

УДК 621.391.2

В. В. Захаров, Ф. С. Каско, О. Амин*(Одесса, Украина – Мехико, Мексика)***ОЦЕНКА СПЕКТРА СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ
РЕКУРСИВНОГО АЛГОРИТМА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

Синтезирован эффективный рекурсивный алгоритм наименьших квадратов (РНК-алгоритм) для спектрального оценивания временных рядов, позволяющий, в отличие от известного алгоритма, повысить его долговременную численную устойчивость за счет использования в алгоритме вычислительной процедуры QR -факторизации корреляционной матрицы (метод Хаусхолдера). Показано, что использование синтезированного алгоритма расширило диапазон числа обусловленности корреляционной матрицы входной последовательности, при котором сохраняется долговременная численная устойчивость алгоритма, что позволило избежать эффекта искажения спектральных характеристик, возникающего в реальных вычислительных устройствах за счет конечной длины машинных слов.

Основной задачей спектрального анализа временных рядов является получение достоверных спектральных оценок случайного процесса по его единственной реализации конечной длительности.

Среди существующих моделей временных рядов особое место занимают авторегрессионные (АР) спектральные оценки. Это объясняется тем, что АР-оценки спектральной плотности мощности (СПМ) имеют острые пики и, следовательно, более высокое разрешение гармонических составляющих, чем классические методы спектрального оценивания [1], а также тем, что оценки АР-параметров можно получить, используя методы линейной алгебры.

Рассмотрим АР-модель для оценки линейного предсказания вперед отсчета x_n , $n = 1, 2, \dots, N + p$,

$$\hat{x}_n = - \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}, \quad (1)$$

где \hat{x}_n – оценка отсчета x_n , a_k – коэффициент линейного предсказания вперед, N – количество отсчетов временного ряда, p – порядок АР-модели.

Если минимизировать средний квадрат ошибки линейного предсказания

$$(x_n - \hat{x}_n)^2 = \Delta_n^2 \equiv \min, \quad (2)$$

тогда вектор коэффициентов линейного предсказания a_k , который минимизирует Δ_n^2 , найдем как решение нормальных уравнений.

Для этого уравнение (1) с учетом (2) представим в виде

$$\Delta_n = x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k}. \quad (3)$$

Если учесть, что $n=1, 2, \dots, N+p$ и $x_n = 0$ при $n < 1$ и $n > N$, тогда выражение (3) запишем в матричной форме

$$\Delta = XA, \quad (4)$$

где $\Delta = |\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N, \dots, \Delta_{N+p}|^T$, $A = |1, a_1, a_2, \dots, a_p|^T$,

$$X = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N & x_{N-1} & x_{N-2} & \dots & x_{N-p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_N \end{vmatrix} \quad (5)$$

– матрица размера $(N+p) \times (p+1)$, \sim – символ транспонирования.

Как показано в [1], уравнение, минимизирующее средний квадрат ошибки, имеет вид

$$X^{\sim} X A = P, \quad (6)$$

где $P = |\rho, 0, \dots, 0|^T$ – вектор размера $(p+1)$,

$$\rho = \sum_{n=1}^{N+p} |\Delta_n|^2 = \Delta^{\sim} \Delta, \quad (7)$$

\sim – символ сопряжения и транспонирования, $R = X^{\sim} X$ – теплоцева корреляционная матрица входных отсчетов размера $(p+1) \times (p+1)$.

Уравнение (6) по своей структуре является уравнением Юла – Уолкера для авторегрессионного процесса и может быть решено относительно коэффициентов $a_i, i=1, 2, \dots, p$, различными известными алгоритмами (например, алгоритмом Левинсона [1]).

