

УДК 620.179.152

О. И. Недавний, В. И. Солодушкин, В. А. Удод

(Томск)

**ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЕТЕКТОРА
В РАДИОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
РАДИАЦИОННОГО КОНТРОЛЯ**

Получено выражение для оптимальной функции пространственной чувствительности детектора, используемого в радиометрической системе, предназначенной для обнаружения в контролируемом объекте плотных инородных включений, у которых лучевой размер описывается выпуклой функцией. Предложена простая геометрическая интерпретация основных результатов исследования.

При проектировании радиометрических систем радиационного контроля одной из основных является задача выбора функции пространственной чувствительности детектора (ФПЧД) ионизирующего излучения [1]. Ранее эта задача решалась путем выбора оптимальных параметров апертур при использовании детектора с однородной (в пределах его рабочей зоны) чувствительностью к падающему на него излучению [1–5]. Естественно предположить, что для эффективного обнаружения радиометрической системой в объекте контроля (ОК) инородных включений (ИВ) сложной конфигурации целесообразно использовать детекторы с неоднородной чувствительностью (ДНЧ). На практике такие детекторы используются в некоторых системах рентгеновской вычислительной томографии [6]. Между тем, насколько нам известно, теоретически не исследованы предельные возможности ДНЧ и не найдена оптимальная ФПЧД.

В настоящей работе решается задача выбора оптимальной ФПЧД применительно к радиометрической системе, предназначенной для обнаружения плотных инородных включений в ОК.

Указанную задачу будем решать при следующих предположениях и ограничениях:

1. Поток излучения пуассоновский.
2. Объект контроля однородный, постоянной толщины H с линейным коэффициентом ослабления (ЛКО) излучения μ_1 .
3. ИВ – трехмерное однородное тело, ограниченное выпуклой замкнутой цилиндрической поверхностью с двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными ее образующей. ЛКО ИВ – μ_2 , причем $\mu_2 > \mu_1$. ИВ расположено в пространстве так, что его образующие перпендикулярны пучку излучения (рис. 1).
4. ДНЧ технически реализован в виде комбинации однородного фильтрующего поглотителя (ФП) переменной толщины и детектора с однородной чувствительностью.

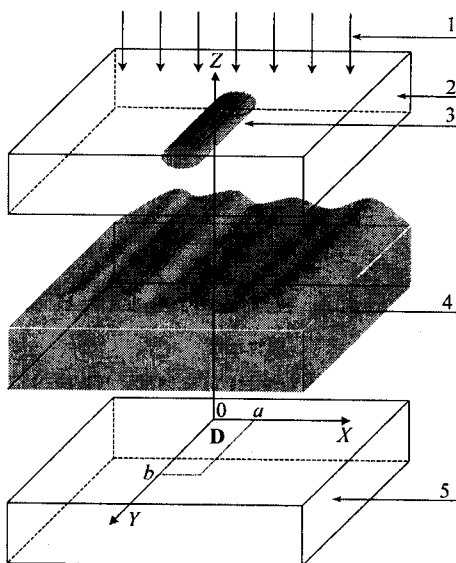


Рис. 1. Геометрия контроля: 1 – пучок излучения от источника; 2 – объект контроля; 3 – дефект; 4 – фильтрующий поглотитель; 5 – детектор излучения

5. ОК перемещается дискретно с малым (по сравнению с размерами ИВ) шагом.

6. Время измерения потока излучения детектором постоянно на каждом шаге и равно τ .

7. Критерий выбора ФПЧД – максимум отношения сигнал/шум, т. е. максимум выражения [1]

$$M = \frac{\Delta N}{\sigma}, \quad (1)$$

где ΔN – изменение среднего числа квантов, регистрируемых детектором, обусловленное наличием инородных включений в ОК (сигнал); σ – среднее квадратическое отклонение числа квантов, регистрируемых детектором при отсутствии инородных включений в ОК (шум).

Введем декартову систему координат. Ось OZ направим параллельно падающему пучку излучения, ось OY – параллельно образующей ИВ.

