РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 2001

УДК 62-50

С. В. Соколов, И. В. Щербань

(Ростов-на-Дону)

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ, ОПТИМАЛЬНОГО ПО НЕЛИНЕЙНОМУ ВЕРОЯТНОСТНОМУ КРИТЕРИЮ

Рассмотрен новый алгоритм вычисления точного управления нелинейным стохастическим объектом, локально-оптимального в смысле вероятностного критерия общего вида. Приведен пример практического использования предложенного метода.

Метод вычисления вектора кусочно-непрерывного управления $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_N), \mathbf{U} \in R^N$, нелинейным стохастическим объектом

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{f}_0(\mathbf{X}, t)\mathbf{V}_t + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t), \tag{1}$$

оптимального в смысле некоторого вероятностного критерия J_0 общего вида

$$J_0 = \int_T \int_{\mathbf{X}_*} \Phi[\rho(\mathbf{X}, t), \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)] d\mathbf{X} dt, \tag{2}$$

рассмотрен в общей постановке в [1]. В формулах (1), (2) использованы следующие обозначения: $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$, $\mathbf{f}_0 = \| f_{0_{ik}} \|$ – известные векторная и матричная функции, удовлетворяющие условию Липшица; $\mathbf{V}_t$ – белый гауссовский нормированный вектор-шум; Φ – известная аналитическая функция; ρ – плотность распределения вектора $\mathbf{X}$; $\mathbf{X}_*$ – область определения аргумента $\mathbf{X}$, в которой ищется оптимум J_0; $T = [t_0, t_k]$ – конечный временной интервал оптимизации. Немаловажной особенностью предложенного в [1] подхода является возможность его обобщения на случай, когда управление U объектом (1) формируется на основе использования вектора измерений $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_M)$:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{W}_t,$$

где $\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_M)$ – известная нелинейная вектор-функция; $\mathbf{W}_t$ – белый гауссовский вектор-шум с матрицей интенсивностей $D_W(t)$, т. е. когда $\mathbf{U} = \mathbf{U}_Z = \mathbf{U}(\mathbf{Z}, t)$, а плотность распределения ρ в (2) апостериорна и описывается уже уравнением не Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК), а интегро-дифференциальным уравнением Стратоновича [2]:

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{X},t)}{\partial t}=L\{\rho(\mathbf{X},t)\}+[F(\mathbf{X},t)-F(t)]\rho(\mathbf{X},t), \tag{3}$$

где $L\{\rho(\mathbf{X},t)\}$ – оператор ФПК:

$$L\{\rho(\mathbf{X},t)\}=-\operatorname{div}\left\{\left[f+u_z+\frac{1}{2}\frac{\partial f_0}{\partial x}(f_0^{\mathrm{T}})^{(\mathrm{v})}\right]\rho\right\}+\frac{1}{2}\operatorname{div}\{\overline{\operatorname{div}}[f_0 f_0^{\mathrm{T}}\rho]\},$$

$(f_0^{\mathrm{T}})^{(\mathrm{v})}$ – операция преобразования матрицы f_0^{T} в вектор, компоненты которого – столбцы матрицы f_0^{T}; $\overline{\operatorname{div}}$ – символ операции дивергенции строки матрицы;

$$F(\mathbf{X},t)=F=-\frac{1}{2}[\mathbf{Z}-\mathbf{H}(\mathbf{X},t)]^{\mathrm{T}}D_W^{-1}[\mathbf{Z}-\mathbf{H}(\mathbf{X},t)],$$

$$F(t)=F_0=\int_{\mathbf{X}}F(\mathbf{X},t)\rho(\mathbf{X},t)d\mathbf{X}.$$

В то же время применение рассмотренного метода [1] требует, во-первых, решения двухточечной краевой задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, связанного с большим объемом вычислительных затрат, а во-вторых, необходимости использования при синтезе апостериорного управления всей совокупности наблюдений $\mathbf{Z}$ на интервале T, что для ряда практических задач (например, управления движущимися объектами) приводит к невозможности непосредственного применения данного метода.

