РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 2001

СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

УДК 621.391 : 53.08

Ю. Е. Воскобойников

(Новосибирск)

ТОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СИНТЕЗ РЕКУРРЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Вводятся точностные характеристики рекуррентного алгоритма, характеризующие систематическую и случайную ошибки получаемого решения. Сформулированы вариационные задачи синтеза для номера итерации, на которой рекуррентный алгоритм обладает требуемыми точностными характеристиками. Это позволяет существенно повысить точность решения плохо обусловленных или вырожденных систем линейных алгебраических уравнений.

Введение. Многие задачи оценивания параметров динамических систем и восстановления сигналов сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$K\varphi = f, \tag{1}$$

где матрица K имеет размер $N \times M$; φ – искомый вектор решения СЛАУ размерности M. В общем случае эта система несовместна, возможно, вырождена, а матрица K прямоугольная и вместо точной правой части f доступен вектор $\tilde{f} = f + \eta$, где η – случайный вектор «шума измерений», обусловленный погрешностями измерений. Поэтому в качестве приближенного решения системы (1), устойчивого к этим погрешностям, принимают регуляризированное решение φ_α, доставляющее минимум функционалу

$$F_\alpha[\varphi] = \left\|\tilde{f} - K\varphi\right\|^2_{W_f} + \alpha\left\|\varphi - m_\varphi\right\|^2_{W_\varphi}, \tag{2}$$

где запись $\|\theta\|^2_{W_\varphi}$ обозначает квадратичную форму $\varphi^{\mathrm{T}} W_\varphi \varphi$, индекс т – символ транспонирования; W_f, W_φ – неотрицательно-определенные матрицы размеров $N \times N$ и $M \times M$ соответственно; m_φ – некоторый вектор размерности M, называемый «пробным» решением; α – параметр регуляризации. Матрица W_f определяется на основе априорной информации о числовых характеристиках вектора η и, как правило, с точностью до константы равна V_η^{-1}, где V_η – корреляционная матрица вектора шума. Матрица W_φ размеров $M \times M$ характеризует априорную гладкость φ, в частности порядок регуляризации. Задавая различным образом W_φ, W_f, можно получить широкий спектр регуляризированных решений: от регуляризированного по А. Н. Тихонову до байесовского [1–3]. В общем случае вектор φ_α находится как решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$(K^{\mathrm{T}}W_f K + \alpha W_\varphi)\varphi_\alpha = K^{\mathrm{T}}W_f\widetilde{f} + \alpha W_\varphi m_\varphi, \tag{3}$$

и это решение единственно при $\alpha > 0$, если нуль-пространства матриц W_φ и $W_f^{1/2}K$ не имеют общих векторов. В дальнейшем предполагается, что $W_f = V_\eta^{-1}$, $V_\eta = \mathrm{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_N^2\}$.

В ряде случаев (особенно при последовательном измерении очередной проекции $\widetilde{f}_i$ правой части) используют рекуррентный алгоритм вычисления φ_α. В работе [4] показано, что решение системы рекуррентных уравнений

$$\varphi_\alpha^{(n)} = \varphi_\alpha^{(n-1)} + \frac{P_\alpha^{(n)}}{\sigma_n^2}k_n^{\mathrm{T}}(\widetilde{f}_n - k_n\varphi_\alpha^{(n-1)}), \tag{4}$$

$$P_\alpha^{(n)} = P_\alpha^{(n-1)} - \frac{P_\alpha^{(n-1)}k_n^{\mathrm{T}}k_nP_\alpha^{(n-1)}}{\sigma_n^2 + k_nP_\alpha^{(n-1)}k_n^{\mathrm{T}}}, \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{5}$$

где $P_\alpha^{(0)} = (\alpha W_\varphi)^{-1}$, $\varphi_\alpha^{(0)} = m_\varphi$, k_n – n-я строка матрицы K, σ_n^2 – дисперсия измерения $\widetilde{f}_n$, задается матричной системой уравнений

$$(K_n^{\mathrm{T}}V_{n\eta}^{-1}K_n + \alpha W_\varphi)\varphi_\alpha^{(n)} = K_n^{\mathrm{T}}V_{n\eta}^{-1}\widetilde{F}_n + \alpha W_\varphi m_\varphi \tag{6}$$

