РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 5 2001

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 007 : 681.3.06

В. Я. Пивкин

(Новосибирск)

НЕЧЕТКИЕ *D*-МОДЕЛИ. Ч. I. СТРУКТУРА, СИНТЕЗ, СВОЙСТВА, ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Рассматривается класс нечетких моделей, названных *D*-моделями, поскольку их синтез основан на дискретизации областей значений входов и выходов моделируемого процесса. Структура и этапы синтеза *D*-модели представлены на примере MISO (multi-input/single-output) моделей для случая, когда областями значений параметров исследуемого процесса являются отрезки действительной оси. Показана непрерывность реализуемых моделями функций при условии непрерывности функций фазификации входов. Предложен критерий анализа связности подпространств непрерывных входов, соответствующих совокупностям дискретных входов. Исследованы возможности использования моделей для локализации решений оптимизационных задач, возникающих при эксплуатации объекта.

Введение. Нечеткие модели являются в настоящее время одним из распространенных средств представления знаний, в том числе и инструментом для описания трудноформализуемых взаимозависимостей между параметрами исследуемых процессов и объектов [1].

Чаще всего при построении модели используются экспертные методы синтеза, базирующиеся на основополагающем понятии лингвистической переменной, введенном Л. Заде в [2], и на лингвистическом описании моделируемого процесса в виде системы правил, связывающих значения лингвистических переменных. В промышленных приложениях такие методы, благодаря простоте идеи и наличию многочисленных примеров успешного применения, широко используются для создания нечетких систем управления объектами, для которых процесс управления может быть описан совокупностью из нескольких десятков правил, а количество значений лингвистических переменных не превышает 8–15. Однако при описании закона функционирования объекта или комбинаторных взаимозависимостей между его параметрами экспертные модели хотя и отражают качественную картину, но не обладают точностью, необходимой для решения многих задач, возникающих при эксплуатации моделируемого процесса или объекта.

Современные технические системы, как правило, оснащены подсистемами сбора и обработки информации о состоянии их параметров во время эксплуатации или испытаний. Это позволяет ставить вопрос об использовании получаемых данных для исследования функциональных зависимостей между группами параметров и автоматическом построении моделей, их аппроксимирующих. Поскольку экспериментальные данные подвержены ошибкам разной природы, то реальная зависимость не является однозначной и выбор нечетких моделей для ее описания является естественным, а иногда и предпочтительным. Компьютерный синтез моделей по результатам эксперимента в отличие от экспертного позволяет резко увеличить размер модели (до сотен и тысяч входящих в модель правил вывода), довести до нескольких десятков количество градаций, соответствующих при экспертном синтезе значениям лингвистических переменных. За счет этого во многих случаях удается добиться в области эксперимента степени адекватности модели процессу, достаточной для использования построенной модели при решении задач управления процессом или оптимизации его показателей. Но область адекватности компьютерных моделей ограничена областью эксперимента и резко падает вне ее. Поэтому в общем случае представляется целесообразным сочетание в одной модели двух составляющих: подмодели, построенной по экспериментальным данным, полученным в результате испытаний или в процессе эксплуатации объекта, и экспертной подмодели в тех областях значений входов, где эксперимент затруднен или связан с риском.

Известные по литературе, в том числе и рассмотренные в обзоре [3], методы построения нечетких моделей по экспериментальным данным можно условно разделить на две группы. Первая из них базируется на идее эталонных множеств, когда каждое из данных наблюдений с помощью операции импликации порождает первичное нечеткое отношение на множестве нечетких эталонных множеств входов и выходов, а итоговое отношение (модель объекта) в зависимости от выбранного вида импликации задается объединением или пересечением первичных отношений, порождаемых данными наблюдений. Такой подход впервые использован В. Педриксом в [4] и в дальнейшем развивался путем расширения видов используемых импликаций.

Другой тип моделей основан на идее вывода, предложенной Т. Такаги и М. Сугено в [5]. Модель состоит из совокупности правил. Каждое правило в левой части задает нечеткую подобласть значений входов, а в правой – линейную функцию значения выхода от значений входа из подобласти, задаваемой левой частью. Вывод значения выхода для заданного входа производится с учетом значений функции принадлежности входа нечетким подобластям, задаваемым левыми частями правил. В отличие от метода эталонных множеств, где правила формируются на основе предварительно выбранных эталонов, в методе Сугено – Такаги разбиение областей значений входов формируется по ходу работы алгоритма синтеза модели с учетом особенностей аппроксимируемой функции.

Естественно, что каждый из рассмотренных типов моделей обладает своими достоинствами и недостатками и своей сферой эффективной применимости. Поэтому в связи с постоянным ростом интереса к нечетким моделям возрастает актуальность создания новых типов моделей, расширяющих возможности альтернативного выбора.

Цель настоящей работы – исследование функциональных свойств и прикладных возможностей нечетких моделей, метод компьютерного синтеза которых (в более общей постановке) предложен автором в [6]. Метод основан на дискретизации исходных экспериментальных данных, построении на их основе дискретной модели (в виде нечеткого отношения), аппроксимирующей функциональную зависимость между дискретными переменными, и возвращении к моделям с непрерывными входами и выходом на основе операций фазификации входов, нечеткой композиции и дефазификации выхода дискретной модели. По структуре рассматриваемые модели аналогичны моделям, построенным методом эталонных множеств, однако при их синтезе исключены операции импликации, являющиеся основой построения итогового нечеткого отношения модели в методе эталонных множеств. Вместо операций импликации использована процедура построения нечетких множеств по статистическим данным, что позволило, в частности, избежать присущего методам, основанным на импликациях, эффекта накопления в итоговом отношении ошибок, содержащихся в первичных отношениях.

Заметим, что при чтении статьи нет необходимости обращаться к ссылкам, так как она содержит все необходимые для понимания излагаемого материала сведения и определения.

