РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 4 2000

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.3.019 + 621.391.266

В. М. Ефимов, А. В. Торгов

(Новосибирск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФИЛЬТРА С КОНЕЧНО-ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ЗНАЧЕНИЯ ЕГО ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Параметры КИХ-фильтра определяются на основе минимизации интегрального среднеквадратичного критерия близости между заданной и искомой частотной характеристикой при ограничениях на значения последней.

1. При построении КИХ-фильтра с заданной четной частотной характеристикой $\tilde{h}(\omega)$ весьма эффективным является метод частотной выборки [1], при котором частотная характеристика искомого фильтра при числе отсчетов $2N+1$ определяется соотношением

$$\tilde{w}(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} \tilde{h}\left(\frac{2k}{2N+1}\right) \frac{\sin \dfrac{2N+1}{2}\pi\left(\omega - \dfrac{2k}{2N+1}\right)}{(2N+1)\sin \dfrac{\pi}{2}\left(\omega - \dfrac{2k}{2N+1}\right)}. \tag{1}$$

Если заданная частотная характеристика фильтра $\tilde{h}(\omega)$ достаточно гладкая и число отсчетов $2N+1$ достаточно велико, то соотношение (1), как правило, дает хорошие результаты, особенно в случае, когда характерные точки спектра совпадают с абсциссами частотной выборки. Для резко меняющейся частотной характеристики $\tilde{h}(\omega)$ в областях этих изменений значения части отсчетов в (1) делаются регулируемыми для того, чтобы ослабить возникающие колебания и, например, обеспечить соответствующее затухание частотной характеристики. Весовая функция КИХ-фильтра при этом определяется формулой

$$w_k = \frac{1}{2N+1}\left(\tilde{w}(0) + 2\sum_{m=1}^{N} \tilde{w}\left(\frac{2m}{2N+1}\right)\cos\frac{2\pi km}{2N+1}\right). \tag{2}$$

[2]. В этом случае значения частотной выборки $\tilde{h}\left(\frac{2k}{2N+1}\right)=1$, если $|k|<r$, $\tilde{h}\left(\frac{2k}{2N+1}\right)=\frac{1}{2}$, а при $k>r$ значения выборки равны нулю. При этом уровень колебаний частотной характеристики не слишком велик, а весовая функция низкочастотного фильтра в соответствии с (2) оказывается очень простой:

$$w_k=\frac{\sin\frac{2\pi rk}{2N+1}\cos\frac{\pi k}{2N+1}}{\sin\frac{\pi k}{2N+1}}. \tag{3}$$

Другим примером является построение фильтра заграждения на частотах, совпадающих с абсциссой частотной выборки $\frac{2|r|}{2N+1}$. В этом случае достаточно положить все значения $\tilde{w}\left(\frac{2k}{2N+1}\right)$, кроме случая $|k|=r$, равными единице, а значения $\tilde{w}\left(\frac{\pm 2r}{2N+1}\right)$ равными нулю. При этом в соответствии с (2) весовая функция КИХ-фильтра

$$w_k=\frac{1}{2N+1}\left(\frac{\sin \pi k}{\sin\frac{\pi k}{2N+1}}-\cos\frac{\pi rk}{2N+1}\right). \tag{4}$$

Если возникающие при этом колебания частотной характеристики в районе абсциссы $\frac{2r}{2N+1}$ оказываются нежелательными, то их можно существенно погасить, положив, например, как и в первом случае, $\tilde{w}\left(\frac{2(r-1)}{2N+1}\right)=$ $=\tilde{w}\left(\frac{2(r+1)}{2N+1}\right)=\frac{1}{2}$*.

Если число отсчетов, используемых для построения КИХ-фильтра, невелико, а абсциссы характерных точек спектра (например, частота непропускания) не совпадают с абсциссами частотной выборки, то рассмотренная выше

---

* Фильтр заграждения с весовой функцией (4) является решением задачи (5) при одном ограничении на частотную характеристику с абсциссой частотной выборки, что следует из (17).