и матрицей

$$P_\alpha^{(n)} = (\alpha W_\varphi + K_n^{\mathrm{T}}V_{n\eta}^{-1}K_n)^{-1}, \tag{7}$$

где K_n – матрица размеров $n \times M$, составленная из первых n строк матрицы K; $\widetilde{F}_n$ – вектор, составленный из первых n проекций вектора $\widetilde{f}$; $V_{n\eta}$ – диагональная матрица размеров $n \times n$ вида

$$V_{n\eta} = \mathrm{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2\}. \tag{8}$$

Следовательно, вектор $\varphi_\alpha^{(N)}$, определяемый уравнениями (4), (5), является решением системы (3). Таким образом, алгоритм (4), (5) при поступлении нового измерения строит регуляризированное решение без решения новой системы уравнений, что обусловливает высокую вычислительную эффективность рекуррентного алгоритма.

Очевидно, что ошибка решения $\varphi_\alpha^{(n)}$ зависит от параметра регуляризации α и номера итерации n. Если для выбора «подходящего» значения параметра регуляризации предложены различные детерминированные [1, 5] и статистические [2, 6] алгоритмы, то выбор момента останова рекуррентного алгоритма не получил должного рассмотрения в литературе. При практическом применении рекуррентных алгоритмов этот аспект весьма важен, так как минимальное значение ошибки может быть достигнуто при $n < N$ (этот факт иллюстрирует рис. 3). Поэтому возникает вопрос о выборе номера n, при котором норма ошибки решения минимальна или сам рекуррентный алгоритм отвечает определенным требованиям. Для ответа на этот вопрос в данной работе вводятся точностные характеристики рекуррентного алгоритма (4), (5), на основе которых решаются задачи анализа и синтеза этого алгоритма. Заметим, что решение задачи синтеза позволяет определить наименьшее число измерений, необходимых для получения регуляризированного решения с требуемой точностью, т. е. осуществить в определенном смысле планирование эксперимента.

Точностные характеристики рекуррентного алгоритма. На каждом шаге n вектор ошибки решения $\varphi_\alpha^{(n)}$:

$$\varepsilon_\alpha^{(n)} = \varphi_\alpha^{(n)} - \varphi, \tag{9}$$

где φ – искомое решение, можно записать в виде суммы двух составляющих $\varepsilon_\alpha^{(n)} = \xi_\alpha^{(n)} + b_\alpha^{(n)}$, где

$$\xi_\alpha^{(n)} = \varphi_\alpha^{(n)} + \overline{\varphi}_\alpha^{(n)} \tag{10}$$

– вектор случайной ошибки, обусловленной «передачей» в решение $\varphi_\alpha^{(n)}$ случайной погрешности задания исходных данных;

$$b_\alpha^{(n)} = \overline{\varphi}_\alpha^{(n)} - \varphi \tag{11}$$

– вектор систематической ошибки, вызванной введением регуляризации. Вектор $\overline{\varphi}_\alpha^{(n)}$ – решение системы (4), (5) при точных значениях f_n.

Рассмотрим вычисление этих векторов. Введем $(M \times M)$-матрицу $B(n)$, входящую в выражение

$$b_\alpha^{(n)} = B(n)(m_\varphi - \varphi) = B(n) b^{(0)}, \tag{12}$$

где $b^{(0)} = m_\varphi - \varphi$ – вектор «начального» смещения пробного решения m_φ относительно φ. Назовем $B(n)$ матрицей смещения, «идеальная» матрица $B(n)$ должна быть нулевой $(0_{M \times M})$. Тогда $b_\alpha^{(n)} = 0_{M \times M}(m_\theta - \theta) = 0_{M \times 1}$. Можно показать, что матрица $B(n)$ определяется матричным соотношением $B(n) = \alpha(\alpha W_\varphi + K_n^{\mathrm{T}} V_{n\eta}^{-1} K_n)^{-1} W_\varphi$, которое непосредственно следует из выражения

$$\overline{\varphi}_\alpha^{(n)} = (\alpha W_\varphi + K_n^{\mathrm{T}} V_{n\eta}^{-1} K_n)^{-1} (K_n^{\mathrm{T}} V_{n\eta}^{-1} K_n \varphi + \alpha W_\varphi m_\varphi) =$$
$$= \varphi + \alpha(\alpha W_\varphi + K_n^{\mathrm{T}} V_{n\eta}^{-1} K_n)^{-1} W_\varphi (m_\varphi - \varphi).$$