Зададим геометрическую форму ИВ системой неравенств: $f_1(x) \leq z \leq f_2(x)$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, т. е. проекцией ИВ на плоскость OXY будет прямоугольник $D = [0; a] \times [0; b]$.

Обозначим:

$$g_0(x) = \begin{cases} f_2(x) - f_1(x), & x \in [0; a]; \\ 0, & x \notin [0; a]. \end{cases}$$

Тогда лучевая длина (протяженность вдоль направления пучка излучения) ИВ будет описываться функцией $g(x, y) = g_0(x)\chi_D(x, y)$, где

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

– характеристическая функция множества D .

Так как ИВ выпукло, то при $x \in [0; a]$ будут выполняться соотношения $f_2''(x) < 0$, $f_1''(x) > 0$. Следовательно, $g_0''(x) < 0$.

Пусть Ω – сечение пучка излучения плоскостью $0XY$. Естественно предположить, что пучок излучения «перекрывает» ИВ, т. е. $D \subseteq \Omega$. Обычно это условие выполняется. Среднее число квантов излучения, зарегистрированных детектором за время τ при отсутствии ИВ, согласно [1],

$$N_1 = N_0 \varepsilon \iint_{\Omega} \exp(-\mu_1 H - \mu_3 p(x, y)) dx dy,$$

где $p = p(x, y)$ – лучевой размер ФП; μ_3 – ЛКО ФП; N_0 – плотность потока излучения; ε – эффективность регистрации излучения детектором. Среднее число зарегистрированных детектором квантов за время τ при наличии ИВ составит:

$$N_2 = N_0 \varepsilon \iint_{\Omega} \exp(\mu_3 p(x, y) - \mu_1 H + (\mu_1 - \mu_2) g(x, y)) dx dy.$$

Тогда величина сигнала от дефекта

$$\begin{aligned} \Delta N &= |N_1 - N_2| = N_1 - N_2 = \\ &= N_0 \varepsilon \tau \iint_{\Omega} (1 - \exp(-\mu g(x, y))) \exp(-\mu_1 H - \mu_3 p(x, y)) dx dy = \\ &= N_0 \varepsilon \tau (\exp(-\mu_1 H)) \iint_{\Omega} (1 - \exp(-\mu g(x, y))) \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mu = \mu_2 - \mu_1 > 0$. Среднее квадратическое отклонение числа квантов, регистрируемых детектором для пуассоновского потока излучения, равно:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{N_1} = \sqrt{N_0 \varepsilon \tau \iint_{\Omega} \exp(-\mu_1 H - \mu_3 p(x, y)) dx dy} = \\ &= \sqrt{N_0 \varepsilon \tau} \left(\exp\left(-\frac{\mu_1 H}{2}\right) \right) \sqrt{\iint_{\Omega} \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy}. \end{aligned} \quad (3)$$

При подстановке (2), (3) в (1) получаем развернутое выражение для отношения сигнал/шум:

$$M = \frac{\Delta N}{\sigma} = \sqrt{N_0 \varepsilon \tau} \left(\exp\left(-\frac{\mu_1 H}{2}\right) \right) \frac{\iint_{\Omega} (1 - \exp(-\mu g(x, y))) \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy}{\sqrt{\iint_{\Omega} \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy}}. \quad (4)$$

Таким образом, в математическом отношении стоящая перед нами задача заключается в нахождении максимума выражения (4) по всем неотрицательным измеримым функциям $p(x, y)$.

Обозначим:

$$\varphi(x) = 1 - \exp(-\mu g_0(x)), \quad f(x) = \frac{1}{b} \int_0^b \exp(-\mu_3 p(x, y)) dy,$$

$$c = \sqrt{b N_0 \varepsilon \tau} \exp\left(-\frac{\mu_1 H}{2}\right).$$

Ясно, что $0 \leq \varphi(x) < 1$, $\varphi(x) = 0$ при $x \notin [0; a]$, $0 \leq f(x) \leq 1$, $c > 0$. С учетом введенных обозначений получим