процедура нахождения частотной характеристики становится несколько расплывчатой. Для того чтобы ослабить «произвол» в выборе регулируемых точек частотной характеристики, в качестве «дисциплинирующего» фактора ниже предлагается использовать минимум интегрального среднеквадратичного функционала между требуемой $\tilde{h}(\omega)$ и искомой $\tilde{w}(\omega)$ характеристиками при фиксации ряда значений искомой частотной характеристики $\{\tilde{w}(\omega_m)\}$.

2. Рассмотрим задачу минимизации интегрального функционала

$$\min_{\{w_k\}} \varepsilon^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\tilde{h}(\omega) - \sum_{k=-N}^{N} w_k \cos\pi k\omega\right)^2 d\omega + \sum_{m=1}^{M}\lambda_m \tilde{w}(\omega_m), \tag{5}$$

где $\{\tilde{w}(\omega_m)\}$ – совокупность регулируемых значений, которым должна равняться частотная характеристика на частотах $\{\omega_m\}$. Второе слагаемое в правой части (5) является ограничением на совокупность искомых коэффициентов $\{w_k\}$ весовой функции КИХ-фильтра, выраженным с помощью неопределенных множителей Лагранжа $\{\lambda_m\}$. Очевидно, что минимум функционала (5) при отсутствии ограничений соответствует обычному разложению частотной характеристики $\tilde{h}(\omega)$ в конечный ряд Фурье и величина этого минимума с введением ограничений возрастает. Решение задачи (5) очевидно:

$$\begin{aligned} w_0 &= h_0 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\lambda_m, \qquad h_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{h}(\omega)d\omega, \\ w_k &= \frac{1}{2}h_k - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\lambda_m \cos\pi k\omega_m, \qquad h_k = \int_{-1}^{1}\tilde{h}(\omega)\cos\pi k\omega d\omega. \end{aligned} \tag{6}$$

В соотношениях (6) совокупность неопределенных множителей $\{\lambda_m\}$ определяется системой линейных уравнений

$$\sum_{r=1}^{M}\lambda_r\left(\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\omega_r-\omega_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\omega_r-\omega_m)} + \frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\omega_r+\omega_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\omega_r+\omega_m)}\right) =$$

$$= 4(\tilde{h}_{2N+1}(\omega_m) - \tilde{w}(\omega_m)), \quad m = \overline{1, M}, \tag{7}$$

где

$$\tilde{h}_{2N+1}(\omega_m) = h_0 + \sum_{k=1}^{N} h_k \cos\pi k\omega_m. \tag{8}$$

Используя (6), можно записать соотношение для частотной характеристики

$$\tilde{w}(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} w_k \cos\pi k\omega = \tilde{h}_{2N+1}(\omega) -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\left(\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\omega-\omega_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\omega-\omega_m)}+\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\omega+\omega_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\omega+\omega_m)}\right). \qquad (9)$$

Если множество абсцисс $\{w_m\}$ совпадает с множеством абсцисс частотной выборки $\omega_m=\frac{2m}{2N+1}(m=\overline{-N,\ N},\ M=2N+1)$, то система линейных уравнений (7) распадается на $(2N+1)$ уравнение:

$$\lambda_m=-\frac{4}{2N+1}\left(\tilde{h}_{2N+1}\left(\frac{2m}{2N+1}\right)-\tilde{w}\left(\frac{2m}{2N+1}\right)\right),\quad m=\overline{-N,\ N}, \qquad (10)$$

а частотная характеристика фильтра

$$\tilde{w}(\omega)=\tilde{h}_{2N+1}(\omega)-\sum_{m=-N}^{N}\left(\tilde{h}_{2N+1}\left(\frac{2m}{2N+1}\right)-\right.$$

$$\left.-\tilde{w}\left(\frac{2m}{2N+1}\right)\right)\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi\left(\omega-\frac{2m}{2N+1}\right)}{(2N+1)\sin\frac{\pi}{2}\left(\omega-\frac{2m}{2N+1}\right)}. \qquad (11)$$

Вторые слагаемые в (9) и (11) представляют собой дополнительные искажения частотной характеристики фильтра, обусловленные наложением на нее дополнительных ограничений (второе слагаемое функционала (5)). Общее значение функционала (5), как легко подсчитать,

$$\varepsilon^2=\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{\infty}h_k^2+(h_0-w_0)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(h_k-2w_k)^2. \qquad (12)$$

В этом соотношении первое слагаемое обусловлено конечностью ряда Фурье (конечностью числа отсчетов), используемого при построении фильтра, а остальные слагаемые вызваны отличием (из-за ограничений) истинных коэффициентов ряда Фурье от используемых при построении фильтра.