Утверждение 1. Матрица $B(n)$ для алгоритма (4), (5) определяется выражением

$$B(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(I - \frac{P_\alpha^{(j)} k_{j+1}^{\mathrm{T}} k_{j+1}}{k_{j+1} P_\alpha^{(j)} k_{j+1}^{\mathrm{T}} + \sigma_{j+1}^2} \right) \tag{13}$$

и допускает рекуррентное вычисление:

$$B(n)=\left(I-\frac{P_\alpha^{(n-1)}k_n^{\mathrm{T}}k_n}{k_nP_\alpha^{(n-1)}k_n^{\mathrm{T}}+\sigma_n^2}\right)B(n-1), \qquad (14)$$

при этом $P_\alpha^{(0)}=(\alpha W_\varphi)^{-1}$, $B(0)=I, n=1,\dots,N$.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

В качестве неслучайной характеристики вектора случайной ошибки идентификации $\xi_\alpha^{(n)}$ примем корреляционную матрицу $V_\xi(n)=M[\xi_\alpha^{(n)}\xi_\alpha^{(n)\mathrm{T}}]$. Можно показать, что эта матрица определяется выражением

$$V_\xi(n)=(\alpha W_\varphi+K_n^{\mathrm{T}}V_{n\eta}^{-1}K_n)^{-1}K_n^{\mathrm{T}}V_{n\eta}^{-1}K_n(\alpha W_\varphi+K_n^{\mathrm{T}}V_{n\eta}^{-1}K_n)^{-1}.$$

Утверждение 2. При справедливости представления (8) корреляционная матрица $V_\xi(n)$ допускает рекуррентное вычисление:

$$V_\xi(n)=(I-G_\alpha(n)k_n)V_\xi(n-1)(I-G_\alpha(n)k_n)^{\mathrm{T}}+\sigma_n^2G_\alpha(n)G_\alpha^{\mathrm{T}}(n), \qquad (15)$$
$$V_\xi(0)=0, \quad n=1,2,\dots,$$

где $G_\alpha(n)=\dfrac{P_\alpha^{(n-1)}k_n^{\mathrm{T}}}{k_nP_\alpha^{(n-1)}k_n^{\mathrm{T}}+\sigma_n^2}$.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Введенная матрица смещения $B(n)$ достаточно полно характеризует систематическую ошибку рекуррентного алгоритма решения системы уравнений (1), а матрица $V_\xi(n)$ – случайную ошибку. Однако для упрощения анализа целесообразно ввести некоторые характеристики этих матриц. Нетрудно показать, что среднеквадратическая ошибка решения $\varphi_\alpha^{(n)}$, определяемая выражением

$$\Delta^2(n)=M\left[\left\|\varphi_\alpha^{(n)}-\varphi\right\|^2\right], \qquad (16)$$

допускает представление в виде суммы:

$$\Delta^2(n)=b_\alpha^{(n)\mathrm{T}}b_\alpha^{(n)}+\mathrm{Sp}[V_\xi(n)], \qquad (17)$$

где $M[\,]$ – оператор математического ожидания по распределению шума η, $\mathrm{Sp}[\,]$ – след матрицы. Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в (17).

Вычислить на практике вектор $b_\alpha^{(n)}$ невозможно из-за незнания «начального» смещения – вектора $b^{(0)}$, поэтому введем скалярную величину $U_b(n)$:

$U_b(n)=\dfrac{\left\|b_\alpha^{[1](n)}\right\|^2}{M\left\|1_{M\times1}\right\|^2}$, где $1_{M\times1}$ – единичный вектор, задающий «начальное» единичное смещение; $b_\alpha^{[1](n)}$ – вектор смещения, обусловленный единичным вектором $1_{M\times1}$ «начального» смещения $b^{(0)}$. Величина M в знаменателе необходима для учета квадрата нормы: $\left\|1_{M\times 1}\right\|^2 = M$. Можно показать, что

$$U_b(n) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{M}\{B(n)\}_{i,\,j}\right)^2. \tag{18}$$

Величину $U_b(n)$ можно рассматривать как коэффициент передачи квадрата нормы вектора «начального» смещения $b^{(0)}$ в квадрат нормы вектора смещения $b_\alpha^{(n)}$ решения $\varphi_\alpha^{(n)}$. Справедлив предел $\lim_{n\to 0} U_b(n) = 1$, и функция $U_b(n)$ является невозрастающей.