1. **Нечеткие множества, отношения и композиции.** Пусть V – универсальное множество, v – элемент V, а S – некоторое свойство. Обычное (четкое) подмножество A универсального множества V, элементы которого удовлетворяют свойству S, определяется как множество упорядоченных пар $A=\{\mu_A(\mathrm{v})/\mathrm{v}\}$, где $\mu_A(\mathrm{v})$ – характеристическая функция, принимающая значение 1, если v удовлетворяет свойству S, и 0 – в противном случае. Нечеткое подмножество отличается от обычного тем, что для элементов v из V нет однозначного ответа да–нет относительно свойства S. В связи с этим нечеткое подмножество A универсального множества V определяется как множество упорядоченных пар $A=\{\mu_A(\mathrm{v})/\mathrm{v}\}$, где $\mu_A(\mathrm{v})$ – характеристическая функция принадлежности (или просто функция принадлежности), принимающая значения в единичном отрезке $[0, 1]$. Функция принадлежности указывает степень (или уровень) принадлежности элемента v подмножеству A. Заметим, что нечеткие подмножества общепринято называть нечеткими множествами.

Величина $\sup\limits_{\mathrm{v}\in V}\mu_A(\mathrm{v})$ называется высотой нечеткого множества A. Нечеткое множество нормально, если его высота равна 1. Нечеткое множество A пусто, если $\mu_A(\mathrm{v})=0$ для всех v из V. Носителем нечеткого множества A называется обычное подмножество универсума V со свойством $\mu_A(\mathrm{v})>0$. Нечеткое множество A, заданное на упорядоченном универсуме V, выпукло, если выполняется условие: $\mu_A(\mathrm{v})\geq\min(\mu_A(\mathrm{v}'),\mu_A(\mathrm{v}''))$ для любых $\mathrm{v}'\leq\mathrm{v}\leq\mathrm{v}''$ из V.

Нечетким отношением R между множествами V и U называется функция $R:(V\times U)\rightarrow[0,1]$, которая ставит в соответствие каждой паре $(\mathrm{v},u)\in(V\times U)$ величину $\mu_R(\mathrm{v},u)\in[0,1]$. Очевидно, нечеткое отношение R для каждого $\mathrm{v}\in V$ определяет на U нечеткое множество $\tilde{U}(\mathrm{v})$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{U}(\mathrm{v})}(u)=\mu_R(\mathrm{v},u)$. Таким образом, нечеткое отношение R задает отображение множества V на подмножество нечетких множеств, определенных на универсуме U, т. е. является нечеткой функцией четкого аргумента.

Пусть A – некоторое нечеткое множество, заданное на V, т. е. определена функция принадлежности $\mu_A(\mathrm{v})$ для всех v из V. Нечеткой композицией $A\circ R$ называется операция, в результате которой нечеткое множество A и нечеткое отношение R индуцируют в U нечеткое подмножество $B=A\circ R$ с функцией принадлежности $\mu_B(u)$. В практических приложениях чаще всего используются следующие виды композиции:

$$\mu_B(u) = \sup_{v \in V} \min(\mu_A(v), \mu_R(v, u)) - \text{max-min композиция} \tag{1.1}$$

или

$$\mu_B(u) = \sup_{v \in V} (\mu_A(v) \cdot \mu_R(v, u)) - \text{max-prod композиция.} \tag{1.2}$$

Нечеткая композиция задает отображение fcomp: $F(V) \to F(U)$ пространства $F(V)$ нечетких множеств, определенных на универсуме V, на пространство $F(U)$ нечетких множеств, определенных на универсуме U, т. е. является нечеткой функцией нечеткого аргумента.

Пусть множества V и U конечны, т. е. $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ и $U = \{u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_q\}$. В этом случае нечеткие множества, определенные на универсумах V и U, представимы p- и q-мерными векторами соответственно, а пространства $F(V)$ и $F(U)$ нечетких множеств, определенных на универсумах V и U, изометричны p- и q-мерному единичным кубам соответствующих евклидовых пространств.

Нечеткое отношение R между конечными V и U как нечеткая функция $R(v)$ описывается совокупностью правил:

$$\text{«если } v \text{ есть } v_i, \text{ то } \tilde{U}(v) \text{ есть } \tilde{U}(v_i)\text{»}, \quad i = \overline{1, p}, \tag{1.3}$$

либо представляется матрицей $\|\mu_R(v_i, u_j)\|$ размера $p \times q$, в которой $\mu_R(v_i, u_j) = \mu_{\tilde{U}(v_i)}(u_j)$.

2. **Нечеткие D-модели. Структура, свойства, основные этапы построения и вывода.** *Постановка задачи.* Рассмотрим структуру и этапы синтеза D-модели на примере построения MISO (multi-input/single-output) D-модели для случая, когда областями значений параметров исследуемого процесса являются отрезки действительной оси. Пусть исследуемый процесс или объект характеризуется набором $\Omega = \{Y, X_1, \ldots, X_k\}$ параметров, областями значений которых являются замкнутые интервалы $I(Y), I(X_1), \ldots, I(X_k)$ действительной оси. Предполагается наличие неизвестной функциональной зависимости значений параметра Y от значений параметров $X_1, \ldots, X_k$. Параметр Y будем называть выходом, а параметры из $X = \{X_1, \ldots, X_k\}$ – входами моделируемого процесса или объекта. Естественно, рассматриваемые параметры могут не являться физическими входами и выходом, важно лишь то, что их можно считать входами и выходом некоторого «черного ящика», реализующего предполагаемую зависимость.

Пусть экспериментальные данные, полученные в процессе испытаний или эксплуатации объекта, представлены совокупностью временных рядов $\Psi(\Omega) = \{y(j), x_1(j), \ldots, x_k(j)\}$ значений входов и выхода, наблюдаемых в моменты времени j, $j = \overline{1, N}$, и значение $y(j)$ выхода Y на такте времени j зависит от значений входа $x(j) = (x_1(j), \ldots, x_k(j))$. Совокупность $\Psi(\Omega)$ в дальнейшем будем называть исходными экспериментальными данными или данными наблюдений.

Процесс построения нечеткой D-модели исследуемого процесса включает в себя следующие составляющие:

– дискретизация областей значений параметров;

– построение нечеткого отношения между дискретными значениями входов и выхода;

– фазификация непрерывных значений входов;

– моделирование функциональной зависимости нечеткими композициями;

– дефазификация нечетких значений выхода.

