

УДК 519.6

С. М. Аульченко, А. Ф. Латыпов, Ю. В. Никуличев
(Новосибирск)

**ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ
С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ***

Предложен метод построения поверхностей для приближенного параметрического описания трехмерных областей по заданному набору точек, расположенных на их границах. Метод основан на двумерной полиномиальной аппроксимации со специальным выбором границ сопряжения порций составной поверхности и позволяет избавиться от осцилляций без понижения порядка аппроксимирующих полиномов. Показано, что аппроксимирующий полином по любой из переменных обладает гарантированными свойствами гладкости и монотонности. Алгоритм, реализующий описанный метод, также может быть использован для аппроксимации и сглаживания экспериментальных данных, при решении уравнений в частных производных конечно-разностными методами и при решении вариационных задач с управлением свободными границами.

Задача численного представления кривых и поверхностей является важной для многих приложений, таких, например, как управление свободными границами в задачах прикладной аэродинамики, сглаживание вычисляемых на множестве точек функций при решении дифференциальных уравнений в частных производных конечно-разностными методами, аппроксимация экспериментальных данных и т. д. Достаточно полный обзор существующих методов построения кривых и поверхностей приведен в [1]. Наиболее часто применяется подход, в основе которого лежит разделение области определения аргументов на конечное число подобластей, составляющих исходную область, с дальнейшим построением на этих подобластях некоторых достаточно простых кривых или поверхностей (порций), удовлетворяющих определенным условиям сшивки на их границах; самые известные среди них – методы сплайн-интерполяции [2], методы Безье [3], Кунса [4], Фергюссона [5]. Обычно для построения поверхностей порции натягиваются на топологические прямоугольники, образованные двумя семействами пересекающихся кривых при различных требованиях на условия сшивки на границах подобластей. Методы сплайн-интерполяции допускают осцилляции внутри промежутка. Поверхности Кунса непрерывные в метрике C , поверхности Фергюссона дифференцируемы, но для их построения необходима дополни-

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00564).

тельная информация о производных, а поверхности Безье строятся по довольно сложному алгоритму. Различные способы построения порций и всей поверхности в целом в общем случае требуют реализации многоступенчатых алгоритмов. Выбор метода представления кривой или поверхности обусловлен характером задачи, выдвигающей необходимые требования к эффективности, ресурсоемкости метода и к свойствам самой аппроксимации.

Описываемый ниже метод, основанный на идеях и результатах работ [6, 7], будем называть *LL-аппроксимацией*. Задаваемая исходная информация – конечное дискретное занумерованное множество точек на координатной плоскости, описывающих некоторую кривую, или множество точек, организованных определенным образом в трехмерном координатном пространстве и описывающих некоторую поверхность. В качестве порций кривой или поверхности используются функции, представимые аналитически с помощью определенных полиномов, напоминающих по способу построения полиномы Бернштейна. Получаемая кривая непрерывна вместе со всеми производными до заданного порядка. На всей построенной поверхности в целом существуют непрерывные частные производные не ниже второго порядка; на каждой порции сохраняется знак второй производной вдоль координатных направлений. Имеется возможность построения кривых и поверхностей, сколь угодно мало отклоняющихся от задающих точек.

Одномерная LL-аппроксимация. Прежде всего приведем некоторые обозначения и функции, которые будут использоваться в дальнейших выкладках. Для заданной целой величины $L > 0$ и $\xi \in [0, 1]$ введем обозначения

$$C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}, \quad \varepsilon_k = \frac{C_{L+k}^L}{L+k}, \quad d_L = \frac{C_{2L}^L}{2^{2L+2}}$$

и функции

$$\begin{aligned} h_1(\xi) &= \xi^{L+1} \sum_{k=0}^L \varepsilon_k (1-\xi)^k, & h_2(\xi) &= \xi^{L+1} \sum_{k=1}^L \varepsilon_k k (1-\xi)^k, \\ h_3(\xi) &= (1-\xi)^{L+1} \sum_{k=0}^L \varepsilon_k \xi^k, & h_4(\xi) &= (1-\xi)^{L+1} \sum_{k=1}^L \varepsilon_k k \xi^k, \\ h(\xi) &= \xi^{L+1} \sum_{k=0}^L \varepsilon_k (L-k) (1-\xi)^k, \end{aligned} \quad (1)$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} h_4(\xi) &= \xi - Lh_1(\xi), & Lh_3(\xi) &= 1 - \xi - h_2(\xi), & h(\xi) &= Lh_1(\xi) - h_2(\xi), \\ h'(\xi) &= dh/d\xi = 2L\xi^L \sum_{k=0}^{L-1} \varepsilon_k (1-\xi)^k, \\ h''(\xi) &= d^2h/d\xi^2 = 2LC_{2L-1}^L \xi^{L-1} (1-\xi)^{L-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Мы не будем приводить доказательство справедливости соотношений (2), которое нетривиально, однако проверить их не трудно простой подста-

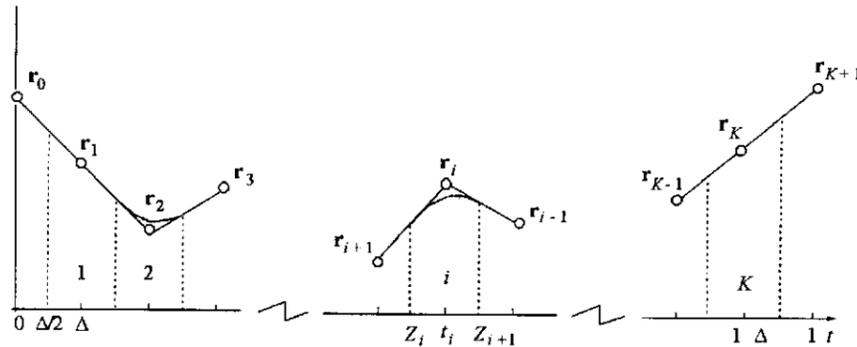


Рис. 1

новкой. Приведем также требующиеся в дальнейшем значения функции $h(\xi)$ и ее первой и второй производных на концах и в середине отрезка $\xi \in [0, 1]$, легко получаемые с помощью соотношений (2):

$$\begin{aligned} h(0) &= 0, & h(1/2) &= 2d_L, & h(1) &= 1, \\ h'(0) &= 0, & h'(1/2) &= 1, & h'(1) &= 2, \\ h''(0) &= 0, & h''(1/2) &= 16Ld_L, & h''(1) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть функция $y(x)$ задана таблицами значений $y_i, x_i, i=1, 2, \dots, K$. Для параметрического представления вектор-функции $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]^T, t \in [0, 1]$, зададим равномерно распределенные по оси t узловые точки с шагом $\Delta = 1/(K+1)$ так, чтобы $t_1 = \Delta, t_i = i\Delta, i=1, \dots, K, t_K = 1 - \Delta$. Точки, ограничивающие i -й участок, поместим в серединах соседних отрезков так, что $z_i = i\Delta - \Delta/2, i=1, \dots, K$. На рис. 1 пояснены принятые обозначения.