Перейдем ко второму слагаемому в (17). Введем величину

$$U_\xi(n) = \frac{\mathrm{Sp}[V_\xi(n)]}{\sigma_n^2}, \tag{19}$$

которую можно трактовать как коэффициент передачи дисперсии шума в величину $M\left[\left\|\xi_\alpha^{(n)}\right\|^2\right] = \mathrm{Sp}[V_\xi(n)]$. Из выражения (15) следует алгоритм вычисления $U_\xi(n)$:

$$U_\xi(n) = \frac{1}{\sigma_n^2}\mathrm{Sp}[(I - G_\alpha(n)k_n)V_\xi(n-1)(I - G_\alpha(n)k_n)^{\mathrm{T}}] + \mathrm{Sp}[G_\alpha(n)G_\alpha^{\mathrm{T}}(n)].$$

Используя введенные величины $U_b(n)$ и $U_\xi(n)$, среднеквадратическую ошибку решения $\varphi_\alpha^{(n)}$ можно аппроксимировать выражением

$$\Delta(n) \approx U_b(n)\left\|b^{(0)}\right\|^2 + U_\xi(n)\sigma_n^2, \tag{20}$$

а сами величины $U_b(n)$ и $U_\xi(n)$ достаточно полно характеризуют систематическую и случайную ошибки рекуррентного алгоритма, и их можно назвать его точностными характеристиками.

Зависимость величин U_b, U_ξ от номера итерации n демонстрируют рис. 1 и 2 соответственно. На них показаны графики зависимостей для двух значений параметра регуляризации: $\alpha = 10^{-5}$ (кривая 1) и $\alpha = 10^{-1}$ (кривая 2). Размер матрицы K СЛАУ (1) задан равным 80×30, а число обусловленности $1{,}6\times 10^8$. Поведение зависимостей $U_b(n)$, $U_\xi(n)$ еще раз подчеркивает известное противоречие между разрешающей способностью ($U_b(\alpha)$) и устойчивостью ($U_\xi(\alpha)$) рекуррентного алгоритма.

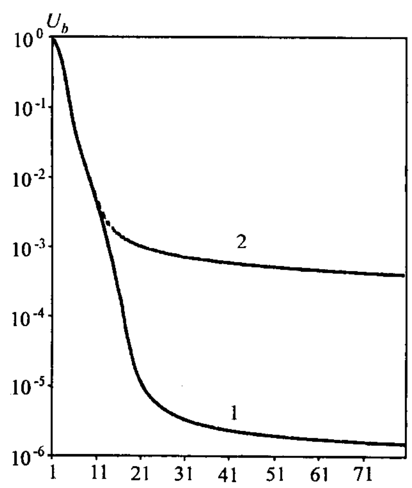

Рис. 1

Очевидно, что, вычисляя эти характеристики, можно на каждой итерации осуществлять точностной анализ построенного рекуррентного алгорит-

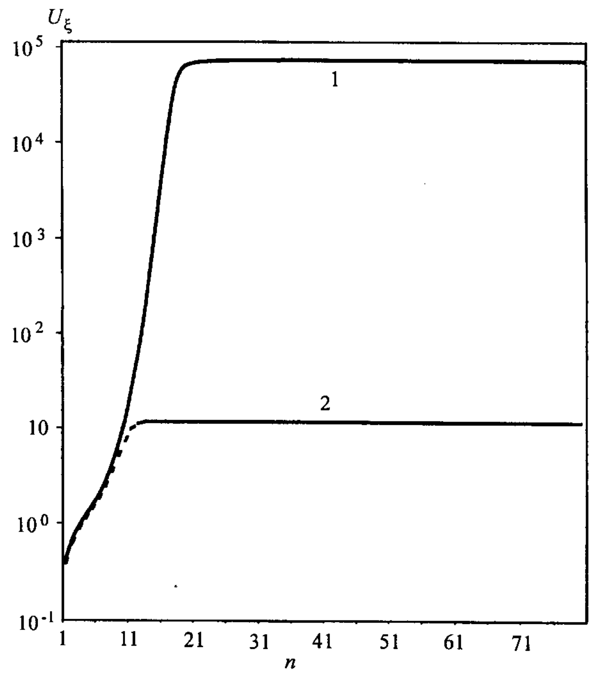

Рис. 2

ма и оценивать среднеквадратическую ошибку решения, используя для этого формулу (20) и подставляя вместо неизвестного квадрата нормы $\left\| b^{(0)} \right\|^2$ некоторую оценку. Для иллюстрации этой возможности на рис. 3 приведены графики функций

