Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

№ 4 2000

УДК 535.5

Д. А. Безуглов

(Ростов-на-Дону)

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ШУМОВ ДАТЧИКА ГАРТМАНА НА ТОЧНОСТЬ АДАПТИВНОЙ КОМПЕНСАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИСКАЖЕНИЙ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Исследовано влияние пуассоновских шумов на качество функционирования адаптивной оптической системы с корректором произвольного вида с использованием нормализованных параболических B-сплайнов. Доказано, что оценка коэффициентов разложения волнового фронта в произвольном базисе, полученная методом наименьших квадратов из результатов измерений датчика гартмановского типа на фоне пуассоновских шумов, является несмещенной.

Введение. В настоящее время при создании адаптивных оптических систем фазового сопряжения, компенсирующих нестационарные искажения световых пучков при их распространении в турбулентной атмосфере, широко используются гибкие адаптивные зеркала на основе пьезокерамических пластин. Данные зеркала обладают широким частотным диапазоном и большим диапазоном фазовой коррекции [1, 2]. Функции отклика таких зеркал достаточно близки к ортогональным полиномам Цернике, для которых получены аналитические выражения, позволяющие обосновывать выбор числа пространственных мод фазовой коррекции в зависимости от требуемой точности аппроксимации волнового фронта при условии наличия в каналах управления адаптивной оптической системы гауссовских шумов [3, 4]. В силу специфики квадратичного детектирования в качестве датчика волнового фронта в адаптивных оптических системах фазового сопряжения обычно используются датчики гартмановского типа. Это связано с тем, что метод Гартмана, позволяющий определять величину искажений волнового фронта по смещениям изображений объекта в фокусах субапертур, равномерно покрывающих апертуру, представляется наиболее перспективным. Отметим, что процесс выработки управляющих воздействий в адаптивной оптической системе в условиях помех следует подразделять на два вида: а) с оптимальной оценкой средних наклонов волнового фронта [5], б) с субоптимальной обработкой управляющих сигналов [4], при которой предполагаются измеренными средние наклоны волнового фронта в пределах субапертуры Ω_i, пропорциональные в общем случае величинам вида

$$k^{-1}\frac{\partial\varphi(x_i, y_i)}{\partial x}+n_i^x, \qquad k^{-1}\frac{\partial\varphi(x_i, y_i)}{\partial y}+n_i^y, \quad i=\overline{1, M}, \tag{1}$$

где n_i^x, n_i^y – шумы измерений в каналах x и y; k – волновое число; $\frac{\partial\varphi(x_i, y_i)}{\partial x}$ – функция, описывающая средние наклоны в пределах одной субапертуры; M – число субапертур датчика Гартмана.

Вычисление вектора управляющих сигналов адаптивной оптической системы фазового сопряжения при этом производят в соответствии с алгоритмом [3], который и будет анализироваться в дальнейшем в настоящей работе.

Следует отметить, что число пространственных мод адаптивного зеркала N и число субапертур датчика Гартмана M в общем случае не совпадают, при этом, как правило, $M > N$. С увеличением числа пространственных мод N и дисперсии шумов D_s в каналах управления адаптивной оптической системы погрешность вычисления вектора управляющих сигналов, обусловленная этими факторами, будет увеличиваться. Эффективная методика выбора числа пространственных мод адаптивного зеркала на фоне гауссовских шумов в каналах управления адаптивной оптической системы фазового сопряжения получена в работе [4]. Для функций отклика произвольного вида в случае, когда плотность распределения шумов является пуассоновской, этот вопрос остается открытым.

Предлагаемая работа посвящена исследованию влияния пуассоновских шумов на качество функционирования адаптивной оптической системы с корректором произвольного вида, описываемого системой нормализованных параболических B-сплайнов.

Особую актуальность данная задача приобретает в случае регистрации датчиком Гартмана слабых сигналов, плотность распределения которых может быть описана распределением Пуассона.

В самом деле, пусть на апертуру Ω датчика Гартмана падает оптическое излучение интенсивностью I. Тогда интенсивность сигнала на каждом фотоприемнике датчика Гартмана (в пределах одной субапертуры) будет равна $I_i \approx I/4M$. Естественно, в данном случае сильным и, следовательно, описываемым гауссовской плотностью распределения такой сигнал можно считать лишь при использовании адаптивной оптической системы фазового сопряжения на коротких трассах. Очевидно, что на длинных трассах, а также при рассмотрении случая астрономических наблюдений такая аппроксимация уже не адекватна гауссовской модели сигнала, и в данном случае следует рассматривать шумы, описываемые распределением Пуассона [6].