$$\begin{aligned} M &= \frac{c \int \int_D \varphi(x) \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy}{\sqrt{b \int \int_{\Omega} \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy}} = \\ &= \frac{c}{\sqrt{b}} \frac{\int_0^a \int_0^b \varphi(x) \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy}{\int \int_D \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy + \int \int_{\Omega \setminus D} \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy} \leq \\ &\leq \frac{c}{\sqrt{b}} \frac{\int_0^a \int_0^b \varphi(x) \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy}{\int \int_D \exp(-\mu_3 p(x, y)) dx dy} = \frac{c \int_0^a f(x) \varphi(x) dx}{\sqrt{\int_0^a f(x) dx}}, \end{aligned}$$

где $\Omega \setminus D = \{(x, y) | (x, y) \in \Omega; (x, y) \notin D\}$.

Обозначим через $F(f)$ нелинейный функционал:

$$F(f) = \frac{\int_0^a f(x) \varphi(x) dx}{\sqrt{\int_0^a f(x) dx}}. \quad (5)$$

Таким образом, имеем $M \leq cF(f)$, и, следовательно, максимизация M сводится к максимизации функционала (5) на множестве G одномерных функций, где $G = \{f | f: [0; a] \rightarrow [0; 1] - \text{измеримая по Лебегу функция}\}$. Отметим, что $M = cF(f)$ тогда и только тогда, когда либо $\Omega = D$, либо $p(x, y) = +\infty$ на $\Omega \setminus D$. Это означает, что излучение, падающее в область $\Omega \setminus D$, не регистрируется.

Найдем производные функции $\varphi(x)$ при $x \in (0; a)$:

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} (1 - \exp(-\mu g_0(x))) = \mu g_0' \exp(-\mu g_0(x));$$

$$\varphi''(x) = \mu \exp(-\mu g_0(x)) (g_0'' - \mu (g_0')^2).$$

Следовательно, если $g_0(x)$ возрастает на некотором отрезке, то $\varphi(x)$ также возрастает на этом отрезке, а если $g_0(x)$ убывает, то $\varphi(x)$ тоже убывает. Кроме того, так как $g_0(x)$ выпукла вверх ($g_0''(x) < 0$) на $(0; a)$, то $\varphi(x)$ также выпукла вверх ($\varphi''(x) < 0$). Ясно, что $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$.

Обозначим: $D_\lambda = \{x \mid \varphi(x) \geq \lambda; x \in [0; a]\}$, $S(\lambda) = \int_{D_\lambda} dx$, $\lambda_0 = \max_{[0; a]} \varphi(x)$;

$x_0 \in [0; a]$ таково, что $\varphi(x_0) = \lambda_0$ (такое значение x_0 существует и единственно, поскольку $\varphi''(x) < 0$ на $(0; a)$); $\chi_{D_\lambda}(x)$ – характеристическая функция множества D_λ ; $x_1(\lambda)$ и $x_2(\lambda)$ – два корня уравнения $\varphi(x) = \lambda$, где $0 < x_1(\lambda) < x_0 < x_2(\lambda) < a$, $\lambda \in (0; \lambda_0)$. Ясно, что если $\lambda \in (0; \lambda_0)$, то $x_1(\lambda)$ – возрастающая функция, а $x_2(\lambda)$ – убывающая, $x_1(0+0) = 0$, $x_2(0-0) = a$, $x_1(\lambda_0 - 0) = x_2(\lambda_0 + 0) = x_0$. Заметим, что $S(\lambda)$ – непрерывная убывающая функция при $\lambda \in (0; \lambda_0)$ и $S(0+0) = a$, $S(\lambda_0 - 0) = 0$.