$$\Delta_1(n) = U_b(n) S_{b^{(0)}} + U_\xi(n) \sigma_n^2, \tag{21}$$

$$\Delta_2(n) = \left\| \varphi_\alpha^{(n)} - \varphi \right\|^2 \tag{22}$$

для вышеописанной СЛАУ (см. рис. 1, 2), где $S_{b^{(0)}}$ – оценка квадрата нормы $\left\| b^{(0)} \right\|^2$. Относительный уровень шума 5 %, а значение $S_{b^{(0)}}$ было занижено на 20 % по сравнению с точной величиной $\left\| b^{(0)} \right\|^2$. Видно, что значения случайной величины $\Delta_2(n)$ колеблются около функции $\Delta_1(n)$, являющейся оценкой для $M[\Delta_2(n)]$, и, следовательно, величину $\Delta_1(n)$ можно использовать для анализа рекуррентного алгоритма (4), (5).

Синтез рекуррентного алгоритма решения СЛАУ. Важным свойством характеристик $\Delta_1(n)$, $U_b(n)$, $U_\xi(n)$ является возможность «априорного» их вычисления, т. е. до начала выполнения самого рекуррентного алгоритма, так как вектор измерения $\tilde{f}$ в расчетах точностных характеристик не используется. Это позволяет определить число шагов n, исходя из требуемых значений этих характеристик, т. е. провести синтез рекуррентных алгоритмов. Для этого сформулируем следующие задачи.

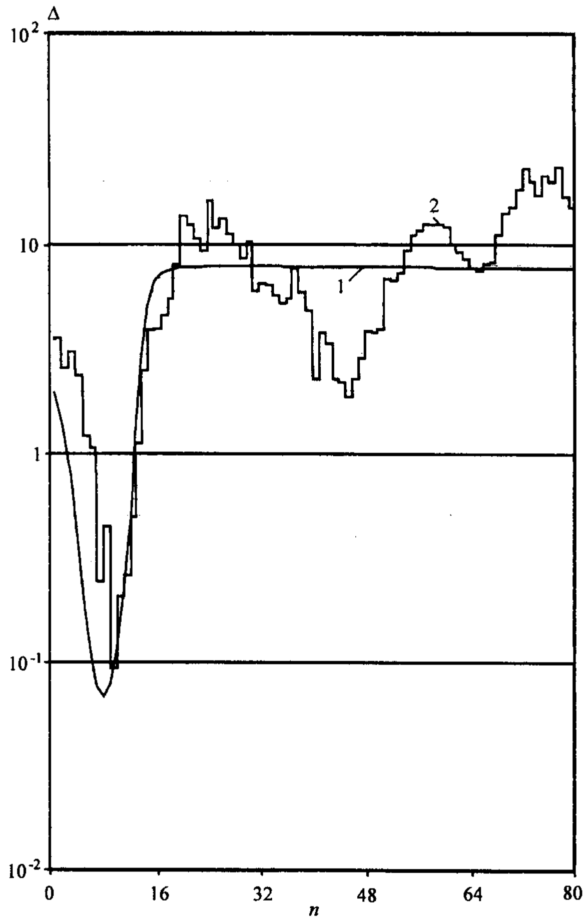

Рис. 3

Задача А. $\min\limits_{n>0} \Delta_1(n)$.

Задача В. $\min\limits_{n>0} U_b(n)$ при ограничении $U_\xi(n) \le U_\xi^{\max}$.

Задача С. $\min\limits_{n>0} U_\xi(n)$ при ограничении $U_b \le U_b^{\max}$.

Заметим, следующее.

