РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 4 2001

УДК 621.39 : 519.2

В. Н. Васюков

(Новосибирск)

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНЕЧНОЗНАЧНЫХ ГИББСОВСКИХ ПОЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИК *

Предлагается метод оценивания параметров (потенциалов) распределения Гиббса конечнозначных случайных процессов и полей произвольной размерности на основе применения достаточных статистик. Приводятся примеры практического использования предложенного метода.

Введение. Гиббсовские модели находят все более широкое применение в задачах генерирования и обработки случайных сигналов и полей [1–5]. Интерес к ним объясняется тем, что любое дискретное марковское случайное поле описывается распределением Гиббса, и наоборот, поле, описываемое распределением Гиббса, является марковским (теорема Хэммерсли – Клиффорда [1, 6]). В цифровой обработке изображений марковские случайные поля используются, в частности, для описания стохастических текстур [1, 3, 4]. Особенностью гиббсовского описания является прямое задание локальных связей между отсчетами сигнала или поля, в результате чего появляется возможность записи совместного распределения в явном виде. Преимущество гиббсовских моделей заключается в возможности единообразного описания случайных дискретных сигналов и полей произвольной размерности, включая марковские некаузальные нестационарные поля и нелинейные механизмы их взаимодействия [2]. Локальность описания обусловливает релаксационный характер алгоритмов генерирования и обработки (фильтрации, сегментации, реконструкции) марковских случайных полей на основе гиббсовских моделей. Актуальной проблемой является оценивание параметров распределения Гиббса (потенциалов) на основе наблюдения реализаций марковского поля. Из работ, касающихся оценивания параметров распределения Гиббса, отметим [3, 4].

В работе [3] предложен метод оценивания потенциалов гиббсовской модели специального вида (многоуровневой логистической модели), основанный на решении системы уравнений, линейных относительно параметров распределения Гиббса. При этом остаются в стороне вопросы о применимости такого подхода к гиббсовским моделям общего вида, а также о качестве получаемых оценок.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (проект № Т00-2.4-265).

Работа [4] посвящена определению значимых клик второго порядка и оцениванию потенциалов однородной гиббсовской модели конечнозначного поля на основе совместного применения процедур стохастической релаксации для генерирования реализаций случайного поля и стохастической аппроксимации для оценивания параметров. Достоинство работы – строгий подход, основанный на достаточных статистиках, однако итерационный характер процедур, используемых при оценивании, сопряжен с большими вычислительными затратами.

В данной работе предлагается метод оценивания параметров гиббсовских моделей случайных конечнозначных процессов и полей, основанный на применении достаточных статистик и не требующий для своей реализации сложных итерационных процедур. Приводятся примеры практического применения предложенного метода.

1. **Достаточные статистики распределения Гиббса для конечнозначной модели.** Следуя в основном данным работы [4], рассмотрим построение гиббсовской модели конечнозначного поля. Поле представляется в виде совокупности дискретных или непрерывных случайных величин, соотнесенных с точками некоторой решетки, или, иначе, растра. В задачах обработки одномерных сигналов растр представляет собой множество моментов дискретного времени $L^{(1)}=\{(i)\colon i=\overline{1,N}\}$, при обработке изображений – множество узлов двумерной решетки $L^{(2)}=\{(i,j)\colon i=\overline{1,N_1};\, j=\overline{1,N_2}\}$ размером $N_1\times N_2$.

При построении гиббсовской модели для всех точек растра необходимо определить отношение соседства [4]. Соседство описывается ненаправленным графом $G=\langle W,\ B\rangle$ без петель и кратных ребер, множество W вершин которого сопоставлено точкам растра, а инцидентные парам вершин ребра, образующие множество B, обозначают соседство соответствующих точек. Множество всех попарно соседних точек называется кликой. В графе G каждой клике соответствует полный подграф. Все полные подграфы графа соседства образуют систему $\mathbb{C}=\{c\}$ клик, причем каждой клике c сопоставляется функция $V_c(\cdot)$ – потенциал, зависящий от значений, принимаемых процессом X в точках клики. Распределение Гиббса задается выражением [1]

$$P(X=x)=Z^{-1}\exp\left\{-\sum_{c\in\mathbb{C}}V_c(x)\right\},\tag{1}$$

где Z – нормирующая константа, определяемая выражением

$$Z=\int_X\exp\left\{-\sum_{c\in\mathbb{C}}V_c(x)\right\}d\mu(x),\tag{2}$$

$\mu(x)$ – мера, определенная на множестве X реализаций случайного процесса или поля. Очевидно, Z зависит от потенциалов, однако получить эту зависимость в явном виде удается только в исключительных случаях.