Анализ статистических характеристик ошибок восстановления волнового фронта. Рассмотрим задачу в следующей постановке. Пусть на апертуре адаптивной оптической системы фазового сопряжения датчик Гартмана измеряет значения частных производных вида (1), пропорциональных средним наклонам волнового фронта на субапертуре Ω_i. При этом модель турбулентной атмосферы будем считать колмогоровской, а гипотезу «замороженной» турбулентности – выполняющейся. Адаптивный корректор волнового фронта опишем линейной комбинацией его пространственных мод:

$$U(x, y, \mathbf{A}) = \sum_{l=1}^{N} a_l \psi_l(x, y), \qquad (2)$$

где $U(x, y, \mathbf{A})$ – отклик зеркала на вектор управляющих воздействий **A** с элементами a_l; $\psi_l(x, y)$ – l-я пространственная мода корректора волнового фронта; N – число пространственных мод корректора волнового фронта.

При нахождении методом наименьших квадратов (МНК) элементов вектора **A** без учета шумов n^x_i n^y систему нормальных уравнений запишем в виде

$$\mathbf{DA} = \mathbf{F}, \tag{3}$$

где **D** – квадратная матрица с элементами

$$d_{kl} = \left(\frac{\partial \psi_k(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \psi_l(x, y)}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi_k(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial \psi_l(x, y)}{\partial y} \right), \quad l, k = \overline{1, N}; \tag{4}$$

A – искомый вектор-столбец управляющих воздействий; **F** – вектор-столбец правой части с элементами

$$f_k = \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \psi_k(x, y)}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial \psi_k(x, y)}{\partial y} \right).$$

Круглыми скобками здесь и в дальнейшем будем обозначать скалярное произведение вида

$$(q_1, q_2) = \int_s\int q_1 q_2 dxdy = \int_s\int q_1 q_2 d^2 r, \tag{5}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Введение скалярного произведения вместо дискретных сумм позволяет обобщить получаемые результаты на случай произвольного числа элементов датчика Гартмана с произвольным их расположением по апертуре адаптивной оптической системы.

Априорно будем считать, что известна система моментов пуассоновского распределения, описывающего шумы, на фоне которых осуществляется регистрация средних наклонов волнового фронта. Следует отметить, что такое представление чрезвычайно удобно тем, что, как будет показано ниже, предложенный метод требует знания ограниченного числа моментов.

Теорема 1. Независимо от степени коррелированности шумов на выходе каждого квадранта датчика Гартмана величины, пропорциональные средним наклонам волнового фронта на выходе каждого канала датчика Гартмана, являются некоррелированными и имеют нулевое математическое ожидание, т. е.

$$\begin{aligned}
&M[n^x_i] = M[n^y_i] = 0, \\
&M[n^x_i n^x_j] = 4(\alpha_2 - \alpha_{11}) \quad \text{при любых } i, j, \\
&M[n^y_i n^y_j] = 4(\alpha_2 - \alpha_{11}) \quad \text{при любых } i, j, \\
&M[n^x_i n^y_j] = 0 \qquad \text{при любых } i, j, \qquad i, j = \overline{1, M},
\end{aligned} \tag{6}$$

где $M[\cdot]$ – знак математического ожидания, усреднение при этом здесь и в дальнейшем подразумевается по множеству реализаций; α_2, α_{11} – соответствующие моменты системы случайных величин n_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В справедливости (6) можно легко убедиться следующим образом. Примем гипотезу стационарности шумов регистрации по апертуре адаптивной оптической системы. Пусть средние наклоны волнового фронта измеряются с помощью датчика гартмановского типа с квадрантными фотоприемниками. При этом статистические характеристики шумов n_i с выходов каждого из квадрантных фотоприемников подчиняются следующим соотношениям:

$$M[n_i]=\alpha_1,$$
$$M[n_i n_j]=\begin{cases}\alpha_2 & \text{при } i=j;\\ \alpha_{11} & \text{при } i\neq j,\end{cases}\quad i,j=\overline{1,M}, \tag{7}$$

где α_1 – центральный момент первого порядка системы случайных величин n_i.