Постановка задачи. С целью преодоления подобных ограничений рассмотрим алгоритм вычисления оптимального управления в обоих возможных случаях управления объектом (1) – при наличии измерений и без них, используя вместо глобального критерия (2) локальный критерий

$$J=\int_{\mathbf{X}_*}\Phi_1[\rho(\mathbf{X},t)]d\mathbf{X}+\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbf{X}_*}\Phi_2[\mathbf{U}(\mathbf{X},t)]d\mathbf{X}dt, \tag{4}$$

где Φ_i, $i=1,2$, – известные положительно-определенные нелинейные функции.

Форма (4) отражает естественное, аддитивное формирование критерия, обеспечивающего оптимальность искомого решения в смысле как текущей точности, так и текущих затрат на управление, и в сравнении с (2) более адекватна задачам управления процессами в реальном времени (в частности, процессами движения). Кроме того, предполагается нелинейная зависимость функции Φ_1 от плотности распределения $\rho(\mathbf{X},t)$, что по сравнению с традиционной постановкой задачи является более общим случаем. Действительно, при оптимизации классических функционалов [3], зависящих от самого случайного процесса $X(t)$, необходимо (в силу случайности $X(t)$) их статистическое осреднение, определяющее линейную интегральную зависимость от ρ (где функция $\rho(\mathbf{X},t)$ описывается уравнением ФПК при отсутствии измерений и уравнением (3) при их наличии). При этом уже до начала формирования вектора **U** осуществляется аппроксимация плотности ρ (обычно гауссовская) и вместо уравнения для ρ вводятся уравнения ее параметров (оценок процесса), в функции которых далее и формируется управление. В рассматриваемой постановке вектор управления **U**, определяемый, в свою очередь, из условия оптимизации критерия (4), функционально зависит, как показано далее, непосредственно от плотности ρ и второе слагаемое (4) имеет вид $\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\mathbf{X}_*}\Phi_2[\mathbf{U}\{\rho(\mathbf{X},t)\}]d\mathbf{X}dt$. Таким образом, рассматриваемый ниже алгоритм, позволяя избежать принципиальной необходимости указанной аппроксимации, обеспечивает формирование точного (свободного от методических ошибок аппроксимации ρ) управления **U** и не требует решения двухточечной краевой задачи, что существенно сокращает общий объем вычислительных затрат. Различные вариации вида функции Φ_1 позволяют при этом охватить достаточно широкий класс условий оптимальности по точности, требуемых на практике:

– максимум (минимум) текущего значения вероятности существования вектора **X** в области $\mathbf{X}_*$: $\Phi_1(\rho)=\pm\rho$;

– минимум отклонения искомой плотности вероятности ρ от заданной g: $\Phi_1(\rho)=(\rho-g)^2$, $\Phi_1(\rho)=|\rho-g|$, $\Phi_1(\rho)=-\rho\ln(g/\rho)$ (критерий Кульбака) и т. д.;

– максимум текущей информации о векторе состояния **X**: $\Phi_1(\rho)=$ $=\rho\left[\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{X}}\right]\left[\frac{\partial\ln\rho}{\partial\mathbf{X}}\right]^{\mathrm{T}}$ (критерий Фишера) и других. Функции Φ_2 охватывают условия оптимальности по текущим затратам на регулирование (энергетическое обеспечение) процесса (как правило, функция Φ_2 выбирается возрастающей, положительно-определенной: квадратичной $\Phi_2(U)=U^{\mathrm{T}}DU$ или экспоненциальной $\Phi_2(U)=\exp(\alpha^{\mathrm{T}}U)$, где D,α – матрица и вектор известных постоянных коэффициентов [3]).