Пусть $f \in G$ и $\int_0^a f(x) dx = c_1$, $0 < c_1 \leq a$. Так как $S(\lambda)$ непрерывна и $0 \leq S(\lambda) \leq a$, то найдется такое λ , что $S(\lambda) = c_1$. Для этого λ оценим разность:

$$\begin{aligned} F(\chi_{D_\lambda}) - F(f) &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left(\int_0^a \varphi(x) \chi_{D_\lambda}(x) dx - \int_0^a \varphi(x) f(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} \int_0^a (\chi_{D_\lambda}(x) - f(x)) \varphi(x) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left(\int_{D_\lambda} (\chi_{D_\lambda}(x) - f(x)) \varphi(x) dx + \int_{D_0 \setminus D_\lambda} (\chi_{D_\lambda}(x) - f(x)) \varphi(x) dx \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left(\int_{D_\lambda} \lambda (1 - f(x)) dx - \int_{D_0 \setminus D_\lambda} \lambda f(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left(\lambda \int_{D_\lambda} dx - \lambda \int_{D_\lambda} f(x) dx - \lambda \int_{D_0 \setminus D_\lambda} f(x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left(\lambda S(\lambda) - \lambda \int_{D_0} f(x) dx \right) = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left(\lambda c_1 - \lambda \int_0^a f(x) dx \right) = \frac{1}{\sqrt{c_1}} (\lambda c_1 - \lambda c_1) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $F(\chi_{D_\lambda}) \geq F(f)$. Данное неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда выполняется система равенств:

$$\begin{cases} \int_{D_\lambda} (\varphi(x) - \lambda)(1 - f(x)) dx = 0; \\ \int_{D_0 \setminus D_\lambda} (\varphi(x) - \lambda) f(x) dx = 0. \end{cases}$$

Данная система равенств будет справедлива лишь в том случае, когда $f = \chi_{D_\lambda}$ почти всюду (с точностью до множества нулевой меры).

Из проведенного анализа вытекает следующий вывод: максимум функционала F достигается только на функциях вида

$$f_{\text{opt}} = \chi_{D_\lambda}. \quad (6)$$

Поскольку $f_{\text{opt}} = \frac{1}{b} \int_0^b \exp(-\mu_3 p(x, y)) dy$, то

$$p_{\text{opt}}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in D_\lambda \times [0; b]; \\ +\infty, & (x, y) \notin D_\lambda \times [0; b]. \end{cases} \quad (7)$$

Это означает, что фильтрующий поглотитель имеет нулевую толщину при $(x, y) \in D_\lambda \times [0; b]$ (пропускает все падающее на него излучение без ослабления) и абсолютно непрозрачен на участке при $(x, y) \notin D_\lambda \times [0; b]$.

Докажем теперь, что f_{opt} единственно (λ единственно). Заметим, что в нашем случае $D_\lambda \times [0; b] = \{(x, y) \mid x_1(\lambda) \leq x \leq x_2(\lambda); 0 \leq y \leq b\}$ – прямоугольник. Таким образом, чтобы найти экстремаль (экстремали) нелинейного функционала F , достаточно найти такое λ , при котором одномерная функция

$$u(\lambda) = F(\chi_{D_\lambda}) = \left(\int_{D_\lambda} \varphi(x) dx \right) / \sqrt{\int_{D_\lambda} dx}$$

принимает максимальное значение. Покажем, что такое λ существует и единственно, также выведем уравнение, из которого находится оптимальное значение λ . Имеем:

$$u(\lambda) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\varphi(x) - \lambda) \varphi(x) dx}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\varphi(x) - \lambda) dx}},$$

где $\theta(t)$ – единичная функция Хевисайда: $\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0; \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$ Поэтому (с учетом того, что $\theta'(t) = \delta(t)$ – дельта-функция Дирака) получаем

$$u'(\lambda) = \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\varphi(x) - \lambda) dx \right) \left(\int_{D_\lambda} \varphi(x) dx - 2\lambda \int_{D_\lambda} dx \right)}{2 \sqrt{\left(\int_{D_\lambda} dx \right)^3}}.$$

Однако при $\lambda \in (0; \lambda_0)$ выполняются соотношения [7]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\varphi(x) - \lambda) dx = \frac{1}{|\varphi'(x_1(\lambda))|} + \frac{1}{|\varphi'(x_2(\lambda))|} > 0, \quad 2 \sqrt{\left(\int_{D_\lambda} dx \right)^3} > 0.$$

Следовательно, знак производной $u'(\lambda)$ совпадает со знаком функции $m(\lambda) = \int_{D_\lambda} \varphi(x) dx - 2\lambda \int_{D_\lambda} dx$ при $\lambda \in (0; \lambda_0)$.

