РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 5 2001

УДК 681.3.08

**Т. А. Алиев, Х. С. Таирова**

*(Баку, Азербайджан)*

# РОБАСТНЫЕ АЛГОРИТМЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Показано, что при спектральном анализе величина погрешности оценок коэффициентов ряда Фурье от влияния помехи определяется разностями сумм погрешностей положительных и отрицательных произведений отсчетов суммарного сигнала с соответствующими отсчетами косинусоид и синусоид. Предлагается робастная технология определения искомых оценок, позволяющая исключить зависимость результатов обработки от параметров помехи путем уравновешивания указанных погрешностей.

**Введение.** В отличие от анализа функций распределения вероятности и корреляционного анализа, сформировавшихся непосредственно как виды статистических измерений, спектральный анализ первоначально развивался применительно к задачам исследования свойств неслучайных процессов. Лишь по мере роста потребности в аппаратном анализе случайных процессов и с увеличением роли измерений вероятностных характеристик случайных процессов спектральный анализ выделился в самостоятельное направление. Основное внимание было направлено на создание методов и алгоритмов, позволяющих решать задачи спектрального анализа при ограниченных ресурсах вычислительных машин. Теперь, когда имеются общедоступные высокопроизводительные персональные компьютеры, появилась потребность в решении не менее важной задачи, связанной с разработкой алгоритмов, позволяющих повысить точность результатов гармонического анализа за счет усложнения вычислительного процесса [1, 2]. Это поможет дальнейшему интенсивному развитию как теории, так и техники измерений значений спектральных функций случайных процессов. Рассматриваемые алгоритмы являются одним из возможных вариантов решения этой задачи.

**Постановка задачи.** Известно, что при спектральном анализе измерительной информации $x(t)$ представляется в виде суммы гармонических составляющих:

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t), \tag{1}$$

где $a_0/2$ – среднее значение функции за период $T$; $a_n$, $b_n$ – амплитуды синусоиды и косинусоиды с частотой $n\omega$.

В формуле (1) при разложении функции $x(t)$ в тригонометрический ряд Фурье принимается $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а коэффициенты $a_n$ и $b_n$ определяются как

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega t dt \quad \text{для } n = 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega t dt \quad \text{для } n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь первая гармоника имеет частоту $2\pi/T$, ее период такой же, как и период $T$ функции $x(t)$.

Однако в реальности полезный сигнал $x(t)$ сопровождается определенными помехами $\varepsilon(t)$, т. е. представляет собой сумму:

$$g(t) = x(t) + \varepsilon(t). \tag{3}$$

При этом помехи $\varepsilon(t)$ оказывают ощутимое влияние на результаты анализа и выражения (2) имеют вид

$$\begin{aligned} a_n^* &= \frac{2}{T}\int_0^T [x(t) + \varepsilon(t)]\cos n\omega t dt \quad \text{для } n = 1, 2, \ldots, \\ b_n^* &= \frac{2}{T}\int_0^T [x(t) + \varepsilon(t)]\sin n\omega t dt \quad \text{для } n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти формулы представим в цифровой форме:

$$\begin{aligned} a_n^* &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} [\mathring{x}(i\Delta t) + \mathring{\varepsilon}(i\Delta t)]\cos n\omega(i\Delta t), \\ b_n^* &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} [\mathring{x}(i\Delta t) + \mathring{\varepsilon}(i\Delta t)]\sin n\omega(i\Delta t), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Delta t$ – шаг дискретизации по времени; $N = \frac{T}{\Delta t}$, $i = \overline{1, N}$.

Согласно выражениям (4) погрешности $\lambda_{a_n}$, $\lambda_{b_n}$ оценок $a_n^*$, $b_n^*$ зависят от параметров помехи $\varepsilon(t)$ и определяются по формулам:

$$\lambda_{a_n} = \frac{2}{T}\int_0^T \varepsilon(t)\cos n\omega t dt \approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)\cos n\omega(i\Delta t), \tag{6}$$

$$\lambda_{b_n} = \frac{2}{T}\int_0^T \varepsilon(t)\sin n\omega t dt \approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon(i\Delta t)\sin n\omega(i\Delta t).$$

Следовательно, величина погрешностей $\lambda_{a_n}$, $\lambda_{b_n}$ оценок $a_n^*$, $b_n^*$ в значительной степени зависит от влияния помехи $\varepsilon(t)$. В связи с этим целесообразно создание робастных алгоритмов, которые обеспечили бы независимость оценок $a_n$, $b_n$ полезного сигнала от влияния внешних факторов, т. е. от влияния помехи $\varepsilon(i\Delta t)$.