Линейный каркас, составленный прямыми линиями, соединяющими задающие точки, будем называть опорной кривой.

Запишем аппроксимирующий полином на i -м участке в виде

$$P_i(\xi) = (1-\xi)^{L+1} \sum_{k=0}^L \xi^k a_{ki} + \xi^{L+1} \sum_{k=0}^L (1-\xi)^k b_{ki},$$

$$\xi = \frac{t-z_i}{\Delta}, \quad t \in [z_i, z_{i+1}], \quad \xi \in [0, 1].$$

Коэффициенты полинома определим из условий равенства полинома и всех его производных до порядка $L+1$ в граничных точках $t = z_i, t = z_{i+1}$ соответствующим значениям для опорной кривой. Эти условия, следовательно, выдвигают требования в граничных точках равенства нулю производных выше

первого порядка. При указанных условиях коэффициенты полинома на i -м участке запишутся соотношениями

$$\begin{aligned} P_i(\xi) = & Lh_3(\xi)(r_i + r_{i-1})/2 + h_4(\xi)(3r_i - r_{i-1})/2 + \\ & + Lh_1(\xi)(r_i + r_{i+1})/2 + h_2(\xi)(3r_i - r_{i+1})/2. \end{aligned}$$

С помощью (2) формулы для аппроксимирующего вектор-полинома и его первой и второй производных для любого $t \in [\Delta/2, 1 - \Delta/2]$ запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_i(\xi) &= (r_i + r_{i-1})/2 + \xi(r_i - r_{i-1}) + h(\xi)(r_{i-1} + r_{i+1} - 2r_i)/2, \\ P_i'(\xi) &= (r_i - r_{i-1}) + h'(\xi)(r_{i-1} + r_{i+1} - 2r_i)/2, \\ P_i''(\xi) &= h''(\xi)(r_{i-1} + r_{i+1} - 2r_i)/2, \\ i &= \text{entier}[t(K+1) + 0,5], \quad \xi = t(K+1) - i + 0,5, \quad \xi \in [0,1]. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что рабочей областью определения для аппроксимирующего полинома является $t \in [\Delta, 1 - \Delta]$.

Значения полинома в узловых точках определяются соотношениями

$$P_i(1/2) - r_i = d_L(r_{i-1} + r_{i+1} - 2r_i), \quad i = \overline{1, K}. \quad (5)$$

Соотношения для значений полинома в граничных точках области

$$\begin{aligned} P_1(1/2) &= r_1 + d_L(r_0 + r_2 - 2r_1), \\ P_K(1/2) &= r_K + d_L(r_{K-1} + r_{K+1} - 2r_K) \end{aligned}$$

используем в качестве условий для определения двух дополнительных точек на концах промежутка $t = 0$ и $t = 1$. Требования $P_1(1/2) = r_1$, $P_K(1/2) = r_K$ дают следующие соотношения: $r_0 = 2r_1 - r_2$, $r_{K+1} = 2r_K - r_{K-1}$. Для замкнутых гладких в точке $r_1 = r_K$ кривых граничные точки области определяются из очевидных для этого случая соотношений $r_0 = r_{K-1}$, $r_{K+1} = r_2$.

В работе [7] при аналогичном подходе получены формулы для полинома, представленного как функция $y(x)$. При этом в общем случае на неравномерной сетке, задаваемой точками координаты x , значения аргумента, ограничивающие i -й участок, определялись из условий, обеспечивающих отсутствие осцилляций на участке. Эти процедуры, следовательно, требуют дополнительных массивов и предварительных вычислений. Формулы (4), описывающие координаты y и x как функции параметра t , более просты, не требуют дополнительных массивов и предварительных расчетов, удобны для анализа. Так, приведенное в [7] доказательство теоремы об отсутствии осцилляций

внутри промежутка при параметрическом описании сразу следует из соотношений для второй производной полинома (4) и соотношения (2) для второй производной функции $h(\xi)$. Аналогично, учитывая положительность функции $h(\xi)$, утверждение о монотонности полинома внутри промежутка при монотонности трех задающих точек следует из очевидного факта, что первая производная полинома (4) не меняет в этом случае своего знака.

Используя формулу Стирлинга, можно написать:

$$d_L = \frac{1}{2\sqrt{\pi L}} e^{\frac{7\theta}{48L^2}}, \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда следует стремление d_L к нулю при $L \rightarrow \infty$, что, согласно (5), доказывает стремление значений полинома (4) к задающим точкам в узлах при $L \rightarrow \infty$.

Из (5) следует, что аппроксимирующий полином проходит через заданную точку на i -м участке только в случае линейной зависимости трех задающих точек участка r_{i-1}, r_i, r_{i+1} . Можно, однако, построить LL -аппроксимацию, проходящую в заданной окрестности задающих точек, не прибегая к увеличению выбранного значения L . Покажем это.

Обозначим через $P_i^*(\xi)$ полином, построенный на некоторых точках r_i^* , $i = \overline{1, K}$, таких, при которых удовлетворяются условия $P_i^*(1/2) = p_i$, $i = 2, \dots, K-1$. Используя соотношения (5), получим систему $K-2$ линейных алгебраических уравнений для определения $K-2$ точек r_i^* , $i = 2, K-1$, таких, что построенный для них аппроксимирующий полином проходит точно через заданные точки p_i , $i = \overline{1, K}$ (заметим, что $P_1(1/2) = p_1$, $P_K(1/2) = p_K$ по условию построения LL -аппроксимации). Эта система записывается в виде

$$\begin{aligned} r_2^*(1-2d_L) + r_3^*d_L &= F_2 = p_2 - p_1d_L, \\ r_{i-1}^*d_L + r_i^*(1-2d_L) + r_{i+1}^*d_L &= F_i = p_i, \\ r_{K-2}^*d_L + r_{K-1}^*(1-2d_L) &= F_{K-1} = p_{K-1} - p_Kd_L, \quad i = \overline{3, K-2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Трехдиагональная матрица коэффициентов системы (6) невырожденная, поскольку имеет преобладающие диагональные элементы и, значит, удовлетворяет условиям теоремы Гершгорина. Систему уравнений (6) можно использовать для построения полиномов (4), проходящих в заданной близости от задающих точек, так, что если $p_i = r_i$, $i = \overline{1, K}$, то новый аппроксимирующий полином, построенный на векторах r_i^* , $i = \overline{2, K-1}$, проходит через задающие точки. Необходимо заметить, однако, что при этом монотонность исходного полинома (4), обеспечиваемая монотонностью задающих точек, может быть нарушена, поскольку новый полином будет строиться не по самим задающим точкам, а по точкам, получаемым решением системы уравнений (6).