Покажем, что уравнение $m(\lambda) = 0$ имеет единственное решение $\lambda = \rho$ на отрезке $(0; \lambda_0)$ и корень ρ доставляет функции $u(\lambda)$ глобальный максимум.

Заметим, что $m(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda_0} S(t) dt - \lambda S(\lambda)$. Поскольку $S(\lambda)$ убывает, то $m(\lambda) \leq$

$\int_{\lambda}^{\lambda_0} S(\lambda) dt - \lambda S(\lambda) = S(\lambda)(\lambda_0 - 2\lambda)$. Следовательно, при $\lambda \in \left(\frac{\lambda_0}{2}; \lambda_0\right)$ с учетом

того, что $S(\lambda) > 0$, получим $m(\lambda) \leq S(\lambda)(\lambda_0 - 2\lambda) < 0$. Так как $m(\lambda)$ непрерывна и $m(0) = \int_0^{\lambda_0} S(t) dt > 0$, то на интервале $\left(0; \frac{\lambda_0}{2}\right)$ существует корень уравнения

$m(\lambda) = 0$. Покажем, что этот корень единственный на интервале $(0; \lambda_0)$. Найдем производные функции $m(\lambda)$:

$$m'(\lambda) = -S(\lambda) - S(\lambda) - \lambda S'(\lambda) = -2S(\lambda) - \lambda S'(\lambda), \quad m''(\lambda) = -3S'(\lambda) - \lambda S''(\lambda).$$

Как следует из [7],

$$S'(\lambda) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\varphi(x) - \lambda) dx = - \frac{1}{\varphi'(x_1(\lambda))} + \frac{1}{\varphi'(x_2(\lambda))}.$$

Поэтому

$$S''(\lambda) = \frac{\varphi''(x_1(\lambda))x_1'(\lambda)}{[\varphi'(x_1(\lambda))]^2} - \frac{\varphi''(x_2(\lambda))x_2'(\lambda)}{[\varphi'(x_2(\lambda))]^2}.$$

Однако так как $x_1(\lambda)$ возрастает при $\lambda \in (0; \lambda_0)$, $x_2(\lambda)$ убывает, а $\varphi'' < 0$, то $S''(\lambda) < 0$ при $\lambda \in (0; \lambda_0)$. Поэтому $m''(\lambda) = -3S'(\lambda) - \lambda S''(\lambda) > 0$, так как $S'(\lambda) < 0$. Следовательно, функция $m(\lambda)$ выпукла вниз, и у нее есть единственная точка минимума $\lambda = \lambda_1$. Найдем значение функции $m(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$:

$$m(\lambda_0) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0} S(t) dt - \lambda_0 S(\lambda_0) = 0 - \lambda_0 \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, $m(\lambda)$ убывает на интервале $(0; \lambda_1)$ от значения $m(0) > 0$ до своего минимального значения $m(\lambda_1)$, а затем на $(\lambda_1; \lambda_0)$ возрастает от $m(\lambda_1) < 0$ до $m(\lambda_0) = 0$. Поэтому на интервале $(0; \lambda_1)$ существует единственный корень ρ уравнения $m(\lambda) = 0$. На интервале $(\rho; \lambda_0)$ функция $m(\lambda)$ отрицательна. Таким образом, уравнение $m(\lambda) = 0$ имеет единственный корень ρ на интервале $(0; \lambda_0)$. Причем $m(\lambda) > 0$ на интервале $(0; \rho)$ и $m(\lambda) < 0$ при $\lambda \in (\rho; \lambda_0)$. Следовательно, функция $u(\lambda)$ возрастает при $\lambda \in (0; \rho)$ и убывает при $\lambda \in (\rho; \lambda_0)$. Поэтому ρ – единственная точка глобального максимума функции $u(\lambda)$. Это означает, что $f_{\text{opt}} = \chi_{D_\rho}$ – единственная функция, доставляющая максимум функционалу $F(f)$. Значение ρ находится из уравнения

$$\int_{x_1(\rho)}^{x_2(\rho)} \varphi(x) dx = 2\rho(x_2(\rho) - x_1(\rho)). \quad (8)$$