Дискретизация областей значений параметров. В результате дискретизации каждая область значений входов $I(X_j)$, $j=\overline{1,k}$, разбивается на n_j непересекающихся полуоткрытых и замкнутых интервалов, кодируемых в порядке их расположения в $I(X_j)$ целыми числами из множества $V_j=\{1,\dots,n_j\}$. При этом k-мерное подпространство $I(X)=I(X_1)\times\dots\times I(X_k)$ значений входа разбивается на множество непересекающихся подобластей $V=V_1\times\dots\times V_k$, кодируемых k-мерными целочисленными векторами $\mathrm{v}=(\mathrm{v}^1,\dots,\mathrm{v}^k)$, где $\mathrm{v}^j\in V_j$, $j=\overline{1,k}$. Область значений выхода $I(Y)$ представляется множеством U из q непересекающихся интервалов, кодируемых их номерами также в порядке расположения в $I(Y)$. Подобласти v из V условимся называть дискретными входами, а интервалы u_j, $j=\overline{1,q}$, из U – дискретными выходами для дискретизации $D(\Omega)$.

Нечеткое отношение между дискретными значениями входов и выхода. Пусть V_{mod} – подмножество входов из V, задающее область определения D-модели. Идентификация нечеткого отношения R: $(V_{\mathrm{mod}}\times U)\to[0,1]$ между входами из $V_{\mathrm{mod}}=(\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_p)$ и выходами из $U=\{u_1,u_2,\dots,u_q\}$ является одним из основных этапов синтеза модели. При этом используется представление отношения R совокупностью правил:

$$«\text{если v есть } \mathrm{v}_i, \text{ то } \tilde{U}(\mathrm{v}) \text{ есть } \tilde{U}(\mathrm{v}_i)», \quad i=\overline{1,p},$$

а задача его построения содержательно сводится к следующей: для каждого v_i из V_{mod} определить на универсуме U нечеткое множество $\tilde{U}(\mathrm{v}_i)$, функция принадлежности $\mu_{\tilde{U}(\mathrm{v}_i)}(u_j)$ которого указывает возможность принадлежности значения выхода исследуемого процесса интервалу u_j при условии, что значения входов принадлежат подобласти v_i. Нечеткие множества $\tilde{U}(\mathrm{v}_i)$ должны удовлетворять естественным для нечеткой функциональной зависимости требованиям нормальности и выпуклости.

Задача построения функций принадлежности нечетких множеств по экспертным оценкам или статистическим данным относится к числу хорошо исследованных и алгоритмически обеспеченных задач теории нечетких множеств [7, 8]. При экспертном синтезе область определения модели определяется экспертом, после чего на основании его знаний об исследуемом процессе для каждого v_i из V_{mod} формируется нечеткое множество $\tilde{U}(\mathrm{v}_i)$.

Задача синтеза нечеткого отношения R: $(V_{\mathrm{mod}}\times U)\to[0,1]$ по экспериментальным данным $\Psi(D(\Omega))$ следующим образом сводится к совокупности задач построения функций принадлежности нечетких множеств по статистическим данным [6]. Дискретизация $D(\Omega)$ преобразует $\Psi(\Omega)$ в совокупность целочисленных временных рядов $\Psi(D(\Omega))=\{u(j),\mathrm{v}^1(j),\dots,\mathrm{v}^k(j)\}$, $j=\overline{1,N}$, с конечными областями значений $U, V_1,\dots,V_k$. На такте j данные наблюдений $\Psi(D(\Omega))$ образуют вектор $S(j)=(u(j), \mathrm{v}(j))$, состоящий из выхода $u(j)$ и вектора входов $\mathrm{v}(j)=(\mathrm{v}^1(j),\ldots,\mathrm{v}^k(j))$.

При построении модели по экспериментальным данным область ее определения задается множеством векторов входов $V_{\text{mod}}=(\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_p)$, образующих множество значений элементов последовательности $\{\mathrm{v}(j)\}$, $j=\overline{1,N}$.

Каждому v_i, $i=1,\ldots,p$, из V_{mod} соответствует подпоследовательность U_i значений выхода $u(j)$ из $\Psi(D(\Omega))$ таких, что $S(j)=(u(j),\mathrm{v}_i)$. Подпоследовательность U_i можно рассматривать как реализацию нечеткого множества $\widetilde{U}(\mathrm{v}_i)$. Обозначим через $U_{\text{dis}}(\mathrm{v}_i)$ q-мерный вектор распределения частот значений выходов в U_i. Условием существования нечеткой функциональной зависимости между значениями входов и выхода для данных $\Psi(D(\Omega))$ является концентрация значений выхода в каждой из U_i в окрестности некоторого среднего. При его выполнении по распределению $U_{\text{dis}}(\mathrm{v}_i)$ одним из способов построения нечетких множеств по статистическим данным строится выпуклое нормальное нечеткое множество $\widetilde{U}(\mathrm{v}_i)$, определенное на универсуме U.

Совокупность $\{\widetilde{U}(\mathrm{v}_i)\}$, $i=\overline{1,p}$, определяет нечеткое отношение R: $(V_{\text{mod}}\times U)\to[0,1]$ с функцией принадлежности $\mu_R(\mathrm{v}_i,u_j)=\mu_{\widetilde{U}(\mathrm{v}_i)}(u_j)$, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$, задающей для каждого u_j возможность быть значением выхода при входе v_i.

Фазификация четкого входа. Фазификация – операция, определяющая отображение fuz: $I(X)\to F(V_{\text{mod}})$ и позволяющая каждому четкому значению входа $x=(x_1,\ldots,x_k)$ из $I(X)$ однозначно поставить в соответствие нечеткое множество $A(x)$ на универсуме V_{mod}, отражающее степень близости x к четким подобластям $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_p$ из $I(V_{\text{mod}})$.

Напомним, что в результате дискретизации каждая область значений входов $I(X_j)$, $j=\overline{1,k}$, разбивается на множество интервалов $V_j=\{1,\ldots,n_j\}$. Для интервалов из V_j определим на $I(X_j)$ нечеткие множества $W(j,m)$, $m=\overline{1,n_j}$, такие, что их функции принадлежности $\mu_{W(j,m)}(x_j)$ непрерывны, выпуклы и равны единице на интервале m (например, трапециевидные в середине и полутрапециевидные по краям интервала $I(X_j)$).