Так как дальнейшее вычисление оптимального управления осуществляется для обоих возможных классов управлений **U** – априорного $\mathbf{U}(\mathbf{X},t)$ и апостериорного $\mathbf{U}(\mathbf{Z},t)$, то для последующей возможности эффективной вычислительной реализации априорного управления представим вектор $\mathbf{U}=$ $=\mathbf{U}(\mathbf{X},t)$ в виде конечного разложения по системе ортонормированных или степенных функций векторного аргумента $\mathbf{X}$: $\{\Psi_1(\mathbf{X}),\ldots,\Psi_S(\mathbf{X})\}$ [3] (для апостериорного управления подобная необходимость отсутствует). Тогда, обозначив вектор $(\Psi_1(\mathbf{X}),\ldots,\Psi_S(\mathbf{X}))=\mathbf{\Psi}$, имеем

$$\mathbf{U}(\mathbf{X},t)=(E\otimes\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}})\mathbf{U}_t=E_0(\mathbf{X})\mathbf{U}_t, \tag{5}$$

где E – единичная матрица соответствующей размерности; ⊗ – знак кронекеровского произведения; $\mathbf{U}_t=(U(t)_1,\ldots,U(t)_{(N\times S)})$ – искомый вектор коэффициентов разложения вектора управления $\mathbf{U}(\mathbf{X},t)$; $E_0=E\otimes\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}$.

Исходя из изложенного, задачу синтеза локально-оптимального управления объектом (1) в первом случае (при отсутствии измерений) окончательно сформулируем как задачу поиска вектора $\mathbf{U}_t$, обеспечивающего оптимум функционала J (4) при условии, что функция плотности распределения вектора состояния **X** описывается уравнением ФПК, во втором случае (при наличии измерений **Z**) – как задачу формирования вектора $\mathbf{U}_Z$, оптимального в смысле (4), при условии, что функция апостериорной плотности вероятности (АПВ) вектора состояния **X** описывается уравнением (3).

Сущность предлагаемого метода. Для решения поставленной задачи используем тот известный факт, что при оптимизации локального критерия (4) (т. е. когда требуется обеспечить экстремум в текущий момент времени t) функционал трансформируется в скалярную функцию времени, оптимальность которой обеспечивается в текущий момент времени [2] за счет выбора соответствующего управления $\mathbf{U}_t$. В этом случае при неотрицательно-определенной критериальной функции для обеспечения ее минимального значения в каждый момент времени достаточно, чтобы ее производная по времени, взятая с обратным знаком, имела максимум $\max\limits_{\mathbf{U}}\{-J(t)\}$, где $J(t)$ – текущее значение функционала. Для функционала (4) последнее условие может быть записано в виде

$$\max_{\mathbf{U}}\left\{-\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\mathbf{X}}\Phi_1[\rho(\mathbf{X},t)]d\mathbf{X}+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\mathbf{X}}\Phi_2[\mathbf{U}\{\rho(\mathbf{X},t)\}]d\mathbf{X}dt\right)\right\}$$

или при выполнении дифференцирования по t – в виде

$$\max_{\mathbf{U}}\left\{-\left(\int\limits_{\mathbf{X}}\frac{\partial\Phi_1[\rho]}{\partial\rho}\frac{d\rho}{dt}d\mathbf{X}+\int\limits_{\mathbf{X}}\Phi_2[\mathbf{U}\{\rho\}]d\mathbf{X}\right)\right\}. \tag{6}$$

Синтезируя априорное управление, подставляем в (6) выражение для правой части уравнения ФПК

$$\dot\rho=-\mathrm{div}\left\{\left[f+\frac{1}{2}\frac{\partial f_0}{\partial x}(f_0^{\mathrm{T}})^{(\mathrm{v})}\right]\rho-\frac{1}{2}\overline{\mathrm{div}}[f_0f_0^{\mathrm{T}}\rho]\right\}-\mathrm{div}\{U\rho\}=S[\rho]-\mathrm{div}\{U\rho\} \tag{7}$$

и, учитывая представление (5), имеем следующее уравнение относительно $\mathbf{U}_t$:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{U}_t}\left\{\int\limits_{\mathbf{X}}\frac{\partial\Phi_1[\rho]}{\partial\rho}(S[\rho]-\mathrm{div}\{E_0\mathbf{U}_t\rho\})d\mathbf{X}+\int\limits_{\mathbf{X}}\Phi_2[E_0\mathbf{U}_t]d\mathbf{X}\right\}=0.$$

