системы. Показана зависимость введенных показателей вложенного диагностического графа от способа вложения.

Введение. Одним из путей достижения высокого уровня готовности большемасштабных вычислительных систем (ВС) является обеспечение их функционирования при отказах отдельных обрабатывающих модулей (живучие ВС). Поэтому требования к оперативности и достоверности определения технического состояния ВС на системном уровне возрастают.

Достижение системой свойства живучести требует оперативного определения ее состояния при возникновении множественных отказов. Для изучения диагностических свойств большемасштабных ВС используется теоретико-графовая модель, предложенная в работе [1]. Эта модель описывает систему S , состоящую из N независимых подсистем, или модулей. По специальным межмодульным соединениям, которые образуют диагностическую структуру системы, каждый модуль проверяет и оценивает техническое состояние (исправен/неисправен) некоторого подмножества других модулей. Оценки, получаемые тестирующим модулем, достоверны, если тестирующий модуль исправен; если же тестирующий модуль оказывается неисправ-

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00605).

ным, то получаемые им оценки лишь с некоторой вероятностью соответствуют действительному состоянию тестируемых модулей. Техническое состояние ВС в целом определяется путем сопоставительного анализа оценок, полученных разными тестирующими модулями. Численной характеристикой диагностических способностей ВС служит кратность неисправностей t – такое наибольшее число одновременно присутствующих в системе неисправных модулей, при котором еще достижимо взаимно однозначное соответствие между техническим состоянием ВС и совокупностью полученных тестовых оценок. Найдены условия, при которых достигается $t = \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$ [1] или даже $t = N - 2$ [2].

Для модели [1] установлена прямая зависимость значения t от вершинной степени графа, представляющего диагностическую структуру системы. Достижение предельной кратности требует использования сложной и специфической диагностической структуры. Для уменьшения структурной составляющей стоимости ВС в [3] предложено образовывать необходимые диагностические соединения между несмежными модулями в виде физических соединений, составляемых из межмодульных связей. При осуществлении этой идеи построение диагностической структуры сводится к проблеме вложения требуемого диагностического графа в заданный рабочий граф.

Задача вложения графов является объектом интенсивных исследований в связи с проблемами сбалансированной загрузки модулей ВС ветвями параллельной программы; эффективного выполнения параллельной программы, структура которой не совпадает со структурой сети связи между модулями ВС; реконфигурации системы при отказе ее элементов. Известные подходы (см., например, [4, 5]) к решению задачи вложения основаны на применении целевых функций, которые характеризуют эффективность распараллеливания программы и взаимодействия ее параллельных ветвей. Общим для всех описанных в литературе подходов является рассмотрение вложения одних рабочих графов в другие рабочие графы. Вложение в рабочий граф диагностических графов впервые рассмотрено в [3].

Отказоустойчивость ВС определяется отказоустойчивостью составляющих ее подсистем, в том числе и подсистемы самодиагностики. В связи с этим возникает задача оценки отказоустойчивости вложенного диагностического графа и ее зависимости от отказоустойчивости рабочего графа. Проблема отказоустойчивости структуры ВС широко обсуждается в литературе в течение последних полутора десятков лет. Для оценки отказоустойчивости, как правило, применяют показатели, характеризующие статические свойства структуры, – диаметр графа, минимальное разделяющее множество и другие меры эффективности отображения структуры пользовательской программы на рабочую структуру. В данной работе для оценки вложенного диагностического графа использован показатель [6], позволяющий оценивать *отказоустойчивость* структуры ВС в динамике изменения ее технического состояния. Он базируется на расчете вероятности сохранения связности заданных совокупностей вершин при отказах вершин или ребер.

Цель работы заключается в выборе совокупности показателей, характеризующих свойства вложенной диагностической структуры; в выявлении связи этих показателей со структурными свойствами рабочего графа; в разработке методики многокритериальной оптимизации вложения диагностического графа.

1. Формальная постановка проблемы и критерии оптимизации вложения. Диагностическая структура ВС представлена графом $D = (V_D, E_D)$, где V_D – множество вершин, соответствующих модулям системы; E_D – множество дуг, сопоставленных связям пар тестирующий модуль – тестируемый модуль, или тестам над системой. Аналогично топология межмодульной сети связи ВС представлена рабочим графом $W = (V_W, E_W)$, в котором V_W – вершины, представляющие обрабатывающие модули; E_W – множество ребер, соответствующих межмодульным связям. Для графов D и W выполняется $|V_D| = |V_W| = N$.