Однако при обработке отсчетов в реальном времени предпочтительнее методы последовательного оценивания АР-параметров, что позволяет после поступления очередного отсчета обновить параметры и график спектральной оценки. При этом спектральная плотность мощности входной последовательности для полученных параметров определяется выражением [1]

$$S(f) = \frac{\tau p}{\left| 1 + \sum_{n=1}^p \hat{a}_n e^{-j2\pi f_n \tau} \right|^2}, \quad (8)$$

где \hat{a}_n – оценка параметра a_n , $e^{-j2\pi f_n \tau}$ – комплексная синусоида частоты f_n , τ – интервал дискретизации.

Такая процедура позволяет отслеживать медленно изменяющиеся параметры нестационарных последовательностей за счет введения некоторого экспоненциального окна, которое движется вдоль записи данных, создавая наименьшее изменение значений текущих ошибок и очень сильно уменьшая значения более старых ошибок (что позволяет уменьшить ошибки за счет нестационарности).

Таким образом, выражение (7) представим в виде

$$\rho = \sum_{n=1}^N w^{N-n} |\Delta_n|^2, \quad (9)$$

где w – положительная действительная скалярная величина, удовлетворяющая условию $0 < w \leq 1$.

Соответственно выражение для матрицы R запишем в виде

$$R = \sum_{n=1}^N w^{N-n} X_n X_n^T, \quad (10)$$

где $X_n = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p}]^T$ – вектор размера $(p+1)$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Наиболее простыми процедурами оценивания текущих параметров АР-модели являются алгоритмы наименьших средних квадратов (НСК-алгоритмы), такие как градиентные процедуры наискорейшего спуска (например, алгоритм Гриффитса). Однако сильная зависимость скорости сходимости этих алгоритмов от характеристик входной последовательности (в частности, от обусловленности корреляционной матрицы) не позволяет использовать эти алгоритмы для слежения за параметрами АР-модели, если изменение во времени статистик входной последовательности происходит достаточно быстро по сравнению со скоростью сходимости этих алгоритмов [2].

В связи с этим более широкое распространение получили рекурсивные алгоритмы наименьших квадратов (РНК-алгоритмы), позволяющие получить сходимость к оптимальной оценке параметров АР-модели за значительно меньшее число шагов, чем алгоритмы НСК, а также независимость от обусловленности корреляционной матрицы входной последовательности за счет дополнительных вычислительных затрат.

Высокая чувствительность к плохой численной обусловленности в вычислениях с конечной длиной машинного слова может привести к тому, что после выполнения определенного числа итераций дисперсия ошибки на выходе фильтра предсказания резко возрастет (другими словами, фильтр не обладает долговременной численной устойчивостью) и повлечет за собой существенные искажения спектральных оценок.

В [1] для снижения влияния плохой численной обусловленности корреляционной матрицы на получаемые решения к входной последовательности предлагается добавить «белый» шум, а в [4] в диагональ матрицы – небольшую константу (регуляризовать матрицу). Однако такие методы приводят к смещению получаемых спектральных оценок, что в некоторых случаях недопустимо.

Другим методом повышения численной устойчивости является выбор $w \ll 1$, что резко ограничивает величину накопленной ошибки на предыдущих итерациях и приводит к ухудшению точности вычисляемых значений параметров предсказания (другими словами, параметр w обязан отслеживать нестационарность, которая никак не связана с обусловленностью).

По-видимому, самым перспективным путем повышения численной устойчивости рекурсивных алгоритмов является синтез алгоритмов, использующих более устойчивые к ошибкам округления вычислительные процедуры, чем применяемая в известных рекурсивных алгоритмах РНК формула Вудбери для обращения однорангово-модифицированных матриц.

Фундаментальными трудами по изучению влияния эффектов конечной разрядности в различных вычислительных процедурах являются работы [5–8], из которых следует, что наиболее устойчивы к вычислительным ошибкам методы триангуляции Хаусхолдера и модифицированный алгоритм Грама – Шмидта, затем – метод Холецкого и метод вращения Гивенса.