Распределение Гиббса (1) является весьма универсальным, так как практически любое совместное распределение совокупности случайных величин может быть записано в форме (1) при условии ненулевой вероятности (плотности вероятности) всех реализаций [6] и при соответствующем выборе системы клик. Однако наибольший практический интерес представляют гиббсовские модели марковских случайных полей, которым соответствуют клики невысоких порядков, содержащие 2–4 элемента растра, так что объединение клик, включающих произвольную точку (за вычетом этой точки), представляет её окрестность, определяющую марковское свойство поля [1].

Конечнозначная гиббсовская модель предполагает, что поле X на растре L произвольной размерности представляет собой совокупность случайных величин $\{X_s\}$, $s \in L$, принимающих значения из конечного множества $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M\}$, где M – количество различных значений, принимаемых реализациями поля в точках растра. Реализации поля и его отсчет в точке s обозначаются соответственно x и x_s. В рамках однородной модели [4] предполагается, что множество $\mathbb{C}$ всех клик разбито на непересекающиеся множества (семейства), каждое из которых образовано всевозможными сдвигами в пределах растра единственной клики. При этом всем кликам одного семейства приписывается одна и та же потенциальная функция (набор потенциалов).

Рассмотрим более общую неоднородную модель. Для этого множество $\mathbb{C}$ всех клик разобьем на T непересекающихся подмножеств, называемых типами клик: $\mathbb{C} = \bigcup_{t=1}^{T} \mathbb{C}_t$. К одному типу относятся клики с одинаковым пространственным расположением входящих в них элементов, отличающиеся друг от друга только сдвигами в пределах растра, при условии, что им сопоставлены одинаковые потенциальные функции. Иными словами, клики одного семейства могут принадлежать разным типам в соответствии с назначенными потенциалами. Такой моделью могут быть описаны пространственно неоднородные поля, свойства которых различны в разных областях растра. В этом случае выражение (1) для вероятности реализации процесса X примет вид

$$P(X = x) = Z^{-1} \exp\left\{ -\sum_{t=1}^{T} \sum_{c \in \mathbb{C}_t} V_c(x) \right\}. \tag{3}$$

Поскольку отсчеты процесса принимают значения из конечного множества, потенциал $V_c(\cdot)$ клики c также принимает лишь конечное множество различных значений. Обозначим через $V_c^t(\cdot)$ потенциал клики c, принадлежащей типу t, через $\alpha_1^t, \alpha_2^t, \ldots, \alpha_{Q_t}^t$ – возможные значения (уровни) данного потенциала, тогда количество уровней $Q_t = M^{N_t}$, где N_t – количество элементов клики типа t. Для данной реализации x поля X обозначим через $\nu_n^t(x)$ число, показывающее, сколько раз в пределах реализации x потенциал на кликах типа t принял значение α_n^t.

Тогда распределение (3) перепишем в виде

$$P(X = x) = Z^{-1} \exp\left\{ -\sum_{t=1}^{T} \sum_{n=1}^{Q_t} \alpha_n^t \nu_n^t(x) \right\}. \tag{4}$$

Распределение (4) принадлежит экспоненциальному семейству [7] с вектором параметров $\mathrm{A} = ((\alpha_n^t,\ n = \overline{1, Q_t}),\ t = \overline{1, T})$. Согласно теореме факторизации [7], достаточной статистикой является вектор $U(X) = ((\nu_n^t(X), n = \overline{1, Q_t}),$ $t = \overline{1, T})$, составленный из элементов гистограмм, указывающих количество событий, соответствующих значениям компонент параметра А в данной реализации x. Таким образом, распределение поля имеет вид

$$P(X=x)=Z^{-1}\exp\{-(\mathrm{A},U(x))\}, \tag{5}$$

где символ $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Размерность вектора параметров А и достаточной статистики $U(X)$ равна $Q=\sum_{t=1}^{T}Q_t$.