Сигналы, пропорциональные средним наклонам U_x и U_y, обычно получают в виде

$$U_{xi}=(U_{1i}+U_{2i})-(U_{3i}+U_{4i}),\qquad U_{yi}=(U_{1i}+U_{3i})-(U_{2i}+U_{4i}), \tag{8}$$

где $U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}, U_{4i}$ – соответственно сигналы с выходов квадрантных фотоприемников i-го канала датчика Гартмана.

Используя (7), (8), получим

$$\begin{aligned}
&M[n^x]=M[n^y]=0,\\
&M[n^x n^y]=M[\{(n_1+n_2)-(n_3+n_4)\}\{(n_1+n_3)-(n_2+n_4)\}]=0,\\
&M[n^y n^y]=M[\{(n_1+n_3)-(n_2+n_4)\}\{(n_1+n_3)-(n_2+n_4)\}]=4(\alpha_2-\alpha_{11}),\\
&M[n^x n^x]=M[\{(n_1+n_2)-(n_3+n_4)\}\{(n_1+n_2)-(n_3+n_4)\}]=4(\alpha_2-\alpha_{11}).
\end{aligned} \tag{9}$$

Что и требовалось доказать.

С учетом (1) система линейных уравнений (3) для оценки вектора **A** запишется следующим образом:

$$\mathbf{A}^*=\mathbf{D}\mathbf{F}^*, \tag{10}$$

где $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}+\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma}$ – вектор-столбец ошибок q_k оценки коэффициентов **A**; $\mathbf{F}^*$ – вектор-столбец с коэффициентами

$$f_k^*=\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}+n^x,\ \frac{\partial\psi_k(x,y)}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}+n^y,\ \frac{\partial\psi_k(x,y)}{\partial y}\right).$$

Из теоремы 1 можно сформулировать следующее достаточно важное для практики конструирования датчиков волнового фронта

Следствие. Оценка коэффициентов $\mathbf{A}^*$ разложения волнового фронта по системе функций отклика произвольного вида $\psi_l(x,y)$, полученная методом наименьших квадратов при условии наличия в каналах управления адаптивной оптической системы пуассоновских шумов, является несмещенной.

Найдем статистические характеристики элементов вектора **Г**. С учетом линейности системы (10) можно записать

$$M[\gamma_k]=M\left[\sum_{i=1}^{N} d_{ki}^{-1} f_i^{*}\right]=\sum_{i=1}^{N} d_{ki}^{-1}\left\{\left(M[n^x],\frac{\partial\psi_i(x,y)}{\partial x}\right)+\left(M[n^y],\frac{\partial\psi_i(x,y)}{\partial y}\right)\right\}=0, \tag{11}$$

где d_{ki}^{-1} – элементы обратной матрицы **D**; f_i^{*} – элементы вектора **F**; γ_k – элементы вектора **Г**.

Теорема 2. Корреляционная матрица ошибки оценки коэффициентов $\mathbf{A}^{*}$ разложения волнового фронта по системе функций отклика произвольного вида $\psi_i(x,y)$, полученной методом наименьших квадратов при условии наличия в каналах управления адаптивной оптической системы пуассоновских шумов, описывается выражением

$$M[\gamma_k\gamma_i]=\frac{4(\alpha_2-\alpha_{11})}{M}\mathbf{D}^{-1}. \tag{12}$$

Доказательство. В выражении (11) непрерывное скалярное произведение заменим на его дискретный аналог, так как датчики гартмановского типа, как показано выше, измеряют значения средних наклонов волнового фронта только в пределах конечной субапертуры:

$$M[\gamma_k\gamma_i]=M\left[\sum_{l=1}^{N} d_{kl}^{-1}\left\{\frac{1}{M}\sum_{s=1}^{M} n_s^x\frac{\partial\psi_k(x_s,y_s)}{\partial x}+n_s^y\frac{\partial\psi_k(x_s,y_s)}{\partial y}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{j=1}^{N} d_{ij}^{-1}\left\{\frac{1}{M}\sum_{p=1}^{M} n_p^x\frac{\partial\psi_i(x_p,y_p)}{\partial x}+n_p^y\frac{\partial\psi_i(x_p,y_p)}{\partial y}\right\}\right]. \tag{13}$$