Цель настоящей работы – синтез алгоритма спектрального оценивания, имеющего низкую чувствительность к плохой обусловленности корреляционной матрицы входных отсчетов и обладающего долговременной численной устойчивостью, вычислительная сложность которого не хуже, чем у известного РНК-алгоритма. Для этого предлагается в РНК-алгоритме спектрального оценивания использовать наиболее устойчивый к ошибкам вычислительный метод триангуляции Хаусхолдера [9].

Для синтеза алгоритма перепишем уравнение (6) в виде

$$LL^{\sim}A = P, \quad (11)$$

где L и L^{\sim} – разложение матрицы R на нижнюю (L) и верхнюю (L^{\sim}) треугольные соответственно, такие что $R = LL^{\sim}$. Из (11) следует, что вектор A может быть найден решением двух систем линейных уравнений:

$$LB = P, \quad L^{\sim}A = B. \quad (12)$$

Известен алгоритм получения матриц L и L^{\sim} с помощью алгоритма Холецкого [6], однако в этом случае улучшение численной устойчивости незначительное, а матрица R должна формироваться в явном виде (т. е. под нее должна быть зарезервирована память), после чего может быть произведена ее факторизация. Это требует увеличения вычислительных ресурсов.

Предлагаемый алгоритм спектрального оценивания позволяет произвести рекурсивное обновление коэффициентов АР и спектральной оценки, используя устойчивую к ошибкам вычислений процедуру получения матриц L и L^{\sim} , а также позволяет не формировать матрицу R в явном виде, а элементы матрицы L , L^{\sim} получить непосредственно из матрицы входных отсчетов X .

Допустим, что отсчеты входной последовательности поступают в реальном времени. Необходимо после поступления очередного отсчета произвести корректировку СПМ входной последовательности. Представим алгоритм в виде выполнения следующих шагов.

Шаг 1. Взвешивание входных отсчетов окном w^{N-n} длины N

$$|x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-N+1}| \otimes |1, w^1, \dots, w^{N-1}|, \quad (13)$$

где \otimes – знак поэлементного умножения.

Шаг 2. Формирование матрицы X размера $n \times (p+1)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_{n-p-1} \\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_{n-p} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $n = 1, 2, \dots, N$ – номер текущего отсчета.

Шаг 3. Получение матрицы L_n

$$L_n^{\sim} = QX, \quad (15)$$

где Q – ортогональная матрица Хаусхолдера размера $n \times n$ [9].

Шаг 4. Решение системы уравнений (12).

Шаг 5. Получение значения СПМ согласно (8).

Рассмотрим рекуррентную процедуру обновления элементов матрицы L и решения системы уравнений (12). Предположим, что матрица X сформирована по n комплексным отсчетам данных. Тогда представим матрицу L_n^{\sim} в виде

$$L_n^{\sim} = QX. \quad (16)$$

Из (16) следует, что элементы матрицы R можно получить с помощью ортогонального преобразования матрицы X , не формируя в явном виде матрицу R .

Представим матрицу Q в факторизованном виде

$$Q = Q_{p+1} Q_p \dots Q_i X^{i-1}, \quad (17)$$

где $X^0 = X$, $X^{i-1} = Q_{i-1} \dots Q_1 X = |X_1^{i-1} \dots X_j^{i-1} \dots X_{p+1}^{i-1}|$, $i = 1, 2, \dots, p+1$, при этом столбцы X_j^{i-1} матрицы X^{i-1} , $j = 1, 2, \dots, p+1$, прошли $(i-1)$ раз ортогонализацию матрицами Q_1, Q_2, \dots, Q_{i-1} .

Матрицы Q_i в соответствии с [9] определяются следующим образом:

$$Q_i = I_n - \frac{U_i U_i^{\sim}}{u_i C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p+1, \quad (18)$$

где I_n – единичная матрица размера n , u_i – i -й элемент вектора U_i размера n .