Вложением D в W называется функция f отображения вершин графа D в вершины графа W , при котором каждой вершине v графа D ставится в соответствие отдельная вершина в графе W , обозначаемая $f(v)$. Аналогично каждая дуга $e_D = (v_i, v_j) \in E_D$ отображается в путь в графе W , обозначаемый $f(v_i, v_j) = \langle p_{s1}, p_{s2}, \dots, p_{sm} \rangle$, где $p_{s1} = f(v_i)$, $p_{sm} = f(v_j)$. Следовательно, $f(D) = (V_{DW}, E_{DW})$ – ориентированный подграф неориентированного рабочего графа и такой, что для всякого $(v_1, v_2) \in E_D$ существует путь, состоящий из ребер из E_W .

В качестве диагностического графа используется циркулянт $D = (N; s_1, s_2, \dots, s_t)$, где N – число вершин графа и $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_t = t$; $t = \lfloor (N-1)/2 \rfloor$. Вершины циркулянта перенумерованы числами от 0 до $N-1$, причем каждая i -я вершина ($0 \leq i \leq N-1$) смежна с вершинами $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_t \pmod{N}$. Множество $\{s_i\}$ есть множество прыжков, s_i – прыжок. Поскольку $s_i < N/2$, то циркулянт всегда однороден степени $2t$. Установлено [1], что циркулянт с прыжками $s_1 = 1, s_2 = 2, \dots, s_t = \lfloor (N-1)/2 \rfloor$ является оптимальным графом t -диагностируемой без ремонта системы. Оптимальность означает, что число дуг диагностического графа (напомним, что дуги представляют тесты над модулями системы) является необходимым и достаточным для того, чтобы по совокупности исходов однократно выполненных тестов можно было идентифицировать все неисправные модули (диагностирование без ремонта). Кратность неисправностей служит одним из используемых нами критериев оптимизации вложения диагностического графа в рабочий.

В качестве рабочего графа используется двумерный тор – граф группы автоморфизмов E_2 , представляющий собой прямое произведение циклических подгрупп $C_{N_i}, i = 0, 1$:

$$E_2 = C_{N_0} \otimes C_{N_1},$$

где N_i – порядок i -й подгруппы, \otimes – символ прямого произведения. Число вершин E_2 -графа – $N = N_0 \times N_1$. Отметками дуг E_2 -графа служат символы образующих элементов g_i нормальных циклических подгрупп.

Вложение циркулянта в E_2 -граф есть некоторая нумерация вершин последнего попарно различными числами от 0 до $N-1$. Поэтому в дальнейшем термины «вложение» и «нумерация» используются как синонимы.

Вершины E_2 -графа можно пронумеровать по-разному, используя разбиение группы на смежные (для определенности – правые) классы по подгруппе, состоящей из всех степеней выбранного элемента $g_0^x g_1^y$ группы, где $0 \leq x \leq \lfloor N_0/2 \rfloor, 0 \leq y \leq \lfloor N_1/2 \rfloor$. Далее для простоты такую подгруппу назовем подгруппой по элементу $g_0^x g_1^y$. На рисунке показано несколько нумераций, полученных для E_2 -графа, имеющего порядки $N_0 = 8$ и $N_1 = 5$ цикличес-

a

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39

b

0	5	10	15	20	25	30	35
1	6	11	16	21	26	31	36
2	7	12	17	22	27	32	37
3	8	13	18	23	28	33	38
4	9	14	19	24	29	34	39

c

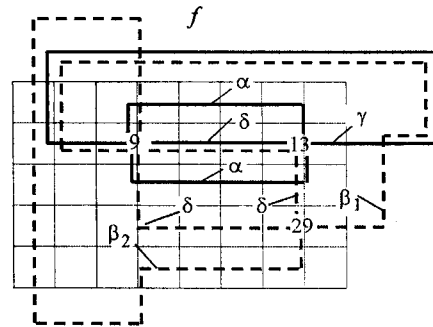
0	35	30	25	20	15	10	5
8	3	38	33	28	23	18	13
16	11	6	1	36	31	26	21
24	19	14	9	4	39	34	29
32	27	22	17	12	7	2	37

d

0	1	10	11	20	21	30	31
32	33	2	3	12	13	22	23
24	25	34	35	4	5	14	15
16	17	26	27	36	37	6	7
8	9	18	19	28	29	38	39