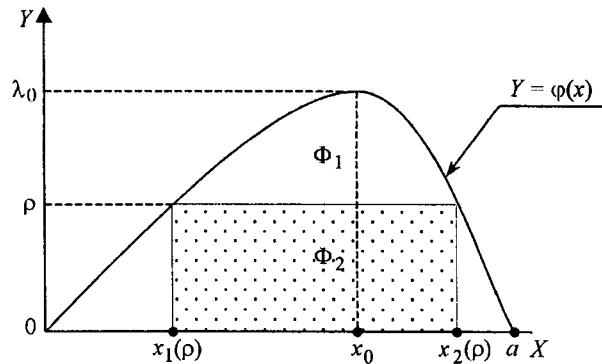


Рис. 2. Расчет значения ρ

Геометрически это означает, что площади фигур Φ_1 и Φ_2 (рис. 2) равны, где $\Phi_1 = \{(x, y) | \rho \leq y \leq \varphi(x); x \in [0; a]\}$ – часть подграфика функции $y = \varphi(x)$, лежащая выше прямой $y = \rho$, а $\Phi_2 = \{(x, y) | x_1(\rho) \leq x \leq x_2(\rho); y \in [0; \rho]\}$ – прямоугольник, заключенный между прямыми $y = \rho$, $y = 0$, $x = x_1(\rho)$, $x = x_2(\rho)$. При этом значении ρ получим максимальную величину отношения сигнал/шум:

$$M_{\max} = 2c\rho \sqrt{x_2(\rho) - x_1(\rho)}. \quad (9)$$

Из приведенного исследования вытекает следующий вывод: для достижения максимального значения отношения сигнал/шум (наилучшего обнаружения инородных включений в ОК) необходимо регистрировать только ту часть пучка излучения, которая прошла через инородные включения на участках с лучевым размером ИВ, не меньшим пороговой величины L :

$$L = \frac{\ln(1 - \rho)}{\mu_1 - \mu_2}, \quad (10)$$

где ρ находится из уравнения (8) либо из равенства площадей геометрических фигур Φ_1 и Φ_2 (см. рис. 2).

Полученные в настоящей работе результаты (формулы (7)–(10)) могут быть использованы при разработке радиометрических систем, предназначенных для обнаружения в различного рода материалах недопустимых включений, что весьма актуально в ряде ситуаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов В. И., Покровский А. В. Радиометрические системы радиационного контроля. М.: Атомиздат, 1979.
2. Горбунов В. И., Завьялкин Ф. М., Солодушкин В. И., Улод В. А. Выбор параметров радиометрических систем с дискретным сканированием радиационного поля // Автометрия. 1987. № 4. С. 21.
3. Горбунов В. И., Горбунов В. М., Завьялкин Ф. М., Квасница М. С. Влияние усреднения измеряемой характеристики изделия в поле зрения детектора на выбор радиометрического устройства // Дефектоскопия. 1976. № 2. С. 117.

4. **Завьялкин Ф. М., Удод В. А.** Двухапертурное кодирование проекций // Автометрия. 1990. № 2. С. 91.
5. **Недавний О. И., Максименко Б. В., Осипов С. П., Удод В. А.** Многоканальные радиометрические системы с полутоновой визуализацией теневых радиационных изображений // Дефектоскопия. 1993. № 7. С. 79.
6. **Henkelman R. M., Preiss V. R.** A nonuniform detector aperture for CT-IN // Journ. Comput. Assist. Tomogr. 1981. 5, N 3. P. 401.
7. **Троицкий И. Н.** Статистическая теория томографии. М.: Радио и связь, 1989.

*Томский государственный
архитектурно-строительный университет,
E-mail: stg@tpce.tomsk.ru*

*Поступила в редакцию
25 ноября 1999 г.*

Реклама продукции в нашем журнале – залог Вашего успеха!