В (18) скалярная величина C_i определяется как

$$C_i = X_i^{i-1} X_i^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, p+1, \quad (19)$$

где $X_i^{i-1} = |0, 0, \dots, 0, x_{i,i}^{i-1}, x_{i,i+1}^{i-1}, \dots, x_{i,n+i+1}^{i-1}|$ – i -й столбец матрицы X^{i-1} .

Вектор-столбец U_i в (18) определяется выражением

$$U_i = |X_i^{i-1} + \delta e_i C_i|, \quad (20)$$

где $\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{Re}\{x_{ii}^{i-1}\} \geq 0, \\ -1, & \text{если } \operatorname{Re}\{x_{ii}^{i-1}\} < 0, \end{cases}$ $\operatorname{Re}\{x_{ii}^{i-1}\}$ – действительная часть элемента

x_{ii}^{i-1} ; $e_i = \left| \begin{array}{c} \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i} \end{array} \right|$ – вектор-столбец, размер которого совпадает с размером вектора X_i^{i-1} .

С учетом (17) i -й шаг ортогонализации столбцов матрицы X^{i-1} запишем в виде

$$X^i = Q_i X^{i-1}. \quad (21)$$

Представим (21) с учетом (18) в виде операций над векторами:

$$X_j^i = \left(I_n - \frac{U_i U_i^T}{u_i C_i} \right) X_j^{i-1} = X_j^{i-1} - U_i \frac{U_i^T X_j^{i-1}}{u_i C_i}. \quad (22)$$

С учетом (20) запишем (22) в виде

$$\left| \begin{array}{c} x_{ji}^i \\ \vdots \\ X_j^i \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_{ji}^{i-1} \\ \vdots \\ X_j^{i-1} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} x_{ii}^{i-1} + C_i \\ \vdots \\ X_i^{i-1} \end{array} \right| \Theta_i (G_{ji} + C_i x_{ji}^{i-1}), \quad (23)$$

где $G_{ji} = X_j^{i-1} X_i^{i-1}$.

Скалярная величина Θ_i в (23) определяется как

$$\Theta_i = \frac{1}{u_i C_i}. \quad (24)$$

Выражение (23) определяет векторный алгоритм получения элементов l_{ij} и ортогонализации векторов X_j^i с помощью преобразования Хаусхолдера.

Исходя из (23), запишем элементы l_{ij} матрицы L в виде

$$l_{ij} = x_{ji}^i = x_{ji}^{i-1} - (x_{ii}^{i-1} + C_i) \Theta_i (G_{ji} + C_i x_{ji}^{i-1}), \quad (25)$$

где $i=1, 2, \dots, p+1$, $j=i, \dots, p+1$.

Выражение для ортогонализации векторов будет иметь вид

$$X_j^i = X_j^{i-1} - X_i^{i-1} \Theta_i (G_i + C_i x_{ji}^{i-1}). \quad (26)$$

Таким образом, вычислительный процесс рекуррентного получения элементов l_{ij} матрицы L с использованием преобразования Хаусхолдера на i -й итерации ($i=1, 2, \dots, p$) состоит из следующих этапов:

- а) формирование скаляра C_i в соответствии с выражением (19);
- б) формирование вектора U_i согласно (20);
- в) вычисление l_{ij} согласно (25);
- г) ортогонализация векторов X_j^i в соответствии с (26).

Очевидно, что выполнение пп. а–г требует порядка $O(np)$ операций умножение–сложение.

Допустим, что через некоторый промежуток времени T получен $(n+1)$ -й отсчет. Тогда матрица X на $(n+1)$ -й итерации будет иметь вид

$$X = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_{n-p-1} \\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_{n-p} \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{cccc} x_{n+1} & x_n & \dots & x_{n-p+1} \end{array} \right| \end{array}, \quad (27)$$

т. е. в матрице добавляется строка (выделена рамкой).