e

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39



ких подгрупп C_{N_0} и C_{N_1} соответственно. Нумерации, представленные на рисунке, *a* и *b*, назовем *каноническими*. Они порождаются подгруппами по элементам g_0 и g_1 и соответствуют так называемым горизонтальной и вертикальной ориентациям графа. Ориентация графа определяет направление нумерации по строкам или столбцам. Обозначим $N_0 = A$ и $N_1 = B$. Тогда граф с горизонтальной ориентацией назовем (A, B) -графом, а граф с вертикальной ориентацией — (B, A) -графом. На рисунке, *c* показана нумерация для (A, B) -графа, полученная с помощью подгруппы по элементу $g_0^3 g_1^2$, а на рисунке, *d* — с помощью подгруппы по элементу $g_0^2 g_1$.

Пусть задана нумерация на E_2 -графе, соответствующая некоторому вложению в него диагностического циркулянта $D = (N; s_1, s_2, \dots, s_m, \dots, s_t)$. В общем случае для произвольно выбранных i и j исходящие дуги $(i, i + s_m)$ и $(j, j + s_m)$ графа D , соответствующие одному и тому же прыжку s_m (другими словами, адреса вершин $i + s_m$ и $j + s_m$ относительно вершин i и j соответственно) в рабочем графе могут быть представлены путями, имеющими разное значение степеней для g_0 и g_1 , т. е. $f(i, i + s_m) \neq f(j, j + s_m)$. Так, для вложения, показанного на рисунке, *a*, прыжок $s_1 = 1$ для вершин с номерами $0, 1, \dots, 6$ представлен путем g_0 , а для вершины с номером 7 — путем $g_0 g_1$. Назовем вер-

шины $f(i)$ и $f(j)$ эквивалентными (по описанию), если для каждого s_m , $1 \leq m \leq t$, найдется такое $s_{m'}$, $1 \leq m' \leq t$, что $f(i, i + s_m) = f(j, j + s_{m'})$.

В [3] установлено, что вершины E_2 -графа, составляющие циклическую подгруппу по заданному элементу группы, образуют один класс эквивалентности. Таким образом, способ нумерации определяет число Q классов эквивалентности. Также установлена связь значения $Z = H/M$ с используемой нумерацией на E_2 -графе. Здесь H – число прыжков (возможно, не одних и тех же для разных вершин класса), которые имеют одинаковое групповое описание во всех Q классах; M – число попарно различных групповых описаний прыжков s_1, s_2, \dots, s_t . В [3] найдены аналитические выражения для вычисления значений M и H в случае канонической нумерации.

Итак, оптимальному вложению диагностического графа отвечает нумерация, минимизирующая значение Q и максимизирующая значение Z .

Величины Q и Z характеризуют унифицированность описания компоненты вложенного диагностического графа (множества путей к диагностируемому модулям) для разных тестирующих модулей и, следовательно, трудоемкость начальной загрузки системы. Трудоемкость загрузки зависит от отношения числа операций трансляционного обмена, необходимого для ввода общей информации, к числу операций дифференцированного обмена, применяемого для ввода индивидуальной информации, и выполняемых последовательно. Уменьшение разнообразия в представлении списка относительных адресов тестируемых модулей в каждом тестирующем модуле ВС упрощает также процедуру самодиагностирования системы.

Нумерация, образованная разбиением группы на смежные классы по элементу $g_0^3 g_1^2$ (см. рисунок, *c*), дает $Q = 1$, а разбиением по элементу $g_0^2 g_1$ – $Q = 2$ (см. рисунок, *d*).

В [3] решена также обратная задача: для заданной канонической нумерации определено максимальное значение числа прыжков $t' \leq t$, при котором достигается оптимальное решение $Q = 1$ и $Z = 1$, являющееся также предельным по возможным значениям Q и Z . Соответствующее вложение названо *минимаксным*. Установлено, что при минимаксном вложении рабочий E_2 -граф t -диагностируем без ремонта при $t = \lfloor N/2 \rfloor - k$, где k – число нормальных подгрупп рабочего графа, имеющих четный порядок. На рисунке, *e* показан пример минимаксного вложения t -диагностируемого без ремонта графа в (8×5) -граф. Серым цветом выделены вершины, тестируемые из нулевой вершины; выбор тестируемых вершин для остальных тестирующих выполняется аналогично [3]. Заметим, что диагностический граф при минимаксном вложении не является циркулянтном!