Рассмотренная модель конечнозначного гиббсовского поля является более общей по сравнению с моделью, предложенной в работе [4], так как не предполагает однородности и допускает более чем парные взаимодействия.

2. **Оценивание параметров распределения Гиббса.** При решении задачи оценивания параметров распределения Гиббса ограничимся случаем, когда исходный процесс или поле представимы в виде однородной модели, а размеры растра настолько велики, что граничные точки можно не учитывать. Учет неоднородности модели и влияния граничных точек принципиально несложен и приводит лишь к количественному усложнению задачи оценивания.

Пусть $s\in L$ – некоторая точка растра; X_s – значение поля в этой точке; η_s – объединение всех клик, содержащих s; $\eta_s\setminus s$ – окрестность точки s; $x_{\eta s}$ – совокупность значений реализации поля на η_s. Тогда условное распределение [1] для X_s при заданных значениях реализации поля на окрестности будет иметь вид

$$P(X_s=x_s\mid x\setminus x_s)=P(X_s=x_s\mid x_{\eta s}\setminus x_s)=$$

$$=\left(\exp\left\{-\sum_{c\in\eta_s}V_c(x)\right\}\right)\Bigg/\left(\sum_{X_s}\exp\left\{-\sum_{c\in\eta_s}V_c(x)\right\}\right). \tag{6}$$

Условное распределение не содержит нормирующей константы Z, поэтому его несложно определить при заданном распределении $P(X)$. С другой стороны, совокупность условных распределений полностью определяет марковское случайное поле, так как условие их согласования для гиббсовских моделей выполняется автоматически [2]. Поэтому переход к условным распределениям не приводит к потере информации о параметрах распределения.

Введем в рассмотрение две реализации x' и x'' поля X, различающиеся только в точке s, где они принимают значения x'_s и x''_s соответственно. Образуем отношение условных вероятностей при заданных значениях поля на окрестности данной точки:

$$\frac{P(X_s=x'_s\mid x_{\eta s}\setminus x'_s)}{P(X_s=x''_s\mid x_{\eta s}\setminus x''_s)}=\exp\left\{-\sum_{\kappa\in\eta_s}V_\kappa(x')\right\}\Bigg/\exp\left\{-\sum_{\kappa\in\eta_s}V_\kappa(x'')\right\}.$$

С учетом (5) запишем

$$\exp\{-(\mathrm{A},[U(x')-U(x'')])\}=\frac{P(x_s=x'_s\mid x_{\eta s}\setminus x'_s)}{P(x_s=x''_s\mid x_{\eta s}\setminus x''_s)},$$

откуда

$$(\mathrm{A},[U(x'')-U(x')])=\ln\left[\frac{P(x_s=x'_s\mid x_{\eta s}\setminus x'_s)}{P(x_s=x''_s\mid x_{\eta s}\setminus x''_s)}\right]. \qquad (7)$$

Выбирая в качестве x' и x'' различные реализации, отличающиеся только в точке s, и записывая для них векторы $[U(x'')-U(x')]$, получим систему линейных уравнений. Количество различных уравнений с учетом нормировки условных распределений, очевидно, равно $M^{\nu}(M-1)$, где ν – количество точек в окрестности $\eta_s\setminus s$. Оценка для А может быть получена решением системы (7), если в качестве правых частей подставить логарифмы отношений оценок условных вероятностей, полученных, например, как в [3], путем подсчета соответствующих событий с последующей нормировкой.

Предложенный подход отличается от метода [3] тем, что уравнения (7) могут быть просто записаны для любого гиббсовского поля (процесса), принимающего значения из конечного множества. Достаточность статистики $U(\cdot)$ служит свидетельством полного использования данных. Если при полноте распределения (5) полученная оценка несмещенная, то, согласно теореме Лемана – Шеффе, она будет эффективной и существенно единственной [8]. При отсутствии полноты вектор параметров оказывается избыточным. Этот случай подробнее рассмотрен в примере 2.