Очевидно, если на n -й итерации по n отсчетам получены величины C_i , U_i , l_{ij} , X_j^i согласно пп. а–г, тогда при поступлении $(n+1)$ -го отсчета эти величины могут быть легко модифицированы $(n+1)$ -й итерацией, исходя из следующих соотношений:

$$C_{i(n+1)} = \alpha C_{i(n)} + x_{n+2-i}^{i-1} x_{n+2-i}^{i-1}, \quad (28)$$

$$U_i = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \alpha X_i^{i-1} \\ \dots \\ x_{n+2-i}^{i-1} \end{array} \right| + \delta e_i C_{i(n+1)}, \quad (29)$$

$$l_{ij} = \alpha x_{ji}^{i-1} - (\alpha x_{ji}^{i-1} + C_{i(n+1)}) \Theta_{i(n+1)} (G_{ji(n+1)} + C_{i(n+1)} \alpha x_{ji}^{i-1}), \quad (30)$$

$$X_j^i = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \alpha X_j^{i-1} \\ \dots \\ x_{n+2-j}^{i-1} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \alpha X_i^{i-1} \\ \dots \\ x_{n+2-i}^{i-1} \end{array} \right| \Theta_{i(n+1)} (G_{ji(n+1)} + C_{i(n+1)} \alpha x_{ji}^{i-1}), \quad (31)$$

где α – некоторый коэффициент «памяти», определяемый характеристиками «окна».

Таким образом, при поступлении каждого последующего отсчета для получения АР-параметров требуется порядка $O(p)$ операций.

По мере вычисления элементов l_{ij} матрицы L могут быть также получены элементы векторов B и A из выражения (12).

Для этого рассмотрим решение системы

$$LB = P. \quad (32)$$

Из (22) следует, что

$$b_i^j = b_i^{j-1} / l_{ii}, \quad i=1,2,\dots,p - \text{номер итерации,} \quad (33)$$

$$b_j^i = P_j - \sum_{m=1}^{j-1} l_{mj} b_m^{j-1}, \quad j=1,2,\dots,p - \text{номер элемента.}$$

Принимая во внимание $b_j^0 = P_j$, рекуррентную формулу получения элементов вектора B представим в виде

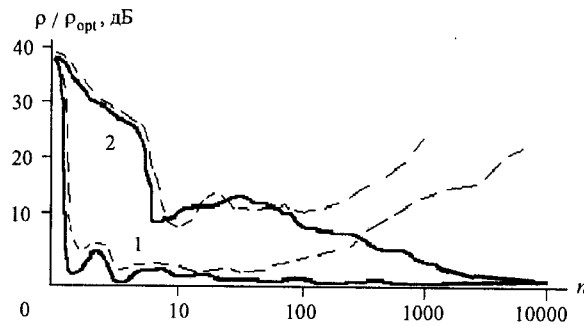
$$b_j^i = b_j^{i-1} - l_{ij} b_i^i. \quad (34)$$

Для сравнения известного быстрого алгоритма и синтезированного было проведено их моделирование на ЭВМ при 32-разрядной арифметике и выполнении операций с плавающей запятой.

Моделировались два случая. В первом оценивался средний квадрат ошибки на выходе фильтра ($p=10$) при подаче на его вход последовательности данных, состоящей из одной «мощной» гармонической составляющей и аддитивного «белого» шума. При этом отношение $P_{ГС}/P_{ш}$ равнялось 60 дБ, где $P_{ГС}$ – мощность гармонической составляющей, $P_{ш}$ – мощность шума.

Этот случай следует расценивать как «худший», поскольку максимальное собственное число матрицы R приближенно равно $P_{ГС}$, минимальное – $P_{ш}$ и, следовательно, число обусловленности матрицы – $P_{ГС}/P_{ш}$. Результаты зависимости $\rho/\rho_{\text{опт}}$ от числа отсчетов n при числе испытаний, равном 100, приведены на рисунке (кривые 1), где $\rho_{\text{опт}}$ получено из непосредственного решения уравнения (6) с помощью алгоритма Левинсона.