Рассмотрим произвольное вложение диагностического графа, основанное на разбиении группы на смежные классы по циклической подгруппе по элементу $g_0^x g_1^y$, которое дает $Q > 1$. Для получения максимума по значению Z вершины с номерами $0, 1, 2, \dots, Q - 1$ должны принадлежать разным классам. Способ нумерации остальных вершин обуславливается: 1) выбором начальной вершины для каждого из Q смежных классов; 2) выбором нумерации на множестве начальных вершин; 3) выбором нумерации на множестве вершин каждого смежного класса. Зависимость характеристик вложенного диагностического графа от порядка нумерации будет описана в отдельной работе. В данной работе используем правила нумерации, введенные в [3].

Правила нумерации. Условимся, что смежные классы имеют номера от 0 до $Q - 1$, совпадающие с номерами, присвоенными их начальным вершинам. Начальной вершиной класса 0 (нулевой вершиной) является вершина, представляющая единичный элемент группы. Пусть $C_{0x} (C_{0y})$ – циклическая подгруппа по элементу $g_0 (g_1)$, которой принадлежит единичный элемент группы. Пусть также $q_A (q_B)$ – число смежных классов по подгруппе по элементу $g_0^x g_1^y$, которые имеют общие элементы с подгруппой $C_{0x} (C_{0y})$. Тогда $Q = q_A \times q_B$. Пусть также $g_0^k (g_1^m)$ – элемент подгруппы $C_{0x} (C_{0y})$, который, во-первых, принадлежит также нулевому классу эквивалентности и, во-вторых, является ближайшим к нулевой вершине группы. Тогда номера $1, 2, \dots, q_A - 1$ присваиваются последовательным вершинам, принадлежащим C_{0x} и находящимся на кратчайшем пути от нулевой вершины к вершине g_0^k . Если пересечение C_{0x} с подгруппой по элементу $g_0^x g_1^y$ отсутствует, то для C_{0x} используется каноническая нумерация.

Если $q_B > 1$, то номера $q_A, 2q_A, \dots, (B - 1)q_A$ получают вершины, принадлежащие подгруппе C_{0y} и находящиеся на кратчайшем пути от нулевой вершины к вершине (g_1^m) . В s -й подгруппе по элементу $g_0^x g_1^y$ (s – номер подгруппы) вершина, представляющая элемент $(g_0^x g_1^y)^s$, получает номер $s + Qp$.

2. Структурная живучесть. Структурная живучесть трактуется как способность вычислительной системы сохранять коммуникационные свойства при множественных отказах в сети межмодульных связей. В работе [7] структурная живучесть ВС, представленной графом $G = (V, E)$, характеризуется вектором $\mathbf{R}(G) = \{\mathfrak{R}_1(m, s)\}$. Здесь $\mathfrak{R}_1(m, s)$ – компонента вектора, определяющая живучесть соединения вершины m с вершиной s при отказах (удалении из графа) $l \leq l_{\max}(m, s)$ произвольных вершин или ребер, $m, s \in V, m \neq s$.

Под *соединением* пары $\{m, s\}$ вершин понимаем множество $M(m, s) = \{M_j(m, s)\}$ всех непересекающихся маршрутов между ними. Маршрут $M_j(m, s)$ представляет собой простую цепь с начальной m и конечной s вершинами и с длиной $L_j(m, s) \leq L^*(m, s)$, где $L^*(m, s)$ – предельная допустимая длина маршрута в соединении. По аналогии с электрическими цепями *проводимостью* маршрута $M_j(m, s)$ назовем величину $\rho_j(m, s) = L_j^{-1}$, где L_j – число дуг в j -м маршруте. Соединение характеризуется проводимостью $\rho(m, s)$, являющейся суммой проводимостей маршрутов:

$$\rho(m, s) = \sum_{j=1}^{|M(m, s)|} \rho_j(m, s) = \sum_{j=1}^{|M(m, s)|} L_j^{-1}.$$

Далее индексы принадлежности соединению (m, s) по возможности будем опускать, полагая, что представленные выкладки относятся к любой паре вершин в графе. Обозначим $\bar{\rho}_{lj}$ проводимость j -го маршрута при l отказах в графе, а $\bar{\rho}_l = \sum_{j=1}^{|M|} \bar{\rho}_{lj}$ – проводимость соединения произвольно взятой пары

вершин при l отказах. Можно рассматривать проводимость при условии отказов вершин или ребер (или тех и других одновременно). В данной работе ограничимся рассмотрением отказов вершин, так как этот вид отказов более деструктивен и, следовательно, получаемые оценки структурных