3. **Примеры практического применения метода оценивания параметров распределений Гиббса.**

П р и м е р 1. *Оценивание параметров двумерной модели Изинга.* Рассмотрим бинарное гиббсовское поле X, заданное на двумерном прямоугольном растре и принимающее значения из множества $\{\xi_1=1,\ \xi_2=-1\}$, с двумя типами клик. Все клики образованы парами точек, соседними по вертикали или по горизонтали. Потенциалы всех клик равны $-\beta$, если значения поля в точках клики совпадают, и β в противном случае. Эта модель известна в статистической физике как модель Изинга в отсутствие внешнего поля [1]. Распределение X имеет вид

$$P(X=x)=Z^{-1}\exp\left\{\beta\sum_{c\in\mathbb{C}}x_c^{(1)}x_c^{(2)}\right\}, \qquad (8)$$

где $x_c^{(1)}$ и $x_c^{(2)}$ – значения реализации поля в двух точках парной клики. Очевидно, распределение (8) имеет единственный параметр β и достаточную статистику $U(x)=\sum_{c\in\mathbb{C}}x_c^{(1)}x_c^{(2)}$. Поскольку область значений $\beta\in(0,\infty)$ содержит одномерный интервал, распределение (8) полно [7].

Окрестность произвольной внутренней точки s содержит четыре точки, поэтому можно составить 16 уравнений вида (7), из которых 6 в данном случае имеют нулевые левые части. Оставшиеся 10 уравнений линейны относительно β; решение по методу наименьших квадратов имеет вид

$$\beta=\frac{1}{48}\sum_{i\in I}\ln\left(\frac{P_i}{P_{i+1}}\right), \qquad (9)$$

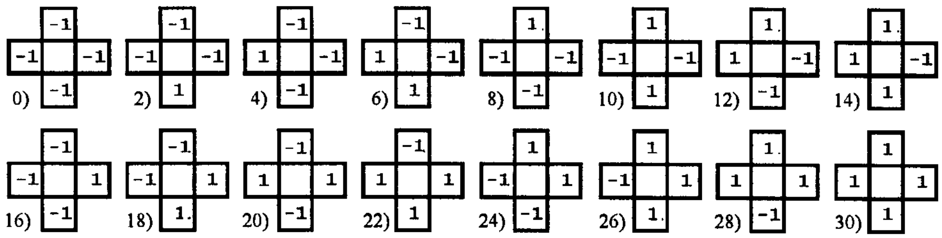

Рис. 1

где $I = \{0; 2; 4; 8; 14; 16; 22; 26; 28; 30\}$; P_i и P_{i+1} представляют собой оценки условных вероятностей для значений реализации $x_s = -1$ и $x_s = 1$ при значениях реализаций в окрестности точки s, показанных на рис. 1 с соответствующими значениями индекса i. Оценки P_i и P_{i+1} находятся путем подсчета количества соответствующих фрагментов, встречающихся в наблюдаемой реализации, с последующей нормировкой. В процессе оценивания соответствующие слагаемые должны быть исключены из (9) с коррекцией множителя в случае равенства нулю каких-либо из этих оценок. Вопрос о несмещенности и эффективности оценки (9) не прост и составляет предмет отдельного исследования.

На рис. 2 показана типичная реализация поля, имеющего распределение (8) при параметре $\beta = 0{,}4$. Значение оценки, найденной по этой реализации в соответствии с (9), равно 0,398. Для сравнения на рис. 3 показана типичная реализация поля при $\beta = 0{,}398$.

П р и м е р 2. *Оценивание параметров бинарного гиббсовского поля с парными кликами.* Рассмотрим бинарное гиббсовское поле X, заданное на двумерном прямоугольном растре и принимающее значения из множества $\{\xi_1, \xi_2\}$, с двумя типами клик.