Так как $\mathrm{div}\{E_0\mathbf{U}_t\rho\}=(\mathrm{div}(E_{0(1)}\rho),\dots,\mathrm{div}(E_{0(N\times S)}\rho))^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_t=E_1^{\mathrm{T}}[\rho]\mathbf{U}_t$, где $E_{0(i)}$ – i-й столбец матрицы E_0, то окончательное уравнение для определения оптимального вектора $\mathbf{U}_t$ имеет вид

$$\int\limits_{\mathbf{X}}\frac{\partial\Phi_1[\rho]}{\partial\rho}E_1^{\mathrm{T}}[\rho]d\mathbf{X}=\int\limits_{\mathbf{X}}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{U}_t}[E_0\mathbf{U}_t]d\mathbf{X}, \tag{8}$$

решение которого осуществляется исходя из конкретного вида функции Φ_2.

Дальнейший анализ и сравнение данного подхода с предложенным в [1] проведем на примере традиционной квадратичной формы функции $\Phi_2(\mathbf{U}) = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)^{\mathrm{T}} D\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ [1].

Уравнение (8) в этом случае принимает вид

$$\int_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} E_1^{\mathrm{T}} d\mathbf{X} = \mathbf{U}_t^{\mathrm{T}} \int_{\mathbf{X}} E_0^{\mathrm{T}} (D^{\mathrm{T}} + D) E_0 d\mathbf{X},$$

откуда

$$\mathbf{U}_t = G^{-1} \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} E_1 d\mathbf{X}, \tag{9}$$

где $G^{-1} = \int_{\mathbf{X}} E_0^{\mathrm{T}} (D^{\mathrm{T}} + D) E_0 d\mathbf{X} = \mathrm{const}$ – известная симметричная матрица.

Выражение (9) позволяет легко учесть возможные в общем случае ограничения на вектор $\mathbf{U}_t$ (например, $|\mathbf{U}_t| \le \mathbf{U}_{\max}$) при известных текущих значениях функции ρ, формируемых в процессе решения уравнения для ρ, полученного, в свою очередь, подстановкой (9) в (5) и далее в (7):

$$\dot{\rho} = S[\rho] - \mathrm{div}\left\{\rho E_0 G^{-1} \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} E_1[\rho] d\mathbf{X}\right\} = S[\rho] - E_1^{\mathrm{T}}[\rho] G^{-1} \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} E_1[\rho] d\mathbf{X}. \tag{10}$$

Таким образом, алгоритм вычисления оптимального в смысле (4) управления сводится, по существу, к интегрированию уравнения (10) с последующей реализацией соотношений (9) и (5) в отличие от подхода [1], требующего решения двухточечной краевой задачи для системы уравнений с частными производными. Во втором случае синтеза управления (при наличии измерений) подстановка правой части уравнения (3) в условие для определения искомого управления, аналогичное (6),

$$\max_{\mathbf{U}}\left\{-\left(\int_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} \dot{\rho} d\mathbf{X} + \Phi_2[\mathbf{U}_Z]\right)\right\}$$

приводит с учетом равенства $\mathrm{div}\{\mathbf{U}_Z \rho(\mathbf{X}, t)\} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U}_Z$ к уравнению вида (8):

$$\int_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \frac{\partial \Phi_2[\mathbf{U}_Z]}{\partial \mathbf{U}_Z}. \tag{11}$$

Для рассмотренной выше квадратичной функции Φ_2 уравнение (11) принимает особенно простой вид:

$$\int_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \mathbf{U}_Z^{\mathrm{T}} (D^{\mathrm{T}} + D),$$

из которого оптимальное апостериорное управление определяется как

$$\mathbf{U}_Z = (D^{\mathrm{T}} + D)^{-1} \int\limits_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} \frac{\partial \rho^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}. \tag{12}$$