Тогда для входа $x=(x_1,\ldots,x_k)$ из $I(X)$ и подобласти $\mathrm{v}=(\mathrm{v}^1,\ldots,\mathrm{v}^k)$ из V_{mod} значения функции принадлежности $\mu_{A(x)}(\mathrm{v})$ нечеткого множества $A(x)$ на v определяются по формуле:

$$\mu_{A(x)}=\min(\mu_{W(1,\mathrm{v}^1)}(x_1),\mu_{W(2,\mathrm{v}^2)}(x_2),\ldots,\mu_{W(k,\mathrm{v}^k)}(x_k)).$$

Объединение $I(V_{\text{mod}})$ подобластей пространства значений входа, задаваемых векторами $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_p$, будем называть областью определения модели или областью эксперимента в $I(X)$. Объединение $I(\widehat{V}_{\text{mod}})$ подобластей пространства значений входа, задаваемых векторами $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_p$, если их координатам поставить в соответствие вместо интервалов дискретизации входов интервалы, являющиеся носителями соответствующих им нечетких множеств из $\{W(j,m)\}$, назовем расширением области определения модели или расширением области эксперимента.

Отметим основные свойства нечетких множеств $A(x)$ для определенных выше процедур дискретизации областей значений параметров и фазификации непрерывных значений входов.

Свойство 1. Функции принадлежности $\mu_{A(x)}(v_i)$ непрерывны по $x = (x_1, ..., x_k)$ в $I(X)$ для всех v_i из V_{mod}. Утверждение следует из непрерывности функций $\mu_{W(j,m)}(x_j)$, $j = \overline{1,k}$, и непрерывности функции min от непрерывных переменных.

Свойство 2. Отображение fuz: $I(X) \to F(V_{mod})$ непрерывно. Утверждение является очевидным следствием свойства 1.

Свойство 3. При заданных ограничениях на функции принадлежности $\mu_{W(j,m)}(x_j)$ справедливы следующие утверждения:

– $\mu_{A(x)}(v_i) > 0$ для всех $x = (x_1, ..., x_k)$ из $I(\widehat{V}_{mod})$ и всех v_i из V_{mod};

– $\mu_{A(x)}(v_i) = 0$ для всех v_i из V_{mod}, если $x = (x_1, ..., x_k)$ не принадлежит $I(\widehat{V}_{mod})$;

– если вход $x = (x_1, ..., x_k)$ принадлежит $I(V_{mod})$, то в V_{mod} обязательно найдется подобласть v_i такая, что $\mu_{A(x)}(v_i) = 1$, т. е. нечеткое множество $A(x)$ нормально для всех x из $I(V_{mod})$.

Моделирование функциональной зависимости нечеткими композициями. Нечеткое множество $A(x)$ и нечеткое отношение R: $(V_{mod} \times U) \to [0,1]$ в зависимости от выбранного типа композиции (1.1) или (1.2) индуцируют в U нечеткие подмножества $B(x)$ с функциями принадлежности:

$$\mu_{B(x)}(j) = \max_{i=1}^{p} \min(\mu_{A(x)}(v_i), \mu_R(v_i, j)), \quad j = \overline{1,q}, \tag{2.1}$$

при max-min композиции или

$$\mu_{B(x)}(j) = \max_{i=1}^{p} (\mu_{A(x)}(v_i) \cdot \mu_R(v_i, j)), \quad j = \overline{1,q}, \tag{2.2}$$

при max-prod композиции.

Отметим следующие свойства нечетких множеств $B(x)$.

Свойство 4. Для всех x из $I(V_{mod})$ нечеткие множества $B(x)$, построенные с использованием операций (2.1), (2.2), имеют равные единице высоты, т. е. являются нормальными. Утверждение вытекает из нормальности нечетких множеств $A(x)$ и $\widetilde{U}(v_i)$, $i = \overline{1,p}$.

Свойство 5. Поскольку функции max, min и prod от непрерывных переменных непрерывны, то по теореме о суперпозиции непрерывных функций функции $\mu_B(u_j)$, $i = \overline{1,q}$, задаваемые формулами (2.1), (2.2), являются непрерывными от переменных $\mu_A(v_1), \mu_A(v_2), ..., \mu_A(v_p)$.

Свойство 6. Нечеткие max-min и max-prod композиции (2.1) и (2.2) реализуют непрерывные отображения fcomp: $F(V_{mod}) \to F(U)$ пространства $F(V_{mod})$ нечетких множеств, определенных на универсуме V_{mod}, на пространство $F(U)$ нечетких множеств, определенных на универсуме U. Утверждение является очевидным следствием свойства 5.

Заметим, что каждому нечеткому множеству $B(x)$, определенному на U, однозначно соответствует нечеткое множество $\widetilde{B}(x)$ на $I(Y)$ с функцией принадлежности, равной $\mu_{B(x)}(j)$ для всех y из j-го интервала дискретизации $I(Y)$.

Очевидно, что действие нечетких композиций и свойство их непрерывности распространяются и на входы из $I(\widehat{V}_{\text{mod}})\backslash I(V_{\text{mod}})$, однако нечеткие множества $B(x)$, построенные для таких входов с использованием операций (2.1), (2.2.), имеют высоты, меньшие единицы и убывающие с ростом расстояния значений входа от области эксперимента $I(V_{\text{mod}})$, что, естественно, сопровождается увеличением нечеткости множеств $B(x)$.

Дефазификация нечетких значений выхода. Дефазификация – операция, определяющая отображение defuz: $F(U) \to Y$ и позволяющая каждому непустому нечеткому множеству $B(x)$ на U однозначно поставить в соответствие четкое значение $y(x)$ из $I(Y)$.

Для получения четкого значения выхода по непустому нечеткому множеству $B(x)$ используем, например, известный способ центра тяжести. Обозначим через $y_1, \ldots, y_q$ центры интервалов дискретизации выхода модели. Тогда четким значением выхода является величина

$$y(x) = \frac{\sum\limits_{j \in U} y_j \mu_{B(x)}(j)}{\sum\limits_{j \in U} \mu_{B(x)}(j)}. \tag{2.3}$$

Отметим очевидную непрерывность отображения defuz: $F(U) \to Y$ для непустых $B(x)$, т. е. удовлетворяющих условию $\sum\limits_{j \in U} \mu_{B(x)} > 0$. Заметим, что $B(x)$ по построению не пусто для любого x из $I(V_{\text{mod}})$ и $I(\widehat{V}_{\text{mod}})$. Следует иметь в виду, что $B(x)$ пусто для всех x, не входящих в $I(\widehat{V}_{\text{mod}})$ или принадлежащих его границам.