Двумерная LL -аппроксимация. Пусть в какой-либо ортогональной системе координат, например декартовой $\{x, y, z\}$, заданы матрицы базовых координат $\{x_{ij}\}, \{y_{ij}\}, \{z_{ij}\}$, $i = \overline{1, K_x}, j = \overline{1, K_y}$, опорной поверхности $f = z(x, y)$. Под опорной поверхностью понимается поверхность, составленная из линейчатых порций (аналогов линейного каркаса в одномерном случае). Эти

таблицы представляют координаты K_y точек в K_x сечениях поверхности плоскостью $x = \text{const}$. Предполагается, что область определения $M(x, y)$ опорной поверхности f такова, что любое сечение ее плоскостью $x = \text{const}$ является односвязным.

Такое представление базовых координат позволяет ввести параметры $u \in [0, 1], v \in [0, 1]$, соответствующие строкам $i = \text{const}$ и столбцам $j = \text{const}$ введенных матриц. Для удобства последующих записей введем вектор-функцию $\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$. При оговоренных условиях введение параметров u, v позволяет описывать также многолистные, в том числе замкнутые, поверхности.

Замечание. Матрица $\{x_{ij}\}$ имеет K_x одинаковых столбцов, т. е. на самом деле $x = x(u)$, но для единообразия представления компонент вектор-функции $\mathbf{r}(u, v)$ в последующем используется запись $x = x(u, v)$.

При этих исходных данных требуется построить поверхность непрерывную и непрерывно дифференцируемую до заданного порядка.

Для выбора координат узловых точек на параметрической плоскости (u, v) поступим так же, как в одномерном случае. Разделим единичный квадрат параметрической плоскости равномерной сеткой на $(K_x + 1) \times (K_y + 1)$ прямоугольников со сторонами, по соответствующим координатам равными $\Delta_u = 1/(K_x + 1), \Delta_v = 1/(K_y + 1)$, и будем считать, что таблицы для вектор-функции $\mathbf{r}(u, v)$ заданы в следующих точках плоскости (u, v) : $u_1 = \Delta_u, v_1 = \Delta_v, u_i = i\Delta_u, v_j = j\Delta_v, i = 1, 2, \dots, K_x, j = 1, 2, \dots, K_y, u_{K_x} = 1 - \Delta_u, u_{K_y} = 1 - \Delta_v$.

На рис. 2 изображена подобласть плоскости (u, v) , прилегающая к точке \mathbf{r}_j и состоящая из четырех линейчатых порций – элементов опорной поверхности, обозначенных римскими цифрами. Обозначения ясны из рисунка. Штриховой прямоугольник изображает область определения (i, j) -й порции составной поверхности Ω_{ij} , на которой строится LL -аппроксимация. По осям u и v область Ω_{ij} ограничивается соответственно точками $z_i = u_i - \Delta_u/2, z_{i+1} = u_i + \Delta_u/2, w_j = v_j - \Delta_v/2, w_{j+1} = v_j + \Delta_v/2$.

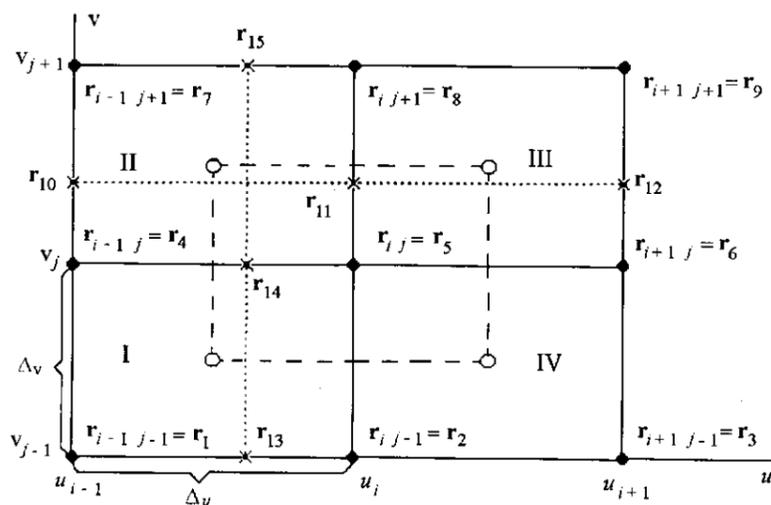


Рис. 2

Линейчатая поверхность определяется следующими формулами (приведен пример аппроксимации для (ij) -го элемента опорной поверхности, помеченного на рисунке цифрой III):

$$\mathbf{G}_{ij}(\chi, \varphi) = \mathbf{A}_{\text{III}} + \mathbf{B}_{\text{III}}\chi + \mathbf{C}_{\text{III}}\varphi + \mathbf{D}_{\text{III}}\chi\varphi, \quad \chi = (u - u_i)/\Delta_u, \quad \varphi = (v - v_j)/\Delta_v, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_{\text{III}} = \mathbf{r}_5, \quad \mathbf{B}_{\text{III}} = \mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_5, \quad \mathbf{C}_{\text{III}} = \mathbf{r}_8 - \mathbf{r}_5, \quad \mathbf{D}_{\text{III}} = \mathbf{r}_9 + \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_8 - \mathbf{r}_6.$$

Поскольку в дальнейшем все наши рассуждения в основном будут относиться к области Ω_{ij} , индексы для компактности записей будем опускать за исключением специально оговариваемых случаев.

Построим на Ω_{ij} следующую полиномиальную аппроксимацию:

$$\mathbf{P}(\xi, \eta) = (1 - \xi)^{L+1} \sum_{k=0}^L \xi^k \mathbf{a}_k(\eta) + \xi^{L+1} \sum_{k=0}^L (1 - \xi)^k \mathbf{b}_k(\eta), \quad (8)$$

$$\xi = \frac{u - z_i}{\Delta_u}, \quad \eta = \frac{v - w_j}{\Delta_v}, \quad u \in [z_i, z_{i+1}], \quad v \in [w_j, w_{j+1}], \quad \xi \in [0, 1], \quad \eta \in [0, 1].$$