свойств системы являются оценками снизу. Проводимость j -го маршрута в случае отказов l вершин определяется выражением

$$\bar{\rho}_{lj}^V = \rho_{0j} \frac{C_{N-L_j-1}^l}{C_N^l},$$

а живучесть соединения в целом – выражением

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{\bar{\rho}_l \cdot l_{\max} - l}{\rho_0 \cdot l_{\max}}.$$

Здесь ρ_{0j} – проводимость j -го маршрута без отказов; ρ_0 – проводимость соединения без отказов; $\bar{\rho}_l$ и $\bar{\rho}_1$ – соответственно проводимости j -го маршрута и всего соединения при отказе l вершин; $l_{\max} = |M|$ – максимальное допустимое число отказов в соединении, не приводящее к его разрыву; C_N^x – число сочетаний из N элементов по x .

Структурная живучесть ВС определяется средним значением по всем соединениям:

$$\bar{\mathfrak{R}}_1(G) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{m, s \in V} \mathfrak{R}_1(m, s).$$

В E_2 -графе в силу его однородности каждое соединение состоит из четырех маршрутов. Анализ показал, что по конфигурации любое соединение принадлежит к одному из двух типов: $\{\delta, \alpha, \alpha, \gamma\}$ и $\{\delta, \delta, \beta_1, \beta_2\}$. Здесь символы в фигурных скобках определяют длины непересекающихся маршрутов, составляющих соединение: δ – длина кратчайшего пути между заданными вершинами; $\alpha = \delta + 2$; величины γ , β_1 и β_2 определяются следующими выражениями:

$$\gamma = \begin{cases} (N_{0(s)} - \delta), & \text{если } (N_{0(s)} - \delta) \leq (\delta + 8); \\ (\delta + 8), & \text{если } (N_{0(s)} - \delta) > (\delta + 8), \end{cases}$$

$$\beta_1 = \begin{cases} (N_0 - x + y), & \text{если } d < (\delta + 4); \\ (\delta + 4), & \text{если } d \geq (\delta + 4), \end{cases}$$

$$\beta_2 = \begin{cases} (N_1 + x - y), & \text{если } d < (\delta + 4); \\ (\delta + 4), & \text{если } d \geq (\delta + 4), \end{cases}$$

где x и y – соответственно степени элементов по образующим g_0 и g_1 в адресах вершин s и m ; d – диаметр E_2 -графа. Первый тип соединения имеет место, когда групповые представления вершин m и s имеют одинаковые значения показателя степени для g_0 или g_1 ; для вычисления γ используется значение N_0 или N_1 соответственно. Второй тип соединения соответствует случаю, когда значения показателей степени g_0 и g_1 не совпадают для m и s .

На рисунке, f сплошной линией показаны пути, составляющие соединение между вершиной с номером 9 и вершиной с номером 13 (соединение первого типа), а пунктиром – пути между вершинами 9 и 29 (соединение второго типа); использована каноническая нумерация.

Наряду со структурными характеристиками графа, введенными в пп. 1 и 2, в дальнейшем будем также использовать диаметр d и средний диаметр d_{cp} , определяющие задержки передачи информации в системе, представляемой рабочим графом.

3. Анализ результатов эксперимента. Рассмотрим зависимости введенных структурных характеристик от вида вложений диагностических графов (циркулянтов) в рабочие E_2 -графы с числом вершин $N = 90$. Исследуем все возможные типы структур (тип структуры задается значениями $A, B > 3$, при которых выполняется $A \times B = N$) и все возможные нумерации на них, порождаемые разбиением E_2 -графа на циклические подгруппы по элементу $g_0^x g_1^y$, $0 \leq x \leq \lfloor A/2 \rfloor, 0 \leq y \leq \lfloor B/2 \rfloor$. В дальнейшем вложением (x, y) назовем вложение, полученное с помощью элемента $g_0^x g_1^y$.

Расчеты структурной живучести выполнены для кратности отказов $l = 1$. Выбор $l > 1$ изменяет лишь абсолютные значения показателей структурной живучести, но не влияет на характер зависимости их от используемых аргументов [7]. Вместе с тем выбор $l = 1$ значительно упрощает расчеты.

В табл. 1 приведены описания рассмотренных типов (рабочей) структуры и их характеристики. В таблице $\mathfrak{R}_{cp}(D)$ – значение структурной живучести, усредненное по всем нумерациям, порожденным циклическими подгруппами по элементу $g_0^x g_1^y$ для заданного типа структуры.