Выражение (13) с учетом теоремы 1 можно записать в виде

$$M[\gamma_k\gamma_i]=\frac{2(\alpha_2-\alpha_{11})}{M^2}\sum_{l=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_{kl}^{-1}d_{ij}^{-1}\left\{\sum_{s=1}^{M}\sum_{p=1}^{M}\frac{\partial\psi_k(x_s,y_s)}{\partial x}\frac{\partial\psi_i(x_s,y_s)}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\psi_k(x_p,y_p)}{\partial y}\frac{\partial\psi_i(x_p,y_p)}{\partial y}\right\}, \tag{14}$$

или, используя выражение (4),

$$M[\gamma_k\gamma_i]=\frac{2(\alpha_2-\alpha_{11})}{M^2}\sum_{l=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_{kl}^{-1}d_{ij}^{-1}d_{ki}. \tag{15}$$

В матричной форме выражение (14) с учетом того, что **D** симметрическая, запишется в виде

$$M[\gamma_k \gamma_i] = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_{11})}{M^2} \mathbf{D}^{T^{-1}} \mathbf{D} \mathbf{D}^{-1} = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_{11})}{M^2} \mathbf{D}^{-1}, \tag{16}$$

где $\mathbf{D}^T$ – транспонированная матрица **D**.

Что и требовалось доказать.

Таким образом, для вычисления элементов ковариационной матрицы
тов матрицы **D** в общем случае не представляет труда. Если же пространственные моды корректора волнового фронта не удается с достаточной степенью точности выразить аналитически, но имеются результаты их экспериментальных измерений [2], то целесообразно использовать численные методы. Хорошие результаты в этом случае могут быть получены с использованием сплайн-функций [4].

Сплайн-аппроксимация пространственных мод. Пусть известны аналитические или экспериментально измеренные пространственные моды корректора волнового фронта. Они всегда могут быть представлены в виде системы параболических нормализованных B-сплайнов дефекта 1 на неподвижной сетке [4]:

$$\psi_k(x, y) = \sum_{i=0}^{M+1} \sum_{j=0}^{M+1} b_{ij}^k B_{2i}(x, \bar{x}_i) B_{2j}(y, \bar{y}_j). \tag{17}$$

Здесь

$$B_{2i}(x, \bar{x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{x - \bar{x}_i}{h}\right]^2 B_{0i-1} + \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{x - \bar{x}_i}{h}\right)^2\right] B_{0i} + \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \frac{x - \bar{x}_i}{h}\right]^2 B_{0i+1},$$

$$B_{2j}(y, \bar{y}) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{y - \bar{y}_j}{h}\right]^2 B_{0j-1} + \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{y - \bar{y}_j}{h}\right)^2\right] B_{0j} + \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \frac{y - \bar{y}_j}{h}\right]^2 B_{0j+1},$$

$$B_{0i} = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{для } x \notin [x_i, x_{i+1}], \end{cases} \qquad B_{0j} = \begin{cases} 1 & \text{для } y \in [y_j, y_{j+1}], \\ 0 & \text{для } y \notin [y_j, y_{j+1}], \end{cases}$$

где h – шаг сетки.

В таком представлении набор коэффициентов двумерного параболического B-сплайна b_{ij}^k однозначно описывает n-ю пространственную моду корректора волнового фронта. Систему коэффициентов b_{ij}^k для k-й пространственной моды можно вычислить известными методами, зная ее значения в узлах коллокации сплайна [4]. Так как двумерные параболические B-сплайны могут быть легко продифференцированы аналитически, значения частных производных k-й пространственной моды вида $\partial\psi_k(x, y)/\partial x$ представим выражением

$$\frac{\partial\psi_k(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} \left\{ \left(\frac{3}{2} + \frac{y - \bar{y}_j}{h}\right)^2 \left(\frac{3}{4}(b^k_{i-1, j-1} - b^k_{i+1, j-1}) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{x - \bar{x}_i}{h}\right)(b^k_{i-1, j-1} + b^k_{i+1, j-1})\right) + \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{y - \bar{y}_j}{h}\right)^2\right)\left(\frac{3}{2}(b^k_{i-1, j} - b^k_{i+1, j}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x - \bar{x}_i}{h}\right)(b^k_{i-1, j} - b^k_{ij} - b^k_{i+1, j})\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{y - \bar{y}_j}{h}\right)^2 \left(\frac{3}{4}(b^k_{i-1, j+1} - b^k_{i+1, j+1}) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{x - \bar{x}_i}{h}\right)(b^k_{i-1, j+1} - 2b^k_{i, j+1} - b^k_{i+1, j+1})\right)\right\}. \tag{18}$$