Формирование модели и организация процедуры вывода. Будем говорить, что модель сформирована, если построено нечеткое отношение R: $(V_{\text{mod}} \times U) \to [0,1]$, определены и реализованы процедуры дискретизации, фазификации, нечеткой композиции и дефазификации. Выделим два типа D-модели с непрерывными входами, различающиеся видом нечеткой композиции: модель M_{mm} (при max-min композиции) и модель M_{mp} (при max- prod композиции). Процедура вывода каждой из моделей реализует последовательность операций $x \xrightarrow{\text{fuz}} A(x) \xrightarrow{\text{fcomp}} B(x) \xrightarrow{\text{defuz}} y(x)$, моделирующую в части $x \xrightarrow{\text{fuz}} A(x) \xrightarrow{\text{fcomp}} B(x)$ функциональную зависимость между четкими значениями входов из $I(X)$ и нечеткими значениями выхода на дискретном универсуме U, а после операции дефазификации $B(x) \xrightarrow{\text{defuz}} y(x)$ – функциональную зависимость между четкими значениями входа и четкими значениями выхода из $I(Y)$.

Непрерывность D-моделей в $I(V_{\text{mod}})$. Из свойства непрерывности отображений fuz: $I(X) \to F(V_{\text{mod}})$, fcomp: $F(V_{\text{mod}}) \to F(U)$ и defuz: $F(U) \to Y$ следует непрерывность в $I(V_{\text{mod}})$ сформированных выше моделей с выходом из $I(Y)$. Таким образом, модели M_{mm} и M_{mp} реализуют непрерывные в $I(V_{\text{mod}})$ функции $y(x)$ от входов $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $x \in I(V_{\text{mod}})$, со значениями функций в интервале $I(Y)$, а также непрерывные в $I(V_{\text{mod}})$ отображения со значениями в пространстве нечетких подмножеств $B(x)$ универсума U и в пространстве нечетких подмножеств $\widetilde{B}(x)$ универсума $I(Y)$.

Заметим, что свойство непрерывности выполняется также для подпространства $I(\widehat{V}_{\text{mod}})$. Однако при компьютерной реализации модели следует иметь в виду возможность эффекта «деление на нуль» для входов, близких к границам $I(\hat{V}_{\text{mod}})$. Поэтому при эксплуатации моделей целесообразно перед операцией дефазификации проводить проверку выполнения условия $\sum_{j \in U} \mu_{B(x)}(j) \geq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Сравнительное исследование влияния входных параметров на функционирование объекта по данным наблюдений $\Psi(\Omega)$ *и выбор размеров дискретизаций параметров.* Выше мы рассмотрели основные этапы синтеза моделей при выбранных дискретизациях параметров. Дискретизацию параметра будем называть дискретизацией размера n, если она заключается в разбиении интервала значений этого параметра на n интервалов, и равномерной – в случае разбиения на интервалы равной длины. Одним из путей уменьшения размеров моделей при сохранении их эффективности является выбор размеров дискретизаций входов с учетом их существенности, т. е. степени влияния каждого из входных параметров на выход. В связи с этим возникает задача сравнительного исследования степени влияния на функционирование объекта входных параметров по имеющимся данным $\Psi(\Omega)$, особенно в случаях, когда невозможно или затруднено планирование эксперимента.

Рассматриваемый эвристический подход ориентирован на случай синтеза моделей на основе равномерных дискретизаций и проводится с использованием (0, 1)-матриц изменений. Матрица изменений $M(D(\Omega))$ строится на основе $\Psi(D(\Omega))$ и содержит $(N-1)$ строк при числе столбцов, равном количеству параметров модели. При этом размеры дискретизаций входов выбираются равными. Если j-е элементы векторов S_n и S_{n+1}, $n=\overline{1, N-1}$, данных наблюдений совпадают, то j-й элемент n-й строки матрицы $M(D(\Omega))$ равен нулю, в противном случае – единице. Первый столбец матрицы отражает динамику изменений выхода $u(j)$, остальные – динамику изменений входов (компонент вектора $v(j)$) при изменении j от 1 до N. Обозначим через ω число строк, содержащих единицу в первом столбце и хотя бы одну единицу в остальных столбцах матрицы. Для каждого параметра X_i модели определим величину ω_i, $i=\overline{1,k}$, равную числу строк матрицы $M(D(\Omega))$, имеющих единицу в первом столбце и одновременно единицу в столбце, соответствующем этому параметру.

Выбор размеров дискретизаций входов X_i, $i=\overline{1,k}$, осуществляется пропорционально величинам ω_i/ω и основан на предположении, что при равных для всех входов размерах дискретизаций совокупность относительных частот $\{\omega_i/\omega\}$ отражает распределение степеней влияния каждого из параметров объекта на его функционирование для рассматриваемой дискретизации $D(\Omega)$. Анализ проводится на конечном множестве Ξ равномерных дискретизаций с размерами в диапазоне от 7–8 до нескольких десятков.

3. **Локализация решений оптимизационных задач в области определения моделей.** *Постановка задач.* Перед человеком, управляющим сложным объектом или процессом, стоит трудная задача выбора значений управляющих параметров, максимизирующих или минимизирующих какой-либо показатель процесса, причем ряд других параметров или показателей должен оставаться в заданных пределах. Рассмотрим вопросы использования нечетких моделей M_{mm} и M_{mp} при решении оптимизационных задач в подпространстве $I(V_{\text{mod}})$, являющемся объединением подобластей пространства значений входа, задаваемых векторами $v_1, \ldots, v_p$. Заметим, что из свойства

непрерывности моделей следует, что при их использовании для решения оптимизационных задач необходимо, чтобы моделируемая функциональная зависимость в области поиска не содержала разрывов, т. е. была гипотетически непрерывной. Как правило, процессы с непрерывными входами и выходом удовлетворяют данному условию. Отметим также, что предсказанное моделью для входа $x = (x_1, \ldots, x_k)$ значение выхода $y(x)$ в общем случае не совпадает с реализованным процессом значением, т. е. вместо «равно» имеет смысл «около». Поэтому получаемые с использованием модели решения оптимизационных задач в приложении к реальному процессу являются заведомо приближенными.