Видно, что с уменьшением диаметра рабочего графа структурная живучесть вложенного в него диагностического графа возрастает. Это является естественным следствием зависимости длины пути в графе от его диаметра. В то же время структурная живучесть графов с одинаковыми значениями d и d_{cp} может существенно отличаться. Во всех рассмотренных случаях в паре из $(A \times B)$ - и $(B \times A)$ -графов лучшим по структурной живучести является граф с горизонтальной ориентацией.

Данные таблицы показывают, что по совокупности показателей d, d_{cp} и $\mathfrak{R}_{cp}(D)$ структура системы тем лучше, чем меньше разность $(A - B)$. Это означает, что при выборе A и B для заданного N (задача синтеза структуры ВС) для достижения меньших значений задержки передачи сообщений (d) и

Т а б л и ц а 1

$(A \times B)$	d	d_{cp}	$\mathfrak{R}_{cp}(D)$
(18×5)	11	5,76404	0,607090
(15×6)	10	5,29213	0,610949
(10×9)	9	4,77528	0,615141
(9×10)	9	4,77528	0,615134
(6×15)	10	5,29213	0,610852
(5×18)	11	5,76404	0,607021

больших значений структурной живучести как рабочего, так и вложенного в него диагностического графов можно ограничиться минимизацией величины $(A - B)$ в графах с горизонтальной ориентацией.

Анализ рассмотренных вложений диагностического графа в рабочий E_2 -граф выявил следующие общие тенденции.

1. Установлено, что значения выбранных параметров вложенного диагностического графа ($\mathfrak{R}_{\text{ср}}, Q, Z$) чувствительны к используемому типу структуры и нумерации на ней. Показатель структурной живучести изменяется в диапазоне от 0,606626 ((5×18)-граф, вложение (2, 4)) до 0,615399 ((10×9)-граф, вложение каноническое).

Значение $Z = H/M$ изменяется в интервале от 0,060 до 1, а в диапазоне $Z < 1$ (т. е. для случая $Q > 1$) – до значения 0,833 ((18×5)-граф, вложение (4, 2), дающее $Q = 2$).

2. Структурная живучесть не зависит от числа классов эквивалентности Q . Так, для (15×6)-графа при $Q = 30$ (что больше $\max(A, B)$) и, следовательно, больше числа классов эквивалентности для канонического вложения) значение $\mathfrak{R}_{\text{ср}}$ является вторым по величине среди вложений в (15×6)-граф. Вложения, имеющие $Q = 1$, в частности минимаксное вложение, не являются лучшими по структурной живучести ни в одном из рассмотренных случаев. Равным образом не прослеживается связь между значениями показателя структурной живучести вложения и Z, Q и Z . Эти наблюдения свидетельствуют о том, что выбранные показатели образуют независимую систему.

3. Среди множества вложений в заданный $(A \times B)$ -граф имеются эквивалентные по значению выделенного параметра ($\mathfrak{R}_{\text{ср}}, Q$ или Z), что позволяет осуществлять многокритериальную оптимизацию вложенного диагностического графа.

4. Для (18×5)-, (10×9)- и (6×15)-графов лучшей структурной живучестью обладает каноническое вложение. При этом каноническое вложение для (10×9)-графа имеет максимальную структурную живучесть на множестве всех рассмотренных типов структуры и нумераций.

5. Для заданного типа структуры все вложения, имеющие $Q = 1$, при $t = \lfloor (N - 1)/2 \rfloor$ эквивалентны по значению показателя $\mathfrak{R}_{\text{ср}}$ структурной живучести. Нами получено доказательство этого свойства, которое будет опубликовано в отдельной работе.

4. Сравнительный анализ вложений. Сравнительный анализ вложений имеет целью поиск оптимального вложения по заданной совокупности показателей и необходим:

- при анализе и синтезе структуры ВС в процессе проектирования системы или при ее масштабировании (изменении N);
- при изменении условий диагностирования (изменении кратности и вида неисправностей);
- при реконфигурации системы в связи с обнаружением очередного отказа.

В качестве критерия для сравнения вложений используем их ранжирование в порядке падения качества по выделенному показателю. Так, при ранжировании по структурной живучести высший (первый) ранг получает вложение, имеющее максимальное значение $\mathfrak{R}_{\text{ср}}$, при ранжировании по числу классов эквивалентности высший ранг присваивается вложениям с минимальным значением Q ($Q = 1$) и т. д.