Входящая в выражение (12) функция АПВ формируется в этом случае уже как решение уравнения, полученного подстановкой (12) в (3):

$$\dot{\rho} = S[\rho] + [F - F_0]\rho - \operatorname{div}\{\mathbf{U}_Z \rho\} = S[\rho] + [F - F_0]\rho -$$

$$- \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{X}} (D^{\mathrm{T}} + D)^{-1} \int\limits_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} \frac{\partial \rho^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = S_0[\rho] - \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{X}} (D^{\mathrm{T}} + D)^{-1} \int\limits_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} \frac{\partial \rho^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}. \tag{13}$$

Несмотря на существенный выигрыш в вычислительных затратах в обоих рассмотренных случаях по сравнению с [1], необходимость формирования, например, вектора $\mathbf{U}_Z$ в масштабе времени поступления измерений $\mathbf{Z}$ требует соответствующего в реальном времени решения уравнения (13). Особенностями последнего являются, во-первых, то, что оно представляет собой интегродифференциальное уравнение с частными производными, т. е. относится к тому же классу, что и уравнение Стратоновича (3), а во-вторых, то, что решение данного уравнения описывает функцию плотности распределения вектора $\mathbf{X}$ (АПВ). Следовательно, могут быть использованы все существующие методы решения уравнения АПВ [2, 3], в качестве одного из которых (как наиболее общего) рассмотрим далее использованный в [1] метод аппроксимации функции ρ конечным разложением по описанному выше вектору $\boldsymbol{\Psi}$: $\rho(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, где $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(t)$ – вектор коэффициентов разложения, определяемый в процессе дальнейшего решения.

В этом случае формирование функции ρ сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\boldsymbol{\beta}$:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \int\limits_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\Psi} S_0[\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}] d\mathbf{X} - \int\limits_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\Psi} \left[\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{X}}\right] d\mathbf{X} (D^{\mathrm{T}} + D)^{-1} \int\limits_{\mathbf{X}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} [\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}] \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}} \boldsymbol{\beta}\right] d\mathbf{X} \tag{14}$$

(в отличие от двухточечной краевой задачи для системы подобных уравнений, полученных в [1] при использовании аналогичного разложения). Очевидно, что решение системы уравнений (14) вполне может быть реализовано в реальном масштабе времени современными вычислительными средствами (например, в бортовом вычислителе при управлении движением объекта на основе текущей информации о навигационных параметрах).

П р и м е р. Для сравнительного анализа рассматриваемого подхода и предложенного в [1] с точки зрения вычислительных затрат и эффективности формирования управления проведен синтез априорного управления $\mathbf{u}$ нелинейным объектом [1]:

$$\dot{\mathbf{X}} = -a\mathbf{X}^3 + \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad X(t_0) = 0, \quad a = \mathrm{const} \tag{15}$$

($\mathbf{v}$ – белый гауссовский шум с интенсивностью D_{v}) при выборе в качестве критерия оптимальности локального критерия, аналогичного рассмотренному в [1]:

$$J = \int_{\mathbf{X}_*} [-\rho(\mathbf{X}, t)] d\mathbf{X} + \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbf{X}_*} D^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} dt.$$

Учитывая, что в этом случае $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}_t$, $E_0(\mathbf{X}) = \mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X})$, $E_1[\rho] = \partial[\mathbf{\Psi}(\mathbf{X})\rho(\mathbf{X}, t)]/\partial\mathbf{X}$, $\Phi_1[\rho] = -\rho$, выражение для оптимального вектора управления получаем в виде

$$\mathbf{u}_t = -\frac{1}{2D^2} \left[\int_{\mathbf{X}_*} \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}) \mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \right]^{-1} \int_{\mathbf{X}_*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\mathbf{\Psi}(\mathbf{X}) \rho(\mathbf{X}, t)] d\mathbf{X},$$

а полагая интервал $\mathbf{X}_*$ совпадающим с отрезком ортогональности функций $\mathbf{\Psi}$ (что естественно при адекватном формировании «энергетической» части критерия оптимизации) и $\mathbf{X}_* = [X_{\min}, X_{\max}]$, окончательно имеем

$$\mathbf{u}_t = \frac{1}{2D^2} \{ \mathbf{\Psi}(X_{\min}) \rho(X_{\min}, t) - \mathbf{\Psi}(X_{\max}) \rho(X_{\max}, t) \}.$$