Отличие (8) от одномерной LL -аппроксимации состоит в зависимости коэффициентов полинома от переменной η . Так же, как в одномерной LL -аппроксимации, потребуем, чтобы все производные выше первой по переменной ξ на границе Ω_{ij} были равны нулю. В этом случае справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k(\eta) &= \varepsilon_k [(L + k)\mathbf{P}(0, \eta) + k\mathbf{P}_\xi(0, \eta)], \\ \mathbf{b}_k(\eta) &= \varepsilon_k [(L + k)\mathbf{P}(1, \eta) - k\mathbf{P}_\xi(1, \eta)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Четыре вектор-функции $\mathbf{P}(0, \eta)$, $\mathbf{P}(1, \eta)$, $\mathbf{P}_\xi(0, \eta)$, $\mathbf{P}_\xi(1, \eta)$ – полиномы и их первые производные (здесь индекс обозначает производную по этой переменной) на границах области Ω_{ij} – будем представлять с помощью одномерных LL -аппроксимаций по переменной η . Линейный каркас для этих аппроксимаций будет строиться на точках, рассчитываемых по формулам представления линейчатых поверхностей (7) на элементах опорной поверхности, покрывающих область Ω_{ij} . Так, для левой границы Ω_{ij} при $\xi = 0$ точками линейного каркаса LL -аппроксимации для вектор-функции $\mathbf{P}(0, \eta)$ будут служить значения, рассчитанные в областях I и II: $\mathbf{G}_{i-1, j-1}(1/2, 0)$, $\mathbf{G}_{i-1, j-1}(1/2, 1)$, $\mathbf{G}_{i-1, j}(1/2, 0)$, которые в формулах (4) будут соответствовать величинам \mathbf{r}_{i-1} , \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_{i+1} . Аналогично для остальных трех функций. Таким образом, величинам \mathbf{r}_{i-1} , \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_{i+1} в формулах (4) будут соответствовать:

для функции $\mathbf{P}(0, \eta)$

$$(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2, \quad (\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_5)/2, \quad (\mathbf{r}_7 + \mathbf{r}_8)/2,$$

для функции $\mathbf{P}(1, \eta)$

$$(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/2, \quad (\mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_6)/2, \quad (\mathbf{r}_8 + \mathbf{r}_9)/2,$$

для функции $\mathbf{P}_\xi(0, \eta) = \partial\mathbf{P}(0, \eta)/\partial\xi$

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/2, \quad (\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_4)/2, \quad (\mathbf{r}_8 - \mathbf{r}_7)/2,$$

$$\begin{aligned}
P(0, \eta) &= (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_5)/4 + \eta(\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2 + \\
&\quad + h(\eta)(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_7 + \mathbf{r}_8 - 2\mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_5)/4, \\
P(1, \eta) &= (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_6)/4 + \eta(\mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)/2 + \\
&\quad + h(\eta)(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_8 + \mathbf{r}_9 - 2\mathbf{r}_5 - 2\mathbf{r}_6)/4, \\
P_{\xi}(0, \eta) &= (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)/4 + \eta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)/2 + \\
&\quad + h(\eta)(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_8 - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_7 + 2\mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_5)/4, \\
P_{\xi}(1, \eta) &= (\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_5)/4 + \eta(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_3)/2 + \\
&\quad + h(\eta)(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_9 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_8 + 2\mathbf{r}_5 - 2\mathbf{r}_6)/4.
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставив (10) в (9), получим соотношения для коэффициентов полинома (8), который теперь, используя формулы (2), можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
P(\xi, \eta) &= [1 + 2\xi - 2h(\xi)][\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_5 + 2\eta(\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_2) + h(\eta)(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_8 - 2\mathbf{r}_5)]/4 + \\
&\quad + [1 - 2\xi + h(\xi)][\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 + 2\eta(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1) + h(\eta)(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_7 - 2\mathbf{r}_4)]/4 + \\
&\quad + h(\xi)[\mathbf{r}_6 + \mathbf{r}_3 + 2\eta(\mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_3) + h(\eta)(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_9 - 2\mathbf{r}_6)]/4.
\end{aligned} \tag{11}$$

Воспользовавшись буквенными обозначениями для узлов (см. рис. 2) и введя верхние индексы для указания порции, обозначим:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1^j &= (\mathbf{r}_{i-1j-1} + \mathbf{r}_{ij-1} + \mathbf{r}_{i-1j} + \mathbf{r}_{ij})/4, \\
\mathbf{R}_2^j &= (\mathbf{r}_{ij} + \mathbf{r}_{i-1j} - \mathbf{r}_{i-1j-1} - \mathbf{r}_{ij-1})/2, \\
\mathbf{R}_3^j &= (\mathbf{r}_{i-1j-1} + \mathbf{r}_{ij-1} + \mathbf{r}_{i-1j+1} + \mathbf{r}_{ij+1} - 2\mathbf{r}_{ij} - 2\mathbf{r}_{i-1j})/4, \\
\mathbf{R}_4^j &= (\mathbf{r}_{ij-1} - \mathbf{r}_{i-1j-1} + \mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{i-1j})/2, \\
\mathbf{R}_5^j &= \mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{i-1j} + \mathbf{r}_{i-1j-1} - \mathbf{r}_{ij-1}, \\
\mathbf{R}_6^j &= (\mathbf{r}_{ij-1} - \mathbf{r}_{i-1j-1} + \mathbf{r}_{ij+1} - \mathbf{r}_{i-1j+1} - 2\mathbf{r}_{ij} + 2\mathbf{r}_{i-1j})/2, \\
\mathbf{R}_7^j &= (\mathbf{r}_{i-1j-1} + \mathbf{r}_{i+1j-1} + \mathbf{r}_{i-1j} + \mathbf{r}_{i+1j} - 2\mathbf{r}_{ij} - 2\mathbf{r}_{i-1j})/4,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\mathbf{R}_8^j = (\mathbf{r}_{i-1j} + \mathbf{r}_{i+1j} - \mathbf{r}_{i-1j-1} - \mathbf{r}_{i+1j-1} + 2\mathbf{r}_{ij-1} - 2\mathbf{r}_{ij})/4,$$

$$\mathbf{R}_9^j = (\mathbf{r}_{i-1j-1} + \mathbf{r}_{i+1j-1} + \mathbf{r}_{i-1j+1} + \mathbf{r}_{i+1j+1} - 2\mathbf{r}_{ij-1} - 2\mathbf{r}_{ij+1} - 2\mathbf{r}_{i-1j} - 2\mathbf{r}_{i+1j} + 4\mathbf{r}_{ij})/4.$$