– Решение задачи А (обозначим n_A) является оценкой номера итерации, на которой достигается минимум среднеквадратической ошибки решения $\varphi_\alpha^{(n)}$, но в качестве априорной информации необходимо задать значения $S_{b^{(0)}}$ и σ_n^2, точное значение последней (дисперсии шума измерения) часто неизвестно. Поэтому имеет смысл перейти к построению рекуррентных алгоритмов, оптимальных (в смысле задачи А) на классах решений и шумов, задаваемых следующими ограничениями:

$$\left\| b^{(0)} \right\|^2 \le S_{\max}, \quad \sigma_n^2 \le \sigma_{\max}^2. \tag{23}$$

Подставляя $S_{\max}$, $\sigma^2_{\max}$ в (21) и решая задачу А, находим значение n_A – номер итерации, доставляющей минимум среднеквадратической ошибки решения $\varphi_\alpha^{(n)}$ на классах, определяемых (23).

– Решение задачи В (обозначим n_B) минимизирует систематическую ошибку рекуррентного алгоритма с требуемой устойчивостью к шуму измерения.

– Решение задачи С (обозначим n_C) минимизирует норму случайной ошибки при требуемой разрешающей способности алгоритма.

С учетом монотонного характера зависимостей $U_b(n)$ и $U_\xi(n)$ решение задачи В определяется как корень нелинейного уравнения

$$U_\xi(n_B) \cong U_\xi^{\max}, \tag{24}$$

а решение задачи С – как корень нелинейного уравнения

$$U_b(n_C) \cong U_b^{\max}. \tag{25}$$

Знак $\cong$ указывает, что решение ищется среди целых значений аргументов зависимостей $U_b(n)$ и $U_\xi(n)$.

Отметим, что сформулированные вариационные задачи синтеза наполняют задачу выбора момента останова содержательным смыслом в терминах измерительных систем, а их решение в определенной степени компенсирует неудачный выбор параметра регуляризации.

Заключение. Предложенные в работе точностные характеристики рекуррентного алгоритма решения плохо обусловленных СЛАУ позволяют не только проводить анализ построенного алгоритма, но и выполнять его синтез, т. е. выбирать номер итерации прекращения работы рекуррентного алгоритма, на которой обеспечиваются требуемые точностные характеристики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Вначале получим выражение для вектора смещения $b_\alpha^{(n)}$. Непосредственно из (4) вытекает, что

$$b_\alpha^{(n)} = \left(I - \frac{P_\alpha^{(n)} k_n^{\mathrm{T}} k_n}{\sigma_n^2} \right) b_\alpha^{(n-1)}.$$

Учитывая тождество [4]

$$\frac{P_\alpha^{(n)} k_n^{\mathrm{T}}}{\sigma_n^2} = \frac{P_\alpha^{(n-1)} k_n^{\mathrm{T}}}{k_n P_\alpha^{(n-1)} k_n^{\mathrm{T}} + \sigma_n^2},$$

перепишем $b_\alpha^{(n)}$:

$$b_\alpha^{(n)} = \left(I - \frac{P_\alpha^{(n-1)} k_n^{\mathrm{T}} k_n}{k_n P_\alpha^{(n-1)} k_n^{\mathrm{T}} + \sigma_n^2(n)} \right) b_\alpha^{(n-1)}.$$

Учитывая далее определения $b_\alpha^{(n)} = B(n) b^{(0)}$, $b_\alpha^{(n-1)} = B(n-1) b^{(0)}$, приходим к выражениям (13) и (14) утверждения 1.

Доказательство утверждения 2. Обратимся к соотношению (4), из которого с учетом определения (10) получим

$$\xi_{\alpha}^{(n)} = \xi_{\alpha}^{(n-1)} + \frac{P_{\alpha}^{(n-1)} k_n^{\mathrm{T}}}{k_n P_{\alpha}^{(n-1)} k_n^{\mathrm{T}} + \sigma_n^2} [\eta(n) - k_n \xi_{\alpha}^{(n-1)}] =$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. **Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И.** Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
3. **Воскобойников Ю. Е.** Методы решения некорректных задач параметрической идентификации. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1996.
4. **Воскобойников Ю. Е., Кисленко Н. П.** Адаптивный рекуррентный регуляризирующий алгоритм восстановления сигналов и изображения // Автометрия. 1997. № 4. С. 55.
5. **Морозов В. А., Гребенников А. И.** Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1992.
6. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующих алгоритмов восстановления изображений // Автометрия. 1995. № 3. С. 68.

Новосибирский государственный
архитектурно-строительный университет,
E-mail: voscob@mail.ru

Поступила в редакцию
21 июня 2000 г.