Все клики образованы парами точек, соседними по вертикали или по горизонтали. Потенциалы вертикальных клик назначаются в соответствии со схемой

$$\alpha_1^1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix},\ \alpha_2^1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},\ \alpha_3^1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix},\ \alpha_4^1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

потенциалы горизонтальных клик – согласно схеме

$$\alpha_1^2 \Leftrightarrow (\xi_1\ \xi_1),\ \ \alpha_2^2 \Leftrightarrow (\xi_1\ \xi_2),\ \ \alpha_3^2 \Leftrightarrow (\xi_2\ \xi_1),\ \alpha_4^2 \Leftrightarrow (\xi_2\ \xi_2).$$

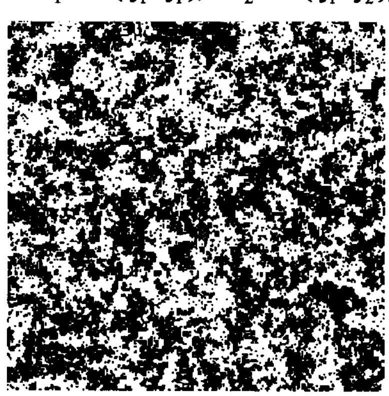

Рис. 2

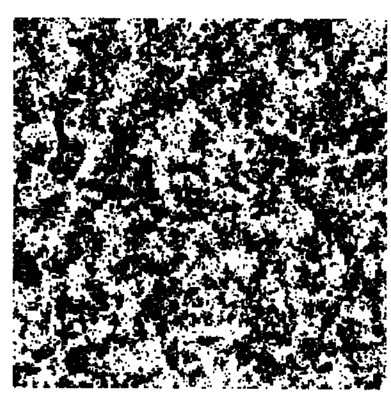

Рис. 3

Распределение (4) принимает вид

$$P(X=x)=Z^{-1}\exp\left\{-\sum_{t=1}^{2}\sum_{n=1}^{4}\alpha_n^t \nu_n^t(x)\right\}.$$

Конфигурация окрестности произвольной внутренней точки такая же, как в предыдущем примере, поэтому можно записать 16 уравнений вида (7), как матричное уравнение

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{A}=\boldsymbol{\Lambda}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\Lambda}$ – 16-мерный вектор-столбец, компонентами которого являются логарифмы соответствующих отношений условных вероятностей, а матрица

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{т}},$$

где $(\cdot)^{\mathrm{т}}$ – символ транспонирования.

Независимых параметров распределения для описываемого случая не восемь, а три, на что указывает ранг матрицы $\mathbf{U}$, равный трем. Таким образом, имеет место неминимальное параметрическое пространство экспоненциального семейства распределений [7]. В данном случае это означает, что фактически поле полностью задается тремя параметрами. Задав произвольно пять потенциалов и решая (8) относительно $\mathbf{A}$, можно оценить оставшиеся три параметра.

На рис. 4 представлена реализация поля, описываемого данной моделью с вектором параметров $\mathrm{A}=(-0{,}21\ 0{,}2\ 0{,}23\ -0{,}18\ -0{,}83\ 0{,}77\ 0{,}78\ -0{,}85)^{\mathrm{т}}$. Оценки для параметров α_1^1, α_1^2 и α_4^2, найденные по предложенному методу,

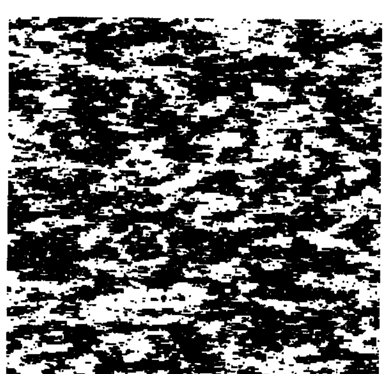

Рис. 4

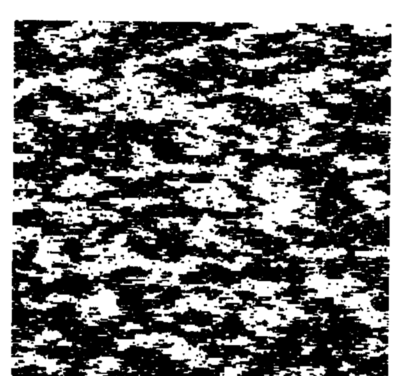

Рис. 5

равны для данной реализации –0,218, –0,846 и –0,872 соответственно. При этом остальные параметры полагались равными их истинным значениям. Типичная реализация поля при параметрах, равных полученным оценкам, представлена на рис. 5.