Запишем с использованием обозначений (12) рабочие формулы для полинома и его производных:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^j(\xi, \eta) &= \mathbf{R}_1^j + \eta \mathbf{R}_2^j + h(\eta) \mathbf{R}_3^j + \xi [\mathbf{R}_4^j + \eta \mathbf{R}_5^j + h(\eta) \mathbf{R}_6^j] + \\ &\quad + h(\xi) [\mathbf{R}_7^j + \eta \mathbf{R}_8^j + h(\eta) \mathbf{R}_9^j], \\ \mathbf{P}_\xi^j(\xi, \eta) &= \mathbf{R}_4^j + \eta \mathbf{R}_5^j + h(\eta) \mathbf{R}_6^j + h'(\xi) [\mathbf{R}_7^j + \eta \mathbf{R}_8^j + h(\eta) \mathbf{R}_9^j], \\ \mathbf{P}_{\xi\xi}^j(\xi, \eta) &= h''(\xi) [\mathbf{R}_7^j + \eta \mathbf{R}_8^j + h(\eta) \mathbf{R}_9^j], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_\eta^j(\xi, \eta) = \mathbf{R}_2^j + \xi \mathbf{R}_5^j + h(\xi) \mathbf{R}_8^j + h'(\eta) [\mathbf{R}_3^j + \xi \mathbf{R}_6^j + h(\xi) \mathbf{R}_9^j],$$

$$\mathbf{P}_{\eta\eta}^j(\xi, \eta) = h''(\eta) [\mathbf{R}_3^j + \xi \mathbf{R}_6^j + h(\xi) \mathbf{R}_9^j],$$

$$\mathbf{P}_{\xi\eta}^j(\xi, \eta) = \mathbf{R}_5^j + h'(\eta) \mathbf{R}_6^j + h'(\xi) \mathbf{R}_8^j + h'(\xi) h'(\eta) \mathbf{R}_9^j.$$

Покажем, что при любом заданном значении одной из переменных на Ω_j полином представляет собой одномерную LL -аппроксимацию по другой переменной. Пусть задано значение переменной η , тогда, если одномерный полином по переменной ξ представляет LL -аппроксимацию, согласно первой формуле (4), он должен иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^j(\xi, \eta) &= [\mathbf{r}_{10}(\eta) + \mathbf{r}_{11}(\eta)]/2 + \xi [\mathbf{r}_{11}(\eta) - \mathbf{r}_{10}(\eta)] + \\ &\quad + h(\xi) [\mathbf{r}_{10}(\eta) + \mathbf{r}_{12}(\eta) - 2\mathbf{r}_{11}(\eta)]/2. \end{aligned} \quad (14)$$

Точки $\mathbf{r}_{10}(\eta)$, $\mathbf{r}_{11}(\eta)$, $\mathbf{r}_{12}(\eta)$ (на рис. 2 обозначены крестиками) вычисляются по аналогичным формулам одномерной LL -аппроксимации в направлении переменной η :

$$\mathbf{r}_{10}(\eta) = (\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1)/2 + \eta(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1) + h(\eta)(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_7 - 2\mathbf{r}_4)/2,$$

$$\mathbf{r}_{11}(\eta) = (\mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_2)/2 + \eta(\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_2) + h(\eta)(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_8 - 2\mathbf{r}_5)/2,$$

$$\mathbf{r}_{12}(\eta) = (\mathbf{r}_6 + \mathbf{r}_3)/2 + \eta(\mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_3) + h(\eta)(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_9 - 2\mathbf{r}_6)/2,$$

откуда, согласно обозначениям (12), следует, что

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_{10}(\eta) + \mathbf{r}_{11}(\eta)]/2 &= \mathbf{R}_1^j + \eta \mathbf{R}_2^j + h(\eta) \mathbf{R}_3^j, \\ \mathbf{r}_{11}(\eta) - \mathbf{r}_{10}(\eta) &= \mathbf{R}_4^j + \eta \mathbf{R}_5^j + h(\eta) \mathbf{R}_6^j, \end{aligned} \quad (15)$$

$$[\mathbf{r}_{10}(\eta) + \mathbf{r}_{12}(\eta) - \mathbf{r}_{11}(\eta)]/2 = \mathbf{R}_7^j + \eta \mathbf{R}_8^j + h(\eta) \mathbf{R}_9^j.$$

Подставив (15) в (14), получаем исходную формулу – первое соотношение (13).

Аналогично и по второму направлению. Пусть задано значение переменной ξ , тогда, если одномерный полином по переменной η представляет LL -аппроксимацию, согласно первой формуле (4), он должен иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^j(\xi, \eta) = & [\mathbf{r}_{14}(\xi) + \mathbf{r}_{13}(\xi)]/2 + \eta[\mathbf{r}_{14}(\xi) - \mathbf{r}_{13}(\xi)] + \\ & + h(\eta)[\mathbf{r}_{13}(\xi) + \mathbf{r}_{15}(\xi) - 2\mathbf{r}_{14}(\xi)]/2. \end{aligned} \quad (16)$$

Точки $\mathbf{r}_{13}(\xi)$, $\mathbf{r}_{14}(\xi)$, $\mathbf{r}_{15}(\xi)$ (на рис. 2 обозначены крестиками) вычисляются по аналогичным формулам одномерной LL -аппроксимации в направлении переменной ξ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{13}(\xi) &= (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1)/2 + \xi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + h(\xi)(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2)/2, \\ \mathbf{r}_{14}(\xi) &= (\mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_4)/2 + \xi(\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_4) + h(\xi)(\mathbf{r}_6 + \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_5)/2, \\ \mathbf{r}_{15}(\xi) &= (\mathbf{r}_8 + \mathbf{r}_7)/2 + \xi(\mathbf{r}_8 - \mathbf{r}_7) + h(\xi)(\mathbf{r}_9 + \mathbf{r}_7 - 2\mathbf{r}_8)/2, \end{aligned}$$

откуда, согласно обозначениям (12), следует, что

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_{14}(\xi) + \mathbf{r}_{13}(\xi)]/2 &= \mathbf{R}_1^j + \xi \mathbf{R}_4^j + h(\xi) \mathbf{R}_7^j, \\ \mathbf{r}_{14}(\xi) - \mathbf{r}_{13}(\xi) &= \mathbf{R}_2^j + \xi \mathbf{R}_5^j + h(\xi) \mathbf{R}_8^j, \\ [\mathbf{r}_{13}(\xi) + \mathbf{r}_{15}(\xi) - \mathbf{r}_{14}(\xi)]/2 &= \mathbf{R}_3^j + \xi \mathbf{R}_6^j + h(\xi) \mathbf{R}_9^j. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив (17) в (16), получаем исходную формулу – первое соотношение (13).

Из этого следует, что при задании одной из координат в направлении другой координаты полином представляет одномерную LL -аппроксимацию и, следовательно, обладает всеми свойствами LL -аппроксимации по этой координате: отсутствием осцилляций и монотонностью при монотонности задающих точек.