**Робастная технология определения оценок $a_n^R$, $b_n^R$.** Анализ выражений (4) и (5) показывает, что уменьшение зависимости погрешности оценок от влияния помех при спектральном анализе возможно путем уравновешивания составляющих погрешностей суммы положительных и отрицательных парных произведений. Для достижения этой цели далее предлагается робастная технология обработки суммарного сигнала $g(t)$, которая позволяет уменьшить влияние помехи на погрешности оценок коэффициентов ряда Фурье.

1. Определяется дисперсия помехи по формуле, предложенной в работах [3, 4]:

$$D_\varepsilon = \sigma^2(\varepsilon) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\mathring{g}^2(i\Delta t) + \mathring{g}(i\Delta t)\mathring{g}((i+2)\Delta t) - 2\mathring{g}(i\Delta t)\mathring{g}((i+1)\Delta t)).$$

2. Определяется значение относительной погрешности отсчетов $g(i\Delta t)$ как отношение дисперсии помехи $D_\varepsilon$ к дисперсии суммарного сигнала $D_g$:

$$\lambda_{\text{отн}} = \frac{D_\varepsilon}{D_g},$$

где $D_g = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathring{g}^2(i\Delta t)$.

3. При реализации алгоритмов (4), (5) в процессе вычисления сумм

$$\sum_{i=1}^{N}\mathring{g}(i\Delta t)\cos n\omega(i\Delta t), \qquad \sum_{i=1}^{N}\mathring{g}(i\Delta t)\sin n\omega(i\Delta t)$$

одновременно определяются средние значения произведений

$$\Pi = \overline{\mathring{g}(i\Delta t)\cos n\omega(i\Delta t)}, \qquad \Pi = \overline{\mathring{g}(i\Delta t)\sin n\omega(i\Delta t)}$$

и средние значения положительных

$$\Pi^+ = \overline{\mathring{g}(i\Delta t)\cos n\omega(i\Delta t)}^{\,+}, \qquad \Pi^+ = \overline{\mathring{g}(i\Delta t)\sin n\omega(i\Delta t)}^{\,+}$$

и отрицательных

$$\Pi^- = \overline{\mathring{g}(i\Delta t)\cos n\omega(i\Delta t)}^{\,-}, \qquad \Pi^- = \overline{\mathring{g}(i\Delta t)\sin n\omega(i\Delta t)}^{\,-}$$

произведений, а также их количества, т. е. $N$, $N^+$, $N^-$ и разность $\Delta N = N^+ - N^-$.

4. Если $N^+ = N^-$ и $\Pi^+ = \Pi^-$, то, учитывая, что составляющие погрешности сумм положительных и отрицательных произведений уравновешиваются, рекомендуется применение алгоритма (5).

5. Если $N^+ > N^-$ и $\Pi^+ = \Pi^-$ или $N^+ < N^-$ и $\Pi^+ = \Pi^-$, то величина улучшения робастности определяется по формулам:

$$\lambda^R_{a_n} = (N^+_{a_n} - N^-_{a_n})\lambda_{\text{отн}}\overline{g(i\Delta t)\cos n\omega(i\Delta t)},$$

$$\lambda^R_{b_n} = (N^+_{b_n} - N^-_{b_n})\lambda_{\text{отн}}\overline{g(i\Delta t)\sin n\omega(i\Delta t)}.$$

6. Если $N^+ > N^-$ и $\Pi^+ > \Pi^-$ или $N^+ < N^-$ и $\Pi^+ > \Pi^-$, то величина улучшения робастности определяется по формулам:

$$\lambda^R_{a_n} = (N^+_{a_n} - N^-_{a_n})\lambda_{\text{отн}}\overline{g(i\Delta t)\cos n\omega(i\Delta t)^+},$$

$$\lambda^R_{b_n} = (N^+_{b_n} - N^-_{b_n})\lambda_{\text{отн}}\overline{g(i\Delta t)\sin n\omega(i\Delta t)^+}.$$

7. Если $N^+ > N^-$ и $\Pi^+ < \Pi^-$ или $N^+ < N^-$ и $\Pi^+ < \Pi^-$, то величина улучшения робастности определяется по формулам:

$$\lambda^R_{a_n} = (N^+_{a_n} - N^-_{a_n})\lambda_{\text{отн}}\overline{g(i\Delta t)\cos n\omega(i\Delta t)^-},$$

$$\lambda^R_{b_n} = (N^+_{b_n} - N^-_{b_n})\lambda_{\text{отн}}\overline{g(i\Delta t)\sin n\omega(i\Delta t)^-}.$$