В качестве интегральной характеристики вложения используем сумму рангов по выбранному набору показателей:

$$S = \sum_{r_i \in r} k_i r_i,$$

где $r = \{r_i\}$, $i \in \{Q, Z, t, d, d_{cp}, \mathfrak{R}_{cp}\}$, r_i – ранг по показателю i , указанному в индексе; k_i – весовой коэффициент ($0 \leq k_i \leq 1$), учитывающий важность показателя. Использование $k_i = 0$ позволяет исключить соответствующий показатель из рассмотрения. Это оказывается полезным (уменьшает трудоемкости сравнительного анализа), когда в заданной области исследования все вложения имеют одинаковый ранг по i -му показателю. Например, при изучении вложений диагностического графа в E_2 -граф с заданными значениями A и B показатели d и d_{cp} можно опустить: $r_d = r_{d_{cp}} = 0$. Далее всюду при расчете значения S используется значение $k_i = 1$, что соответствует одинаковой важности всех показателей.

В дальнейшем используем следующую нотацию. Для некоторого показателя, скажем, для Q , используем обозначение $Q(\text{reg})$, где reg – описание области, в которой рассматривается этот показатель: в частности, $\text{reg} = 90$, если Q исследуется на множестве всех структур выбранного класса (E_2 -графов), имеющих $N = 90$, и $\text{reg} = A \times B$, если Q изучается на множестве E_2 -графов с заданными численными значениями A и B .

В табл. 2 приведены значения показателей для лучших вложений, выделенных ранжированием в области $\text{reg} = 90$ и имеющих значение интегрального показателя в диапазоне $1 \leq S \leq 21$. Для всех приведенных в таблице вложений $t = 44$, поэтому в таблицу оно не включено, хотя при расчете S учитывалось.

Т а б л и ц а 2

$(A \times B)$	d	d_{cp}	x, y	\mathfrak{R}_{cp}	Q	Z	S
(10×9)	9	4,7753	1, 1: 1, 2: 1, 4: 3, 1: 3, 2: 3, 4: mmx	0,615113	1	1	11
(9×10)			1, 1: 1, 3: 2, 1: 2, 3: 3, 2: 4, 1: 4, 3: mmx				
(10×9)			2, 1	0,615293	2	0,692	13
(9×10)			1, 2	0,615293	2	0,692	13
(10×9)			kan	0,615399	10	0,660	18
(9×10)			2, 2	0,615071	2	0,692	18
(10×9)			2, 4	0,615163	10	0,539	21
(9×10)			4, 2	0,615163	9	0,539	21
(9×10)			kan	0,615113	9	0,692	21

Таблица 3

$(A \times B)$	x, y	$\mathfrak{R}_{\text{cp}}(D)$	S
(18×5)	1, 1: 1, 2: 5, 1: 5, 2: 7, 1; 7, 2; mmx	0,607207	6
(15×6)	mmx	0,610765	4
(10×9)	1, 1: 1, 2: 1, 4: 3, 1; 3, 2: 3, 4: mmx	0,615113	2
(9×10)	1, 1: 1, 3: 2, 1; 2, 3; 4, 1: 4, 3: mmx	0,615113	2
(6×15)	mmx	0,610765	4
(5×18)	1, 1: 1, 5: 1, 7: 2, 1; 2, 5: 2, 7: mmx	0,607207	6

В табл. 3 приведены данные по ранжированию вложений, дающих значения $Q=1$. В этом случае все вложения имеют $Z=1$ и $t=44$, поэтому r_Q, r_Z и r_t не используются, а поскольку $r_d = r_{d_{\text{cp}}}$, то $r_{d_{\text{cp}}}$ также не используется. Так что $k_Q = k_Z = k_d = k_{d_{\text{cp}}} = k_t = 0$ и $S = r_{\text{gr}} + r_d$.

В таблице (15×6) - и (6×15) -графы имеют единственное вложение с $Q=1$ – минимаксное.

Из табл. 3 видно, что лучшими (и эквивалентными) при $Q=1$ являются (9×10) - и (10×9) -графы. Заметим, что для $Q=2$ лучшими и эквивалентными по интегральному показателю являются (9×10) -граф при вложении (1, 2) и (10×9) -граф при вложении (2, 1). Для них $S=4$.