Входные параметры будем делить на следующие типы: управляемые – входные параметры, выбор значений которых является задачей оптимизации; ситуационные – параметры, значения которых определяются текущей ситуацией и считаются заданными.

Множество управляемых параметров обозначим через Ω_c, а множество ситуационных – через Ω_s. Ситуация описывается вектором S значений ситуационных параметров. Дискретизация ситуации – формирование целочисленного вектора $D(S)$, получаемого из S заменой значений ситуационных параметров номерами соответствующих интервалов их дискретизаций. Будем говорить, что ситуация находится в области определения модели, если значения входных компонент вектора $D(S)$ удовлетворяют условиям хотя бы одного из правил модели, т. е. совпадают с соответствующими компонентами хотя бы одного из векторов совокупности $V_{\text{mod}} = (\text{v}_1, \ldots, \text{v}_p)$.

Возможны два варианта роли оптимизируемого параметра в модели. В первом оптимизируемый параметр является выходом модели, т. е. его значения являются функцией остальных параметров. Во втором случае оптимизируемый параметр является входом, т. е. аргументом функции реализуемой моделью. Соответственно рассматриваются следующие задачи.

Задача 1. Оптимизируемый параметр является выходом Y. Требуется найти значения управляемых параметров, обеспечивающие наибольшее значение выхода модели при известных значениях ситуационных параметров из Ω_s.

Задача 2. При известных значениях ситуационных входных параметров из Ω_s требуется среди векторов значений управляемых параметров, обеспечивающих заданное значение y_0 выхода модели Y, найти вектор входов с наименьшим значением оптимизируемого параметра X_1.

Идея поиска решений. Одной из распространенных идей выбора оптимальных или близких к оптимальным решений задач оптимизации является отбрасывание вариантов, заведомо не содержащих искомого экстремума и сужение области перспективных вариантов до размеров, допускающих получать близкие к оптимальному решения с использованием нетрудного перебора вариантов. Применительно к рассматриваемым задачам это означает выявление в V_{mod} «неперспективных» дискретных входов и формирование путем их исключения минимального подмножества подобластей непрерывных входов, содержащих искомое решение. Дальнейший поиск осуществляется путем испытаний значений входов из локализованных подобластей с использованием одной из моделей M_{mm} или M_{mp} и выбора среди испытуемых наиболее предпочтительных решений.

Критерий связности подпространств непрерывных входов, соответствующих совокупностям дискретных входов. Пусть V_0 – некоторое множество дискретных входов и $I(V_0)$ – объединение подобластей из V_0. Подпространство $I(V_0)$ является связным, если для любой пары входов x' и x'' из $I(V_0)$ в $I(V_0)$ содержится также некоторая непрерывная кривая, их соединяющая, и несвязным – в противном случае. Рассмотрим вопрос о критерии связности $I(V_0)$.

Подобласти $v_i = (v_i^1, \ldots, v_i^k)$ и $v_n = (v_n^1, \ldots, v_n^k)$ из V_0 назовем смежными, если хэммингово расстояние $\rho(v_i, v_n) = \max\limits_{j=1}^{k} |v_i^j - v_n^j|$ между их векторными представлениями равно 1, т. е. $\rho(v_i, v_n) = 1$. Поскольку нумерация интервалов дискретизаций областей значений входов X_j проводится в порядке их расположения в интервалах $I(X_j)$, то объединение двух смежных интервалов дискретизаций является интервалом и, следовательно, связно. Отсюда следует, что подпространство $I(v_i \cup v_n)$, соответствующее объединению двух смежных подобластей v_i и v_n, является связным.

Определим граф $G(V_0)$, вершинами которого являются подобласти из V_0. Две вершины v' и v'' из V_0 соединены ребром, если и только если они смежны по условию $\rho(v', v'') = 1$.

Справедливо следующее утверждение. Подпространство $I(V_0)$ является связным тогда и только тогда, когда граф $G(V_0)$ связен. Если граф $G(V_0)$ несвязен и представим объединением $\bigcup\limits_{j=1}^{r} G(V_0^j)$ несвязных между собой связных подграфов, то подпространство несвязно и является объединением непересекающихся между собой связных подпространств $I(V_0^1), \ldots, I(V_0^r)$.

Нечеткая оценка интервала значений выхода модели для связных подпространств входов, соответствующих совокупностям дискретных входов. Пусть V_0 – некоторое подмножество V_{mod} такое, что граф $G(V_0)$ связен и, следовательно, подпространство $I(V_0)$ является связным. Поскольку $I(V_0)$ связно и реализуемая моделью функция $y(x)$ непрерывна в $I(V_0)$, то образом $I(V_0)$ в $I(Y)$ является некоторый интервал $Y(V_0)$. Интервал $Y(V_0)$ является объединением $\bigcup\limits_{v_i \in V_0} Y(v_i)$ интервалов $Y(v_i)$, являющихся образами подобластей v_i из $I(V_0)$. Требуется на основе нечеткого отношения $R: (V_{\text{mod}} \times U) \to$ $\to [0,1]$ между дискретными значениями входов и выхода построить нечеткое множество принадлежности интервалов u_j из U интервалу $Y(V_0)$.

Определим на U нечеткое множество $Q(V_0)$ с функцией принадлежности $\mu_{Q(V_0)}(u_j) = \max\limits_{v,\, v \in V_0} \mu_R(v, u_j)$, $j = \overline{1, q}$. Поскольку по построению нечетких множеств $\widetilde{U}(v_i)$, $i = \overline{1, p}$, для каждого v из V_{mod} найдется u_j из U такое, что $\mu_R(v, u_j) = 1$, то высота нечеткого множества $Q(V_0)$ равна 1, т. е. обязательно существует хотя бы один выход u_j из U с функцией принадлежности $\mu_{Q(V_0)}(u_j) = 1$. Обозначим через $u_{\min}$ и $u_{\max}$ наименьший и наибольший из номеров интервалов u_j из U соответственно, для которых $\mu_{Q(V_0)}(u_j) = 1$.