8. Если выполняются условия пп. 5–7, то, используя найденные величины уравновешивания $\lambda^R_{a_n}$, $\lambda^R_{b_n}$, можно определить робастные оценки коэффициентов ряда Фурье по формулам:

$$\begin{aligned} a^R_n &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathring{g}(i\Delta t)\cos n\omega(i\Delta t) - \lambda^R_{a_n}, \\ b^R_n &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathring{g}(i\Delta t)\sin n\omega(i\Delta t) - \lambda^R_{b_n}. \end{aligned} \tag{7}$$

**Анализ результатов вычислительного эксперимента.** Для определения эффективности применения предложенной робастной технологии вычисления оценок коэффициентов ряда Фурье проведены соответствующие вычислительные эксперименты. При этом они проводились с сигналами, сформированными путем суммирования ряда косинусоид и синусоид. Например, для случая $x(t)=10\cos t+20\cos 3t+30\cos 5t+15\sin t+25\sin 2t-20\sin 4t+35$ определялись оценки коэффициентов $a_n$, $b_n$. Затем они суммировались с помехой $\varepsilon(t)$ с заданной дисперсией $D_\varepsilon$ и для полученного суммарного сигнала $g(t)$ определялись оценки коэффициентов ряда Фурье с помощью традиционных алгоритмов (2), (5) и с помощью робастных алгоритмов (7).

Далее в табл. 1–4 приводятся результаты этого вычислительного эксперимента с применением указанных алгоритмов, где величина помехи $\varepsilon(t)$ выбрана так, что суммарный сигнал $g(t)$ получился в виде выбросов, для которых обеспечение робастности искомых оценок значительно трудней, чем для незначительно искаженных сигналов. Эксперименты показали, что даже для приведенных «неприятных» случаев с применением рассматриваемой технологии обработки сигналов достигается значительное улучшение робастности полученных результатов. Из сравнения оценок, полученных при $D_\varepsilon=130{,}055$, $\lambda_{отн}=0{,}253$ и $D_\varepsilon=32{,}114$, $\lambda_{отн}=0{,}141$, очевидно, что робастные оценки $a_n^R$ и $b_n^R$ близки к истинным оценкам $a_n$, $b_n$ и при указанных резких изменениях диапазона дисперсии помехи они изменились незначи-

Таблица 1

| $n$ | $\omega$ | $a_n$ | $a_n^\bullet$ | $a_n^R$ | $\Delta N$ | $\Sigma$ | $\Sigma^+$ | $\Sigma^-$ | $\Pi^+$ | $\Pi^-$ | Выявленная помеха |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,000 | –0,000 | 0,000 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,000 |
| 25 | $\pi/100$ | 10,010 | 11,176 | 9,837 | 450 | 27940,402 | 78824,67 | 50884,41 | 28,926 | 22,367 | 3296,730 |
| 50 | $2\pi/100$ | 0,020 | 0,954 | 0,013 | 256 | 2383,933 | 64890,85 | 62507,00 | 24,692 | 26,352 | 1600,934 |
| 75 | $3\pi/100$ | 20,000 | 23,977 | 18,982 | 1622 | 59942,184 | 100649,34 | 40707,14 | 30,398 | 24,101 | 12487,567 |
| 100 | $4\pi/100$ | –0,130 | –1,549 | –0,189 | –550 | –3873,065 | 63854,98 | 67728,01 | 28,699 | 24,406 | –3399,721 |
| 125 | $5\pi/100$ | 30,000 | 35,628 | 28,853 | 2174 | 89070,086 | 110348,99 | 21278,91 | 30,764 | 15,059 | 16938,377 |

Таблица 2

| $n$ | $\omega$ | $b_n$ | $b_n^\bullet$ | $b_n^R$ | $\Delta N$ | $\Sigma$ | $\Sigma^+$ | $\Sigma^-$ | $\Pi^+$ | $\Pi^-$ | Выявленная помеха |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,000 | –0,000 | 0,000 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,000 |
| 25 | $\pi/100$ | 15,000 | 17,75 | 14,913 | 1024 | 44367,03 | 81997,61 | 37630,65 | 27,31 | 19,03 | 7083,791 |
| 50 | $2\pi/100$ | 25,000 | 29,46 | 24,093 | 1847 | 73641,44 | 97576,13 | 23934,63 | 28,67 | 15,37 | 13408,993 |
| 75 | $3\pi/100$ | –0,130 | –0,41 | –0,174 | –108 | –1028,90 | 54321,50 | 55350,40 | 22,29 | 21,75 | –594,884 |
| 100 | $4\pi/100$ | –20,00 | –24,30 | –19,663 | –1665 | –60740,66 | 29733,06 | 90473,76 | 18,25 | 27,47 | –11582,133 |
| 125 | $5\pi/100$ | –0,050 | 1,48 | 0,040 | 513 | 3694,92 | 61330,82 | 57635,90 | 22,60 | 26,19 | 2936,038 |