Используя обозначения (12), легко показать справедливость следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^j + \mathbf{R}_4^j + \mathbf{R}_7^j &= \mathbf{R}_1^{j+1}, & \mathbf{R}_2^j + \mathbf{R}_5^j + \mathbf{R}_8^j &= \mathbf{R}_2^{j+1}, & \mathbf{R}_3^j + \mathbf{R}_6^j + \mathbf{R}_9^j &= \mathbf{R}_3^{j+1}, \\ \mathbf{R}_1^j + \mathbf{R}_2^j + \mathbf{R}_3^j &= \mathbf{R}_1^{j+1}, & \mathbf{R}_4^j + \mathbf{R}_5^j + \mathbf{R}_6^j &= \mathbf{R}_4^{j+1}, & \mathbf{R}_7^j + \mathbf{R}_8^j + \mathbf{R}_9^j &= \mathbf{R}_7^{j+1}, \\ \mathbf{R}_4^j + 2\mathbf{R}_7^j &= \mathbf{R}_4^{j+1}, & \mathbf{R}_5^j + 2\mathbf{R}_8^j &= \mathbf{R}_5^{j+1}, & \mathbf{R}_6^j + 2\mathbf{R}_9^j &= \mathbf{R}_6^{j+1}, \\ \mathbf{R}_2^j + 2\mathbf{R}_3^j &= \mathbf{R}_2^{j+1}, & \mathbf{R}_5^j + 2\mathbf{R}_6^j &= \mathbf{R}_5^{j+1}, & \mathbf{R}_8^j + 2\mathbf{R}_9^j &= \mathbf{R}_8^{j+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Непрерывность полинома и всех его производных на границах областей определения порций доказывается с помощью формул (3), (13) и (18). Покажем это на примере смешанной производной полинома:

$$\mathbf{P}_{\xi\eta}^{i+1j}(0, \eta) = \mathbf{R}_5^{i+1j} + h'(\eta)\mathbf{R}_6^{i+1j},$$

$$\mathbf{P}_{\xi\eta}^{ij}(1, \eta) = \mathbf{R}_5^{ij} + 2\mathbf{R}_8^{ij} + h'(\eta)(\mathbf{R}_6^{ij} + 2\mathbf{R}_9^{ij}) = \mathbf{R}_5^{i+1j} + h'(\eta)\mathbf{R}_6^{i+1j},$$

откуда следует $\mathbf{P}_{\xi\eta}^{i+1j}(0, \eta) = \mathbf{P}_{\xi\eta}^{ij}(1, \eta)$. Аналогично для всех остальных производных.

По первой формуле (13) с помощью (3) напишем значение полинома в точке u_i, v_j :

$$\mathbf{P}(1/2, 1/2) = \mathbf{r}_5 + d_L(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_6 + \mathbf{r}_8 - 4\mathbf{r}_5) + 4d_L^2\mathbf{R}_9. \quad (19)$$

Из (19) аналогично тому, как это показано для (5), следует стремление аппроксимирующего полинома в точке u_i, v_j к заданному значению \mathbf{r}_5 при $L \rightarrow \infty$.

Граничные точки $\mathbf{r}_{1j}, \mathbf{r}_{K_x j}, \mathbf{r}_{i1}, \mathbf{r}_{iK_y}, i = \overline{1, K_x}, j = \overline{1, K_y}$, будем определять из экстраполяции на элементах опорной поверхности, прилегающих к граничным элементам. Так, например, для $i=1, j=1$ точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_7$ определяются по формуле (7) при значениях переменных χ и φ соответственно $(-1, -1), (0, -1), (1, -1), (-1, 0), (-1, 1)$. Таким образом, для граничных точек будем иметь следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i0} &= 2\mathbf{r}_{i1} - \mathbf{r}_{i2}, & \mathbf{r}_{iK_y+1} &= 2\mathbf{r}_{iK_y} - \mathbf{r}_{iK_y-1}, \\ \mathbf{r}_{0j} &= 2\mathbf{r}_{1j} - \mathbf{r}_{2j}, & \mathbf{r}_{K_x+1j} &= 2\mathbf{r}_{K_x j} - \mathbf{r}_{K_x-1j}, & i = \overline{1, K_x}, j = \overline{1, K_y}, \\ \mathbf{r}_{00} &= 4\mathbf{r}_{11} - 2\mathbf{r}_{21} - 2\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{22}, \\ \mathbf{r}_{K_x+10} &= 4\mathbf{r}_{K_x 1} - 2\mathbf{r}_{K_x-11} - 2\mathbf{r}_{K_x 2} + \mathbf{r}_{K_x-12}, \\ \mathbf{r}_{0K_y+1} &= 4\mathbf{r}_{1K_y} - 2\mathbf{r}_{1K_y-1} - 2\mathbf{r}_{2K_y} + \mathbf{r}_{2K_y-1}, \\ \mathbf{r}_{K_x+1K_y+1} &= 4\mathbf{r}_{K_x K_y} - 2\mathbf{r}_{K_x-1K_y} - 2\mathbf{r}_{K_x K_y-1} + \mathbf{r}_{K_x-1K_y-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что при значениях дополнительных точек, рассчитанных по формулам (20), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{11}(1/2, 1/2) &= \mathbf{r}_{11}, & \mathbf{P}^{K_x 1}(1/2, 1/2) &= \mathbf{r}_{K_x 1}, & \mathbf{P}^{1K_y}(1/2, 1/2) &= \mathbf{r}_{1K_y}, \\ \mathbf{P}^{K_x K_y}(1/2, 1/2) &= \mathbf{r}_{K_x K_y}, & \mathbf{R}_9^{i1} = \mathbf{R}_9^{iK_y} = \mathbf{R}_9^{K_x j} = \mathbf{R}_9^{1j} &= 0, & i = \overline{1, K_x}, j = \overline{1, K_y}. \end{aligned}$$

Из (19) можно видеть, что аппроксимирующий полином проходит через заданную точку \mathbf{r}_3 только тогда, когда все девять представляющих точек порции лежат в одной плоскости, поскольку при этом

$$\mathbf{R}_1^j = (3\mathbf{r}_{i+1j} + 3\mathbf{r}_{ij+1} + 4\mathbf{r}_{i+1j+1})/2, \quad \mathbf{R}_2^j = \mathbf{r}_{i+1j+1} - \mathbf{r}_{i+1j}, \quad \mathbf{R}_3^j = 0, \\ \mathbf{R}_4^j = \mathbf{r}_{i+1j+1} - \mathbf{r}_{ij+1}, \quad \mathbf{R}_5^j = \mathbf{R}_6^j = \mathbf{R}_7^j = \mathbf{R}_8^j = \mathbf{R}_9^j = 0$$

и полином (13) представляет уравнение плоскости

$$\mathbf{P}^j(\xi, \eta) = \mathbf{R}_1^j + \eta \mathbf{R}_2^j + \xi \mathbf{R}_4^j,$$

проходящей через эти точки.