Заметим, что в общем случае в $[u_{\min}, u_{\max}]$ могут встречаться u_j, для которых $\mu_{Q(V_0)}(u_j) < 1$. Поэтому на базе $Q(V_0)$ построим нечеткое множество $\overline{Q}(V_0)$, функция принадлежности которого равна 1 для всех u_i из интервала $[u_{\min}, u_{\max}]$ и равна $\mu_{Q(V_0)}(u_j)$ для u_j, не принадлежащих $[u_{\min}, u_{\max}]$. Нечеткое множество $\overline{Q}(V_0)$ задает для каждого u_j из U возможность $\mu_{\overline{Q}(V_0)}(u_j)$ достижения значения выхода из интервала u_j при входах из $I(V_0)$ и, следовательно, является нечетким приближением интервала $Y(V_0)$.

Локализация областей поиска по соответствию ситуации. На первом этапе независимо от типа решаемой задачи проводится локализация области поиска путем отсечения бесперспективных для заданной ситуации подобластей из V_{mod}. Будем говорить, что подобласть v_i из V_{mod} совместима с ситуацией S, если значения ситуационных координат вектора v_i совпадают с соответствующими координатами вектора $D(S)$. Очевидно, что подобласти, несовместимые с ситуацией S, не содержат искомых решений и исключаются из процедуры поиска. Подмножество подобластей из V_{mod}, совместимых с ситуацией S, обозначим через V_{sit}.

Локализация области поиска решений задачи 1 с использованием нечеткого отношения модели. Обозначим через $U_1(V_{\mathrm{sit}})$ множество дискретных значений выхода таких, что выход u_i принадлежит $U_1(V_{\mathrm{sit}})$, если и только если в V_{sit} существует дискретный вход v, для которого $\mu_R(\mathrm{v}, u_i) = 1$. Поскольку для каждого v из V_{mod} найдется u_j из U такое, что $\mu_R(\mathrm{v}, u_j) = 1$, то множество $U_1(V_{\mathrm{sit}})$ непустое. Пусть $u_{\max}$ – наибольшее из дискретных значений выхода из $U_1(V_{\mathrm{sit}})$, т. е. $u_{\max} = \max\limits_{\mu(\mathrm{v},\, u_j) = 1,\ \mathrm{v} \in V_{\mathrm{sit}}} u_j$.

Будем считать бесперспективными и подлежащими исключению из области поиска оптимальных решений все подобласти v_i из V_{sit}, для которых выполняется условие $\mu_R(\mathrm{v}_i, u_{\max}) < 1$. Множество дискретных входов из V_s, для которых $\mu_R(\mathrm{v}, u_{\max}) = 1$, обозначим через V^1_{opt}.

Каждому v_i из V^1_{opt} по аналогии с операцией (2.3) дефазификации нечетких значений выхода поставим в соответствие величину

$$\widetilde{y}(\mathrm{v}_i) = \frac{\sum\limits_{j \in U} y_j \mu_{\widetilde{U}(\mathrm{v}_i)}(j)}{\sum\limits_{j \in U} \mu_{\widetilde{U}(\mathrm{v}_i)}(j)},$$

где $y_1, \ldots, y_q$ – центры интервалов дискретизации выхода Y.

Таким образом, для задачи 1 локализована минимальная совокупность дискретных входов V^1_{opt}, обеспечивающих наибольшее значение возможности получения максимального значения дискретного выхода среди допустимых в ситуации S дискретных входов, и для каждой подобласти v_i из V^1_{opt} определена величина $\widetilde{y}(\mathrm{v}_i)$, являющаяся оценкой типа «около $\widetilde{y}(\mathrm{v}_i)$» для максимального значения $y(x)$ среди входов x из подобласти v_i.

Локализация области поиска решений задачи 2. В общем случае граф $G(V_{\mathrm{sit}})$ несвязен и является объединением $\bigcup\limits_{j=1}^{r} G(V^j_{\mathrm{sit}})$ связных подграфов. Соответственно V_{sit} является объединением непересекающихся подмножеств $V^1_{\mathrm{sit}}, \ldots, V^r_{\mathrm{sit}}$, а подпространство $I(V_{\mathrm{sit}})$ является объединением связных подпространств $I(V^1_{\mathrm{sit}}), \ldots, I(V^r_{\mathrm{sit}})$.

Пусть y_0 принадлежит интервалу $u(y_0)$ дискретизации выхода Y. Для подмножеств $V^1_{\mathrm{sit}}, \ldots, V^r_{\mathrm{sit}}$ вычислим значения $\mu_{\overline{Q}(V^j_{\mathrm{sit}})}(u(y_0))$, $j = \overline{1, r}$. Если

$\mu_{\bar{Q}(V_{\text{sit}}^j)}(u(y_0)) < 1$ для всех подмножеств $V_{\text{sit}}^1, \ldots, V_{\text{sit}}^r$, то будем считать, что в области определения модели требование обеспечения заданного значения выхода в условиях ситуации S неосуществимо и, следовательно, решения задачи 2 в заданной ситуации не существует. В противном случае обозначим через $V_{\text{sit}}^1, \ldots, V_{\text{sit}}^l$, $l \le r$, связные подмножества V_{sit}, для которых $\mu_{\bar{Q}(V_{\text{sit}}^j)}(u(y_0)) = 1$, $j = \overline{1, l}$.

Пусть $\dot{V}$ – одно из подмножеств $V_{\text{sit}}^1, \ldots, V_{\text{sit}}^l$. Рассмотрим задачу локализации входа x в $I(\dot{V})$ при условии, что $y(x)$ принадлежит $u(y_0)$. Множество дискретных входов $\dot{V}$ представим в виде объединения $\dot{V} = \dot{V}_1 \cup \dot{V}_2 \cup \dot{V}_3$ непересекающихся подмножеств, где $\dot{V}_1$ – множество входов v, удовлетворяющих условию $\mu_R(\text{v}, u(y_0)) = 1$; $\dot{V}_2$ – множество входов v, не входящих в $\dot{V}_1$ и удовлетворяющих условию $u_j > u(y_0)$, если $\mu_R(\text{v}, u_j) = 1$; $\dot{V}_3$ – множество входов v, не входящих в $\dot{V}_1$ и удовлетворяющих условию $u_j < u(y_0)$, если $\mu_R(\text{v}, u_j) = 1$.