Таблица 3

| $n$ | ω | $a_n$ | $a_n^*$ | $a_n^R$ | $\Delta N$ | Σ | $\Sigma^+$ | $\Sigma^-$ | $\Pi^+$ | $\Pi^-$ | Выявленная помеха |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,000 | –0,000 | 0,000 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,000 |
| 25 | π/100 | 10,010 | 10,592 | 9,930 | 450 | 26480,750 | 70998,695 | 44517,949 | 26,045 | 19,577 | 1654,777 |
| 50 | 2π/100 | 0,020 | 0,487 | 0,071 | 256 | 1218,594 | 57259,090 | 56040,555 | 21,780 | 23,636 | 789,860 |
| 75 | 3π/100 | 20,000 | 21,990 | 19,465 | 1622 | 54974,438 | 91222,469 | 36248,191 | 27,510 | 21,525 | 6310,794 |
| 100 | 4π/100 | –0,130 | –0,788 | –0,080 | –550 | –1969,242 | 57819,01 | 59788,246 | 26,210 | 21,399 | –1768,656 |
| 125 | 5π/100 | 30,000 | 32,813 | 29,386 | 2174 | 82033,570 | 99761,273 | 17727,791 | 27,711 | 12,663 | 8569,567 |

Таблица 4

| $n$ | ω | $b_n$ | $b_n^*$ | $b_n^R$ | $\Delta N$ | Σ | $\Sigma^+$ | $\Sigma^-$ | $\Pi^+$ | $\Pi^-$ | Выявленная помеха |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,000 | –0,000 | 0,000 | 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 25 | π/100 | 15,000 | 16,372 | 14,934 | 1024 | 40929,406 | 73176,594 | 32247,111 | 24,255 | 16,427 | 3593,470 |
| 50 | 2π/100 | 25,000 | 27,227 | 24,556 | 1847 | 68068,414 | 87641,680 | 19573,324 | 25,754 | 12,563 | 6679,158 |
| 75 | 3π/100 | –0,130 | –0,218 | –0,102 | –108 | –545,350 | 47336,379 | 47881,758 | 19,432 | 18,807 | –290,791 |
| 100 | 4π/100 | –20,00 | –22,148 | –19,836 | –1665 | –55371,070 | 25269,836 | 80640,859 | 15,608 | 24,407 | –5780,849 |
| 125 | 5π/100 | –0,050 | 0,713 | 0,045 | 513 | 1782,099 | 53253,773 | 51471,754 | 19,507 | 23,557 | 1494,379 |

тельно, т. е. оказались робастными, тогда как оценки по традиционным алгоритмам $a_n^*$, $b_n^*$ содержат большие погрешности и существенно зависят от дисперсии помехи.

Эксперименты также показали, что для технологических параметров, не имеющих резких выбросов, предложенные алгоритмы могут в гораздо большей степени улучшить робастность искомых оценок.

**Заключение.** Предложена робастная технология обработки сигналов, позволяющая путем уравновешивания погрешностей суммы положительных и отрицательных произведений между отсчетами анализируемого сигнала и отсчетами косинусоид и синусоид уменьшить погрешности оценок коэффициентов ряда Фурье. Для реализации этой процедуры предложено определять величины уравновешивания указанных погрешностей с использованием отношения дисперсии помехи к дисперсии суммарного сигнала. Учитывая, что реализация предложенных алгоритмов в значительной степени устраняет влияние интенсивности помехи на результаты спектрального анализа, рассматриваемый процесс обработки суммарного сигнала назван робастной технологией спектрального анализа. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили ее эффективность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Макс Ж.** Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983.
2. **Алиев Т. А.** Экспериментальный анализ. М.: Машиностроение, 1991.
3. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф.** Алгоритмы определения дисперсии и погрешностей, вызываемых помехами случайных сигналов // Автометрия. 1997. № 3. С. 80.
4. **Алиев Т. А., Амиров З. А.** Алгоритм выбора параметров регуляризации при статистической идентификации // АиТ. 1998. № 6. С. 130.

*Институт кибернетики АН Азербайджана,*
*E-mail: cyber@lan.ab.az*

*Поступила в редакцию*
*10 января 1999 г.*