Рассуждения, аналогичные приведенным для одномерной аппроксимации относительно операций, в результате которых полином проходит через задающие точки, можно повторить и для LL -аппроксимации поверхности. Здесь уже необходимо будет решать систему $(K_x - 1) \times (K_y - 1)$ линейных алгебраических уравнений, построенную на основе системы уравнений (19) с $(K_x - 1) \times (K_y - 1)$ неизвестными.

Примененная схема построения аппроксимации поверхности обеспечивает непрерывность аппроксимирующего полинома в линиях сшивки вместе со всеми производными вплоть до $2L + 1$ -го порядка. Процедура построения полинома – соотношения (10) – не требует дополнительной памяти (кроме таблиц задающих точек и биномиальных коэффициентов, формулы легко программируемы).

Построение изолиний. Для сечений плоскостью (y, z) при $x = x^*$, ввиду того что выбранный способ задания точек поверхности предполагает зависимость компоненты x только от параметра u , формула для x -компоненты аппроксимирующего полинома имеет вид

$$P_x(\xi) = (x_i + x_{i-1})/2 + \xi(x_i - x_{i-1}) + h(\xi)(x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i)/2, \\ i = \text{entier}[u(K+1) + 0,5], \quad \xi = u(K+1) - i + 0,5, \quad \xi \in [0,1]. \quad (21)$$

Следовательно, для построения сечения по координате x необходимо найти из (21) значение параметра $u = u^*$, обеспечивающее равенство полинома (21) заданному значению $x = x^*$, и далее компоненты u и z определяются из (4) как функции параметра v при заданном $u = u^*$.

Для построения изолинии $y = y^*$ воспользуемся требованием $dy = 0$, которое должно выполняться на данной изолинии. Это требование можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{y = \text{const}} = - \frac{\partial P_y / \partial u}{\partial P_y / \partial v}. \quad (22)$$

Уравнение (22), описывающее изолинию $y = y^*$ в плоскости (u, v) , можно представить в другом более удобном для интегрирования виде, если в ка-

честве аргумента выбрать длину дуги изолинии. В этом случае изолиния будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du}{dl} &= \frac{\partial P_y}{\partial v} / \sqrt{\left(\frac{\partial P_y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_y}{\partial v}\right)^2}, \\ \frac{dv}{dl} &= -\frac{\partial P_y}{\partial u} / \sqrt{\left(\frac{\partial P_y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_y}{\partial v}\right)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

В качестве начальных условий достаточно найти точку на плоскости (u, v) , для которой выполняется $P_y(u_0, v_0) = y^*$, и от этой точки проинтегрировать систему уравнений (23) в обе стороны до границы области или, если изолиния замкнута, до точки замыкания (смена направления интегрирования здесь означает замену знаков правых частей системы (23) на противоположные). Отметим, что очень часто система (23) оказывается жесткой и, следовательно, требует применения специальных методов, ориентированных на интегрирование жестких систем. Можем рекомендовать для этого метод, разработанный авторами настоящей статьи [7].

Метод вариации поверхности. Решение задач оптимизации обычно связано с варьированием кривых или поверхностей. При этом возникает проблема, связанная с большим количеством варьируемых параметров, если, например, варьировать поверхность посредством последовательной вариации всех задающих точек. Целесообразно варьировать некоторые подмножества свободных параметров или некоторые функции от этих параметров, число которых может быть значительно меньше их общего числа, соблюдая при этом требование достаточно широкого множества получаемых вариаций. Один из способов такого подхода при варьировании кривых опубликован в [9]. Ниже приводится один из возможных способов вариации поверхности, позволяющий уменьшить число варьируемых параметров.

Пусть $\{r_{ij}^0\}$ – начальная матрица координат точек размерностью (n, m) , $\{r_{ij}\}$ – матрица после варьирования. Введем следующие обозначения для множеств индексов:

$$N_0 = \{i: i = \overline{1, n}\}, \quad N'_0 = \{i: i = \overline{1, n-1}\}, \quad M_0 = \{j: j = \overline{1, m}\}, \quad M'_0 = \{j: j = \overline{1, m-1}\},$$

$$N_j = \{i: r_{ij} = \text{var}; j \in M_0\}, \quad M_i = \{j: r_{ij} = \text{var}; i \in N_0\},$$

$$N_j^* = \{i: r_{ij} = r_{ij}^0; j \in M_0\}, \quad M_i^* = \{j: r_{ij} = r_{ij}^0; i \in N_0\},$$

$$N'_j = \{i: r_{ij} = \text{var}; j \in M_0; i \in N'_0\}, \quad M'_i = \{j: r_{ij} = \text{var}; i \in N_0; j \in M'_0\},$$

обозначим

$$P_i = \sum_{j \in M_0} r_{ij}, \quad R_j = \sum_{i \in N_0} r_{ij}, \quad Q = \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in M_0} r_{ij},$$

$$\hat{r}_{ij} = r_{ij}/Q, \quad \hat{P}_i = P_i/Q, \quad \hat{R}_j = R_j/Q.$$

Множества N_j (или M_i) определяют множества варьируемых координат, соответственно N_j^* (или M_i^*) – неварьируемых. Очевидно, что $N_0 = N_j \cup N_j^*$, $M_0 = M_i \cup M_i^*$.

Теперь воспользуемся следующим приемом: будем варьировать множество параметров $P_i, i \in N_0, R_j, j \in M_0, Q$ так, что для получения матрицы $\{r_{ij}\}$ необходимо при заданных связях

$$\varphi_i = \sum_{j \in M_i} \hat{r}_{ij} + \sum_{j \in M_i^*} \hat{r}_{ij} - \hat{P}_i = 0, \quad \psi_j = \sum_{i \in N_j} \hat{r}_{ij} + \sum_{i \in N_j^*} \hat{r}_{ij} - \hat{R}_j = 0, \quad (24)$$

$$\eta = \sum_{i \in N_0} \left(\sum_{j \in M_i} \hat{r}_{ij} + \sum_{j \in M_i^*} \hat{r}_{ij} \right) - 1 = 0, \quad \hat{r}_{ij} = \hat{r}_{ij}^0 \quad \text{при } i \in N_0, j \in M_i^*,$$

минимизировать функционал

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in M_i} (\hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ij}^0)^2. \quad (25)$$

Отметим, что поскольку $\sum_{i \in N_0} P_i = \sum_{j \in M_0} R_j = Q$, то $P_n = Q - \sum_{i \in N_0'} P_i$, $R_m = Q - \sum_{j \in M_0'} R_j$.