Подмножества $\dot{V}_2$ и $\dot{V}_3$ не пересекаются с $\dot{V}_1$ по определению и не пересекаются между собой по причине выпуклости нечетких множеств $\tilde{U}(\text{v}_i)$, $i = \overline{1, p}$, образующих отношение R.

Обозначим через $W(\dot{V})$ множество всех пар (v', v'') смежных друг другу дискретных входов таких, что $\text{v}' \in \dot{V}_2$ и $\text{v}'' \in \dot{V}_3$. Очевидно, $\mu_{\bar{Q}(\text{v}' \cup \text{v}'')}(u(y_0)) = 1$ для любой пары (v', v'') из $W(\dot{V})$.

Напомним, что мы определили $\dot{V}$ как одно из подмножеств $V_{\text{sit}}^1, \ldots, V_{\text{sit}}^l$. Обозначим через $\bar{V}_{\text{sit}}$ объединение подмножеств $\dot{V}_1$, построенных для всех множеств совокупности $V_{\text{sit}}^1, \ldots, V_{\text{sit}}^l$, а через $\bar{\bar{W}}_{\text{sit}}$ – объединение подмножеств $W(\dot{V})$, построенных для всех множеств совокупности $V_{\text{sit}}^1, \ldots, V_{\text{sit}}^l$. Пусть $\text{v}_{\min}^1$ – наименьшее значение координаты v^1 среди дискретных входов $\text{v} = (\text{v}^1, \ldots, \text{v}^k)$ из $\bar{V}_{\text{sit}}$. Проверим, существуют ли в $\bar{\bar{W}}_{\text{sit}}$ пары (v', v'') такие, что оба вектора v' и v'' имеют оптимизируемую компоненту v^1, меньшую $\text{v}_{\min}^1$. Если множество таких пар не пусто, то обозначим его через $\bar{\bar{W}}_{\text{opt}}^2$. Очевидно, что в этом случае $I(\bar{V}_{\text{sit}})$ не содержит оптимального решения, а $I(\bar{\bar{W}}_{\text{opt}}^2)$ является минимальной совокупностью пар смежных подобластей, объединения которых образуют локализованную область поиска оптимального решения задачи 2.

В противном случае, т. е. если $\bar{\bar{W}}_{\text{opt}}^2$ пусто, множество дискретных входов $\text{v} = (\text{v}^1, \ldots, \text{v}^k)$ из $\bar{V}_{\text{sit}}$, для которых $\text{v}^1 = \text{v}_{\min}^1$, обозначим через V_{opt}^2. Множество пар (v', v'') из $W(\dot{V})$ таких, что хотя бы один дискретный вход v' или v'' имеет компоненту v^1, меньшую или равную $\text{v}_{\min}^1$, обозначим через W_{opt}^2. Тогда множество дискретных входов V_{opt}^2 и совокупность пар смежных дискретных входов W_{opt}^2 определяют локализованную область поиска оптимального решения задачи 2.

Поиск близких к оптимальным решений с использованием модели M_{mm} или M_{mp}. Описанные выше процедуры локализации задают подобласти входов, каждый из которых уже является приближенным решением соответствующей задачи. Дальнейший поиск близких к оптимальным решений осуществляется с использованием моделей M_{mm} или M_{mp}, позволяющих для испытуемых значений входов из локализованных подобластей получать ожидаемые значения.

Рассмотрим вопросы выбора конкретных решений из локализованных областей с использованием непрерывных моделей. Формально поиск заключается в вычислении значений выходов модели $y(x_1)$, $y(x_2)$, ..., $y(x_n)$ для некоторой совокупности возможных решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из локализованной области и выборе среди них наиболее предпочтительного.

В качестве решения задачи 1 выбирается вход (или совокупность входов) x_j с наибольшим значением $y(x_j)$. Анализ подобластей v_i из V^1_{opt} проводится в порядке убывания величин $\tilde{y}(v_i)$, являющихся, как указывалось выше, оценкой типа «около $\tilde{y}(v_i)$» для максимального значения $y(x)$ среди входов x из подобласти v_i.

При поиске решений задачи 2 используются непрерывность функции $y(x)$ и связность анализируемых подобластей и их смежных пар из V^2_{opt}. Непрерывность функции, реализуемой моделью, позволяет в связных подобластях допустимых решений осуществлять направленный поиск среди точек, принадлежащих кривым, соединяющим два решения, значения выхода которых образуют интервал, содержащий требуемое значение выхода y_0. В этих случаях локализация решения производится методом проб, т. е. путем вычисления $y(x)$ в точках кривой. В итоге формируется совокупность приближенных решений в виде пар $\{x, |y(x)-y_0|\}$ и $\{(x', x''), [y(x'), y(x'')]\}$, где x' и x'' – входы, принадлежащие одной из связных подобластей; $y_0 \in [y(x'), y(x'')]$.

Во многих случаях из анализа модели или физических соображений можно принять тезис о монотонности функции $y(x)$ по части ее переменных, что позволит существенно облегчить задачу выбора решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нечеткие** множества в задачах управления и искусственного интеллекта /Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука, 1986.
2. **Заде Л.** Понятие лингвистической переменной и его применения к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976.
3. **Кудинов Ю. И.** Нечеткие модели вывода в экспертных системах // Теория и системы управления. 1997. № 5. С. 75.
4. **Pedricz W.** Identification in fuzzy systems // IEEE Trans. System Man Cybernet. 1984. **SMS-14**, N 2. P. 361.
5. **Takagi T., Sugeno M.** Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. System Man Cybernet. 1985. **SMS-15**, N 1. P. 116.
6. **Пивкин В. Я.** Построение нечетких моделей динамических объектов по данным наблюдений // Автометрия. 1998. № 3. С. 62.
7. **Борисов А. Н., Крумберг О. А., Федоров И. П.** Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. Рига: Зинатне, 1990.
8. **Дюбуа Д., Прад А.** Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: piv@idisys.iae.nsk.su

Поступила в редакцию
22 февраля 2001 г.