Сравнивая полученное управление с приведенным в [1], отметим, что, несмотря на локальный характер, оно, во-первых, является точным, а во-вторых, оказывается существенно более простым. Уравнение для вектора коэффициентов разложения $\boldsymbol{\beta}$ априорной плотности $\rho = \mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}$ также оказывается гораздо проще и имеет вид, подобный уравнению (14) для АПВ:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \int_{\mathbf{X}_*} \mathbf{\Psi} [B_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{X}) + 3\mathbf{X}^2 a \mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}] d\mathbf{X} \boldsymbol{\beta} -$$

$$- \int_{\mathbf{X}_*} \mathbf{\Psi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}} (\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta})] d\mathbf{X} \frac{1}{2D^2} \{ \mathbf{\Psi}(X_{\min}) \mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}(X_{\min}) - \mathbf{\Psi}(X_{\max}) \mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}(X_{\max}) \} \boldsymbol{\beta},$$

где выражение для B_1 совпадает с приведенным в [1]:

$$B_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{X}) = \frac{D_{\mathrm{v}}}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}^2} + a\mathbf{X}^3 \frac{\partial \mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{X}}.$$

Для сравнительного анализа обоих методов вычисления управления объектом (15) проведено численное моделирование процесса управления, реализованного, как и в [1], для 30 стохастических траекторий движения объекта при параметрах, приведенных в [1], и на том же временном интервале $T = [0, 100\text{ с}]$. Вектор функций разложения $\mathbf{\Psi}$ сформирован идентично вектору $\boldsymbol{\varphi}$ в [1] из первых четырех функций ряда Фурье; $X_{\min} = -0{,}5$; $X_{\max} = 0{,}5$. Интегрирование уравнений для вектора $\boldsymbol{\beta}$ осуществлялось методом Рунге – Кутта 4-го порядка с шагом 0,02 с, оценка точности управления производилась аналогично [1] путем усреднения по ансамблю реализаций среднемодульных отклонений отдельно взятых траекторий от границ интервала X_* в течение времени T. В результате моделирования установлено, что при практически одинаковой точности обоих управлений (отличие погрешностей обеспечения существования переменной X в заданной области составило менее 2 %) требуемый объем памяти вычислителя при реализации локального управления сократился приблизительно в 7 раз при одновременном уменьшении времени вычислений приблизительно в 3 раза. Для более полной иллюстрации возможности эффективного применения разработанной методики проведено сравнение по точности приведенного управления с управлением, полученным на основе традиционного подхода [2] по критерию минимума среднего квадрата отклонения траектории объекта (15) от расчетной, описываемой уравнением $\dot{\mathbf{X}}_0 = -a\mathbf{X}_0^3$, $X(t_0) = 10^{-4}$.

Несмотря на большую простоту традиционного управления (в данном примере $\mathbf{u} = -\frac{1}{D^2}(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_0)$, где $\hat{\mathbf{X}}$ определяется на основе решения уравнений обобщенного гауссовского фильтра) и некоторое уменьшение общего времени вычислений (приблизительно в 1,6 раза), точность обеспечения существования переменной $\mathbf{X}$ в заданной области $\mathbf{X}_*$ снизилась приблизительно в 2,8 раза. Подобные результаты позволяют сделать вывод о возможности и эффективности преимущественного применения предложенного алгоритма вычисления оптимального управления реальными объектами на основе использования измерительной информации о параметрах состояния данных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Соколов С. В.** О решении проблемы синтеза стохастического оптимального управления на основе нелинейных вероятностных критериев // ПММ. 1996. **60**, № 4.
2. **Казаков И. Е.** Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М.: Наука, 1975.
3. **Справочник** по теории автоматического управления /Под ред. А. Красовского. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию 17 мая 1999 г.