Введем следующие обозначения:

$$b^k_{i-1, j-1} - 2b^k_{i, j-1} + b^k_{i+1, j-1} - 2b^k_{i-1, j} + 4b^k_{i, j} + 4b^k_{i+1, j} +$$

$$+ b^k_{i-1, j+1} - 2b^k_{i, j+1} - b^k_{i+1, j+1} = a^k_1,$$

$$b^k_{i-1, j-1} - b^k_{i+1, j-1} - 2b^k_{i-1, j} - 2b^k_{i+1, j} + b^k_{i-1, j+1} + b^k_{i+1, j+1} = a^k_2,$$

$$b^k_{i-1, j-1} - 2b^k_{i, j+1} + b^k_{i+1, j-1} - b^k_{i-1, j+1} + 2b^k_{i, j+1} + b^k_{i+1, j+1} = a^k_3, \tag{19}$$

$$b^k_{i-1, j-1} - b^k_{i+1, j-1} - b^k_{i-1, j+1} - b^k_{i+1, j+1} = a^k_4,$$

$$b^k_{i-1, j-1} - 2b^k_{i, j+1} + b^k_{i+1, j-1} + b^k_{i-1, j+1} - 2b^k_{i, j+1} - b^k_{i+1, j+1} = a^k_5,$$

$$b^k_{i-1, j-1} - b^k_{i+1, j} + 2b^k_{i-1, j} + 2b^k_{i+1, j} + b^k_{i-1, j+1} + b^k_{i+1, j+1} = a^k_6.$$

После несложных, но достаточно громоздких выкладок можно показать, что элементы матрицы **D** могут быть вычислены в терминах сплайнов в соответствии с выражением

$$\iint \frac{\partial\psi_k(x, y)}{\partial x} \frac{\partial\psi_l(x, y)}{\partial x} dxdy = \frac{1}{h^4} \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} \left\{ \frac{h^2}{256 \cdot 15} a^k_1 a^l_1 + \right.$$

$$+ \frac{9(h\bar{x}_i + h^2)}{40 \cdot 16} a^k_2 a^l_2 + \frac{h^2}{9 \cdot 16}\left(\frac{3}{16} a^k_1 a^l_5 + \frac{3}{16} a^k_5 a^l_1 + \frac{9}{8} a^k_3 a^l_3\right) +$$

$$\left. + \frac{(2\bar{x}_i + h)}{36}\left(\frac{81}{16} a^k_4 a^l_4 + \frac{27}{64} a^k_6 a^l_2 + \frac{27}{64} a^k_2 a^l_6\right) + \frac{(2\bar{y}_i + h)}{324} a^k_5 a^l_5 + \frac{81h^2}{256} a^k_6 a^l_6 \right\}. \tag{20}$$

Аналогичным образом может быть вычислено скалярное произведение

$$\iint \frac{\partial\psi_k(x, y)}{\partial y} \frac{\partial\psi_l(x, y)}{\partial y} dxdy. \tag{21}$$

Отклик корректора волнового фронта (2), восстановленный из измерений датчика гартмановского типа с учетом пуассоновских шумов измерений, можно записать как

$$U(x, y, \mathbf{A}) = \sum_{l=1}^{N} (a_l + \gamma_l)\psi_l(x, y). \tag{22}$$

Тогда ошибка, вносимая корректором волнового фронта, будет определяться следующим образом:

$$\Delta U(x, y, \mathbf{A}) = \sum_{l=0}^{N} \gamma_l \psi_l(x, y). \tag{23}$$

Очевидно, что $M[\Delta U] = 0$, а для окончательной оценки ошибки, вносимой шумами измерений, необходимо вычислить

$$M[\Delta U^2] = M\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \psi_k(x, y) \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \psi_i(x, y)\right] = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} M[\gamma_k \gamma_i] \psi_k(x, y) \psi_i(x, y). \tag{24}$$

Подставив (15) в (24), окончательно получим

$$M[\Delta U^2] = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_{11})}{M^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} d_{ki}^{-1} \psi_k(x, y) \psi_i(x, y). \tag{25}$$