Решение задачи (24), (25) может быть получено посредством комбинации метода множителей Лагранжа и метода штрафных функций. С этой целью сформируем вспомогательный функционал в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i \in N_0} \left(\sum_{j \in M_i} (\hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ij}^0)^2 + S \sum_{j \in M_i^*} (\hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ij}^0)^2 \right) + \sum_{i \in N_0'} \alpha_i \varphi_i + \sum_{j \in M_0'} \beta_j \psi_j + \gamma \eta. \quad (26)$$

Здесь $S \gg 1$ – коэффициент штрафа.

Необходимые условия минимума функционала (26):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{r}_{ij}} = (\hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ij}^0) + \alpha_i \Big|_{i \neq n} + \beta_j \Big|_{j \neq m} + \gamma = 0, \quad i \in N_0, j \in M_i \text{ или } j \in M_0, i \in N_j, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{r}_{ij}} = \alpha_i \Big|_{i \neq n} + \beta_j \Big|_{j \neq m} + \gamma + S(\hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ij}^0) = 0, \quad i \in N_i^*, j \in M_i \text{ или } j \in M_0, i \in N_j^*. \quad (28)$$

Из решения систем линейных алгебраических уравнений (24), (27) определяются значения $\hat{r}_{ij}, i \in N_0, j \in M_i; \alpha_i, i \in N_0'; \beta_j, j \in M_0'$. Следует заметить, что поскольку при условии существования решения $S(\hat{r}_{ij} - \hat{r}_{ij}^0) \leq C < \infty$, $i \in N_0, j \in M_i^*$, то $\lim_{S \rightarrow \infty} \hat{r}_{ij} = \hat{r}_{ij}^0$.

Просуммируем уравнения (27) по $j \in M_i$ при каждом $i \in N_0$ и по $i \in N_j$ при каждом $j \in M_0$. С учетом сделанного замечания получим

$$m_i \alpha_i + \sum_{j \in M'_i} \beta_j + m_i \gamma = \hat{P}_i^0 - \hat{P}_i, \quad i \in N'_0, \quad (29)$$

$$\sum_{j \in M'_n} \beta_j + m_n \gamma = \hat{P}_n^0 - \hat{P}_n, \quad i = n, \quad (30)$$

$$\sum_{i \in N'_j} \alpha_i + n_j \beta_j + n_j \gamma = \hat{R}_j^0 - \hat{R}_j, \quad j \in M'_0, \quad (31)$$

$$\sum_{i \in N'_m} \alpha_i + n_m \gamma = \hat{R}_m^0 - \hat{R}_m, \quad j = m. \quad (32)$$

Здесь m_i, n_j – число варьируемых элементов соответственно в i -й строке и j -м столбце матрицы $\{r_{ij}\}$.

Сложив (30) и (32), получим

$$\sum_{i \in N'_n} \alpha_i + \sum_{j \in M'_n} \beta_j + (n_m + m_n) \gamma = (\hat{P}_n^0 - \hat{P}_n) + (\hat{R}_m^0 - \hat{R}_m). \quad (33)$$

Значения множителей Лагранжа $\alpha_i, \beta_j, \gamma$ определяются из решения систем линейных уравнений (29), (31) и уравнения (33), затем из (27) находятся значения варьируемой матрицы координат точек \hat{r}_{ij} .

Естественно, значения варьируемых параметров \hat{P}_i, \hat{R}_j, Q могут задаваться в любой комбинации. Ввиду невырожденности системы (29), (31), (33), малым вариациям $\delta \hat{P}_i, \delta \hat{R}_j$ будут соответствовать малые вариации $\delta \hat{r}_{ij}$.

Примеры. В качестве иллюстрации применения LL -аппроксимации на рис. 3, 4 приведены соответственно одномерные аппроксимации при $L=5$ контура и сечения поверхности самолетоподобной конфигурации (копия изображения с экрана компьютера). Контур задан 53 точками. Поверхность задана матрицами $\{y_{ij}\}, \{z_{ij}\}, i=1, K_x, j=1, K_y$, и столбцом $\{x_i\}, i=1, K_x$, при значениях $K_x=15, K_y=31$. На рисунке изображены 15 сечений $x = \text{const}$ и 11

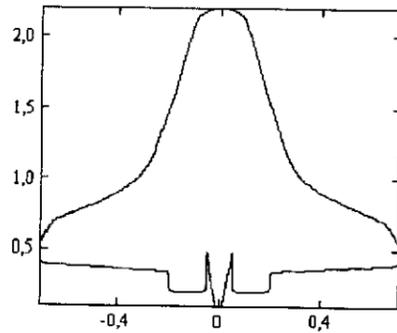


Рис. 3

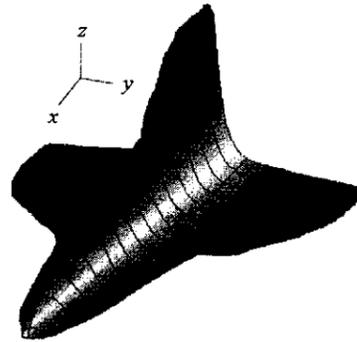


Рис. 4

сечений $y = \text{const}$ с удалением невидимых линий. Важно отметить, что в данном случае используется единый массив задающих точек и одна формула. При аппроксимации сложных поверхностей с использованием отдельных элементов поверхности в локальных системах координат возникают трудности при «сшивке» элементов с заданной степенью гладкости и варьировании поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1982.
2. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Мир, 1980.
3. Bezier P. Example of an existing system in the motor industry // The UNISURF System Proc. Roy. Soc. Lond. 1971. A321. P. 207.
4. Coons S. A. Surfaces for computer aided design of space forms // MAC-TR-41, Project MAC, M.I.T., 1967.
5. Ferguson J. C. Multivariable Curve interpolation // Journ. ACM. 1964. II, N 2. P. 221.
6. Аульченко С. М., Латыпов А. Ф. Построение плоских кривых с помощью параметрических полиномов четвертого порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. 35, № 7. С. 1139.
7. Аульченко С. М., Латыпов А. Ф., Никуличев Ю. В. Построение кривых с помощью параметрических полиномов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. 38, № 12. С. 1967.
8. Аульченко С. М., Латыпов А. Ф., Никуличев Ю. В. Метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием интерполяционных полиномов Эрмита // Там же. № 10. С. 1965.
9. Aulchenko S. M., Latypov A. F., Nikulichev Y. V. The study of scheme viscosity effect on the stream structure in the particle-in-cell method by the example of the perfect gas flow around a cylinder in a plane channel // Internat. Conf. on the Methods of Aerophysical Research: Proc. Novosibirsk, 1998. Pt. I. P. 5.

*Институт теоретической
и прикладной механики СО РАН,
E-mail: aulch@itam.nsc.ru*

*Поступила в редакцию
21 октября 1999 г.*