Во втором случае последовательность состояла из восьми гармонических составляющих равной мощности, так что $\sum_{i=1}^8 P_{ГС_i}/P_{ш} = 60$ дБ.



Зависимость отношения $\rho/\rho_{\text{опт}}$ от числа отсчетов временного ряда: 1 – одна гармоническая составляющая, 2 – восемь гармонических составляющих (сплошные кривые – синтезированный алгоритм, штриховые – известный алгоритм)

Такой случай следует расценивать как «средний» с точки зрения численной устойчивости, поскольку при полностью «разрешенных» спектральных составляющих число обусловленности матрицы пропорционально величине $P_{ГС}/P_{ш}$, что ниже, чем в худшем случае. Результаты приведены на рисунке (кривые 2).

Как следует из приведенных результатов моделирования, при фиксированной разрядности машинного слова (что имеет место в реальных вычислительных устройствах) наблюдается повышение дисперсии ошибки на выходе фильтра с увеличением числа отсчетов входной последовательности (штриховые линии). Такой эффект непременно приведет к искажению формы спектра при использовании рекуррентных алгоритмов в спектральном оценивании, что является нежелательным и практически компенсирует преимущества рекуррентных алгоритмов.

Результаты использования синтезированного алгоритма (на рисунке сплошные линии) показывают, что этот эффект можно частично исключить, применяя более устойчивую процедуру нахождения параметров авторегрессии. В частности, для приведенных примеров синтезированный алгоритм позволяет сохранять долговременную численную устойчивость вплоть до $n = 10000$, что лежит в пределах разумной максимальной длины временных рядов различной природы.

В работе синтезирован эффективный РНК-алгоритм спектрального оценивания, который в отличие от известного алгоритма повышает его долговременную численную устойчивость. Это достигается тем, что в синтезированном алгоритме использовалась устойчивая к вычислительным ошибкам процедура триангуляции корреляционной матрицы (метод Хаусхолдера). Предложен рекуррентный вариант указанной процедуры применительно к РНК-алгоритму спектрального оценивания. Показано, что синтезированный алгоритм позволил расширить диапазон числа обусловленности корреляционной матрицы входной последовательности, при котором сохраняется долговременная численная устойчивость алгоритма до 60 дБ при числе отсчетов входной последовательности, равном 10000, что соизмеримо с пределами максимальной длины временных рядов различной природы. Таким образом, применение синтезированного алгоритма в задачах спектрального оценивания позволяет избежать эффекта искажения СПМ, возникающего в реальных вычислительных устройствах за счет конечной длины машинных слов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложение. М.: Мир, 1990.
2. Абрамович Ю. И., Михайлюков В. Н. Цифровые стохастические итеративные процедуры адаптивной настройки систем компенсации помех. Анализ сходимости и скорости сходимости // Радиотехника и электроника. 1982. 27, № 9. С. 1784.
3. Свердлик М. Б., Захаров В. В. Модифицированные рекуррентные алгоритмы пространственной обработки с повышенной устойчивостью к ошибкам вычислений // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1991. № 4. С. 62.
4. Черемисин О. П. Эффективность адаптивного алгоритма с регуляризацией выборочной корреляционной матрицы // Радиотехника и электроника. 1982. 27, № 10. С. 1933.
5. Уилкинсон Д. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

6. **Воеводин В. В.** Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.
7. **Golub G. H., Van Loan C. F.** Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, 1993.
8. **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач методом наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
9. **Householder A. S.** A class of method for inverting matrices // Journ. Soc. Indust. Appl. Math. 1958. 6, N 2. P. 189.

*Одесский политехнический университет,
E-mail: Victor307@yahoo.com*

*Поступила в редакцию
16 декабря 1999 г.*

Реклама продукции в нашем журнале – залог Вашего успеха!