Усреднив (25) по апертуре S, можно получить выражение для среднеквадратической ошибки коррекции

$$\sigma_{\text{кор}}^2 = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_{11})}{M^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} d_{ki} b_{ki}, \tag{26}$$

где b_{ki} – скалярные произведения вида

$$b_{ki} = \iint_S \psi_k(x, y) \psi_i(x, y) dxdy. \tag{27}$$

Вычисление элементов d_{ki} в формуле (26) производится в соответствии с выражениями (18)–(20). Аналогичным образом вычисляются в терминах B-сплайнов элементы b_{ki}. Очевидно, что конкретные значения коэффициентов сплайна будут зависеть от вида $\psi(x, y)$ пространственных мод корректора волнового фронта.

Анализ выражения (26) показывает, что с ростом числа пространственных мод коррекции ошибка, обусловленная шумами измерений, будет увеличиваться. Это связано с тем, что при этом в сумму (26) будут добавляться в общем случае неотрицательные слагаемые.

Пуассоновские шумы. С учетом того, что для пуассоновских шумов $\alpha_2 = \lambda^2 + \lambda, \alpha_{11} = 0,$ выражения (12) и (25) можно записать в следующем виде:

$$M[\gamma_k \gamma_i] = \frac{2(\lambda^2 + \lambda)}{M^2} \mathbf{D}^{-1}, \tag{28}$$

$$\sigma^2_{\text{кор}} = \frac{2(\lambda^2 + \lambda)}{M^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} d_{ki} b_{ki}. \tag{29}$$

Очевидно, что для случая, рассматриваемого в настоящей работе, для слабых сигналов возможно положить $\lambda < 0,$ и тогда для приближенных расчетов можно пользоваться выражениями

$$M[\gamma_k \gamma_i] = \frac{2\lambda}{M^2} D^{-1}, \tag{30}$$

$$\sigma^2_{\text{кор}} = \frac{2\lambda}{M^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} d_{ki} b_{ki}. \tag{31}$$

Как следует из выражений (28)–(31), при увеличении числа субапертур датчика Гартмана M математическое ожидание и дисперсия ошибки будут уменьшаться.

Заключение. Разработанный метод анализа качества функционирования адаптивной оптической системы фазового сопряжения с учетом пуассоновских шумов датчика гартмановского типа позволяет ограничить число степеней свободы произвольного корректора волнового фронта. При этом оказывается, что для уменьшения дисперсии ошибки, вызванной шумами измерений, в общем случае необходимо увеличивать число квадрантных фотоприемников датчика гартмановского типа. По-видимому, это связано с эффектом «усреднения» шумов. Использование метода сплайн-аппроксимации дает возможность с достаточной степенью точности численно-аналитическим методом вычислить элементы матрицы нормальной системы уравнений в виде линейной комбинации коэффициентов нормализованного B-сплайна. При этом в качестве априорной информации для построения сплайна можно использовать как собственно значения функции отклика в узлах коллокации, так и значения их частных производных. Проведенный в работе анализ показал, что МНК-оценка коэффициентов разложения волнового фронта в произвольном базисе, полученная по результатам измерения средних наклонов волнового фронта в случае как гауссовских, так и пуассоновских шумов измерений, является несмещенной. Это объясняется наличием суммарно-разностной обработки в каждом канале датчика Гартмана. Данный вывод непосредственно следует из теоремы 1. Таким образом, в случаях, когда применение оптимального алгоритма восстановления волнового фронта по каким-либо соображениям невозможно, квазиоптимальный алгоритм (10) позволяет достичь приемлемой точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Безуглов Д. А., Мищенко Е. Н., Мастропас З. П. и др.** // Оптика атмосферы. 1989. **2**, № 12. С. 1305.
2. **Воронцов М. А., Кудряшов А. В., Шмальгаузен В. И.** // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. **27**, № 11. С. 1419.
3. **Безуглов Д. А., Вернигора А. А.** // Оптика атмосферы. 1990. **3**, № 2. С. 211.
4. **Безуглов Д. А.** // Оптика атмосферы. 1991. **4**, № 12. С. 1345.
5. **Безуглов Д. А.** // Оптика атмосферы и океана. 1995. **8**, № 3. С. 346.
6. **Малахов А. Н.** Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.

Ростовский военный институт ракетных войск

Поступила в редакцию
1 апреля 1996 г.