Произвольность задания пяти параметров не оказывает влияния на вид марковского поля, описываемого гиббсовской моделью. Принимая α_2^1, α_3^1, α_4^1, α_2^2 и α_3^2 равными соответственно 0,5, 0,5, –0,5, 0,5 и 0,5, в результате оценивания получаем значения 0,672, –1,726 и –0,542 для параметров α_1^1, α_1^2 и α_4^2. В таблице для сравнения приведены значения условных вероятностей относительно окрестностей рис. 1, рассчитанные для истинных значений параметров (столбец 1), а также для вышеуказанных оценок при пяти параметрах, известных точно (столбец 2) и заданных произвольно (столбец 3). Обозначения условных вероятностей такие же, как в (9).

Как видно из сравнения 2-го и 3-го столбцов, различные наборы оценок параметров гиббсовской модели, найденных по одной и той же реализации поля, определяют одну и ту же совокупность условных вероятностей, а следовательно, одно и то же марковское поле. Таким образом, совокупность параметров гиббсовской модели конечнозначного поля общего вида является избыточной. Количество необходимых параметров определяется рангом

Условные вероятности	Значения условных вероятностей		
	1	2	3
P_0	0,983	0,983	0,983
P_2	0,962	0,963	0,963
P_4	0,692	0,693	0,693
P_6	0,497	0,497	0,497
P_8	0,962	0,963	0,963
P_{10}	0,917	0,919	0,919
P_{12}	0,497	0,497	0,497
P_{14}	0,304	0,301	0,301
P_{16}	0,692	0,693	0,693
P_{18}	0,497	0,497	0,497
P_{20}	0,082	0,079	0,079
P_{22}	0,038	0,036	0,036
P_{24}	0,497	0,497	0,497
P_{26}	0,304	0,301	0,301
P_{28}	0,038	0,036	0,036
P_{30}	0,017	0,016	0,016

матрицы **U**, а остальные параметры перед оцениванием задаются произвольно.

Заключение. Рассмотрена задача оценивания параметров гиббсовских моделей марковских процессов и полей, принимающих значения из конечного множества. Предложен метод оценивания параметров распределения Гиббса конечнозначных процессов и полей на основе применения достаточных статистик. Этот метод пригоден для оценивания параметров гиббсовских моделей марковских конечнозначных процессов и полей произвольной размерности. Примеры практического применения предложенного метода для оценивания параметров бинарных гиббсовских полей подтверждают его работоспособность. В примере 2 отмечена избыточность набора параметров для распределения Гиббса бинарной модели общего вида и предложен критерий избыточности, основанный на ранге матрицы, определяемой по совокупности достаточных статистик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Derin H., Kelly P. A.** Discrete-index Markov-type random processes // Proc. IEEE. 1989. **77**, N 10. P. 1485.
2. **Geman S., Geman D.** Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images // IEEE Trans. 1984. **PAMI-6**, N 6. P. 721.
3. **Derin H., Elliott H.** Modelling and segmentation of noisy and textured images using Gibbs random fields // IEEE Trans. 1987. **PAMI-9**, N 1. P. 39.
4. **Gimel'farb G. L.** Texture modelling by multiple pairwise pixel interactions // IEEE Trans. 1996. **PAMI-18**, N 11. P. 25.
5. **Гимельфарб Г. Л., Залесный А. В.** Модели марковских случайных полей в задачах генерации и сегментации текстурных изображений // Средства интеллектуализации кибернетических систем. Киев: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова, 1989. С. 27.
6. **Аверинцев М. Б.** Описание марковских случайных полей гиббсовскими условными вероятностями // Теория вероятностей и ее применения. 1972. **XVII**, № 1. С. 21.
7. **Леман Э.** Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991.
8. **Закс Ш.** Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975.

Новосибирский государственный
технический университет,
E-mail: vasyukov@ktor.ref.nstu.ru

Поступила в редакцию
9 апреля 2001 г.