В табл. 4 приведены данные по ранжированию канонических вложений. Из таблицы видно, что оптимальными (дающими наименьшее значение S) при каноническом вложении являются (9×10) - и (6×15) -графы.

5. Программные средства расчета структурной живучести. Для выполнения расчетов структурной живучести вложений диагностического графа в двумерные тороидальные структуры была разработана программная си-

Таблица 4

$(A \times B)$	d	Q	$\mathfrak{R}_{\text{cp}}(D)$	Z	r_Q	r_{gr}	r_Z	r_d	S
(18×5)	11	18	0,607319	0,4426	6	5	6	3	20
(15×6)	10	15	0,610765	0,5172	5	4	5	2	16
(10×9)	9	10	0,615399	0,660	4	1	4	1	10
(9×10)	9	9	0,615113	0,692	3	2	3	1	9
(6×15)	10	6	0,611310	0,796	2	3	2	2	9
(5×18)	11	5	0,607207	0,833	1	6	1	3	11

стема, включающая в себя пользовательский интерфейс, программные модули для выполнения расчетов и базу данных. Все компоненты созданы средствами Access'97, в качестве языка программирования использован Visual Basic for Applications. В базе данных содержится описание исследуемых структур и вложений, а также накапливаются данные о структурных характеристиках тестов. Интерфейсные средства ориентированы на специфику решаемых задач и, кроме обычных возможностей ввода данных и распечатки отчетов, включают создание экранных форм для отображения тороидальных структур и автоматизированной нумерации вершин в соответствии с задаваемыми параметрами вложений. Программная система легко модифицируется и пополняется новыми функциями, что подтвердила ее апробация при проведении описываемых в этой работе исследований.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена проблема вложения диагностического графа в рабочий граф масштабируемой вычислительной системы, состоящей из обрабатывающих модулей, соединенных по принципу точка–точка. Выбран набор показателей эффективности вложения диагностического циркулянтного графа в рабочий граф, представляющий собой граф прямого произведения двух циклических подгрупп. Для оценки живучести вложенного диагностического графа предложено использовать показатель, базирующийся на отказоустойчивости соединений в рабочем графе между парами взаимотестирующих модулей диагностического графа.

Введенные показатели использованы для сравнительной оценки вложений диагностического графа в рабочий, основанных на перенумерации вершин рабочего графа.

Проведенное исследование показало, что живучесть вложенной диагностической структуры ВС зависит от используемых типа структуры системы и нумерации на вершинах ее рабочего графа.

Установлено, что введенные показатели являются достаточно чувствительными к изменению структуры ВС, а методы их расчета нетрудоемкие, что дает возможность использовать эти показатели при исследовании больших масштабных систем. Показатели независимы и аддитивны, что позволяет ставить задачу многокритериальной оптимизации вложенного графа.

Разработана методика сравнительной оценки вложений, которая может быть использована при решении задач синтеза и анализа структуры живучей вычислительной системы. Методика апробирована на примере системы с тороидальной структурой для числа модулей $N = 90$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Preparata F. P., Metze G., Chien R. T. On the connection assignment problem of diagnosable systems // IEEE Trans. Electron. Comput. 1967. EC-16, N 2. P. 848.
2. Barsi F., Grandoni F., Maestrini P. A theory of diagnosability of digital systems // IEEE Trans. Comput. 1976. C-25, N 6. P. 585.
3. Димитриев Ю. К. Перестраиваемые диагностические графы живучих вычислительных систем // Автометрия. 1998. № 1. С. 97.

4. **Lee S. Y., Aggarwal J. K.** A mapping strategy for parallel processing // IEEE Trans. Comput. 1987. C-36, N 4. P. 433.
5. **Bokhari S. H.** On the mapping problem // IEEE Trans. Comput. 1981. C-30, N 3. P. 207.
6. **Мелентьев В. А.** Оценка потенциальной и структурной живучести вычислительных систем // Электронное моделирование. 1995. 17, № 1. С. 78.
7. **Melentiev V. A., Gryaznov N. G.** Analysis of potential and structural robustness of distributed computer systems // Proc. of the 15th IMACS World Congress on Sci. Comput. Modelling and Appl. Math. Berlin, August 1997. V. 6. /Ed. A. Sydow. Berlin: Wissenschaft & Technik Verlag, 1997.

*Институт физики полупроводников СО РАН,
E-mail: ifp@isp.nsc.ru*

*Поступила в редакцию
8 июня 2000 г.*

Реклама продукции в нашем журнале – залог Вашего успеха!