3. Рассмотрим более подробно построение фильтра заграждения на совокупности частот $\{\omega_m\}$ $(m=\overline{1,M})$. В этом случае система уравнений (7) для определения множителей Лагранжа принимает следующий вид:

$$\sum_{r=1}^{M}\lambda_r\left(\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\omega_r-\omega_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\omega_r-\omega_m)}+\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\omega_r+\omega_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\omega_r+\omega_m)}\right)=4(1-\tilde{w}(\omega_m)),\quad m=\overline{1,M}. \qquad (13)$$

Совокупность значений частотной характеристики $\{\widetilde{w}(\omega_m)\}$ характеризует коэффициенты пропускания на частотах заграждения. Если значения частотной характеристики $\widetilde{w}(\omega_m)=0$ ($m=\overline{1,M}$), то на всех частотах $\{\omega_m\}$ сигнал полностью подавляется. Решение задачи очень просто при одном ограничении на частотную характеристику $\widetilde{w}(\omega_1)$. В этом случае в соответствии с (7) неопределенный множитель Лагранжа

$$\lambda_1 = \frac{4(1-\widetilde{w}(\omega_1))}{2N+1+\dfrac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}}, \tag{14}$$

а значения весовой функции фильтра в соответствии с (6)

$$\begin{gathered} w_0 = 1-\frac{2(1-\widetilde{w}(\omega_1))}{2N+1+\dfrac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}}, \\ w_k = -\frac{2(1-\widetilde{w}(\omega_1))\cos\pi k\omega_1}{2N+1+\dfrac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}}. \end{gathered} \tag{15}$$

Частотная характеристика определяется соотношением

$$\widetilde{w}(\omega)=1-(1-\widetilde{w}(\omega_1))\frac{\dfrac{\sin\dfrac{2N+1}{2}\pi(\omega-\omega_1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(\omega-\omega_1)}+\dfrac{\sin\dfrac{2N+1}{2}\pi(\omega+\omega_1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(\omega+\omega_1)}}{2N+1+\dfrac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}}. \tag{16}$$

Рассмотрим более подробно этот случай, так как он представляет интерес для подавления гармонической помехи известной частоты ω_1. Из (14) следует, что при $\widetilde{h}(\omega)=1$, $\omega=\pm\omega_1$ и $\widetilde{w}(\omega_1)=0$ частотная характеристика

$$\widetilde{w}(\omega)=1-\frac{\dfrac{\sin\dfrac{2N+1}{2}\pi(\omega-\omega_1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(\omega-\omega_1)}+\dfrac{\sin\dfrac{2N+1}{2}\pi(\omega+\omega_1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(\omega+\omega_1)}}{2N+1+\dfrac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}} \tag{17}$$

обращается в нуль. Это теоретически позволяет подавить гармоническое колебание любой мощности и частоты ($|\omega_1|\le 1$) вне зависимости от длины КИХ-фильтра $L=2N+1$, в том числе и в случае, когда частота ω_1 не совпадает с абсциссами частотной выборки, равными $\dfrac{2|k|}{2N+1}$ ($|k|=\overline{1,N}$). При этом дисперсия ошибки искажения сигнала, если его спектральная плотность $S_f(\omega) = = \frac{\sigma_f^2}{2} 1[1-|\omega|]$,

$$\varepsilon^2 = \sigma_f^2 \frac{2}{2N+1+\frac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}}. \quad (18)$$

Величина дисперсии ошибки, как и следовало ожидать, обратно пропорциональна длине фильтра $L = 2N+1$.

Как показывает анализ (см. приложение 1), эти потери можно уменьшить, если учесть соотношение $\alpha_1^2 = \sigma_\varphi^2 / \sigma_f^2$ между дисперсией гармонического шума σ_φ^2 и дисперсией сигнала σ_f^2, выбрав

$$\tilde{w}(\omega_1) = \frac{1}{1+\frac{\alpha_1^2}{2}\left(2N+1+\frac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}\right)}. \quad (19)$$

Тогда дисперсия ошибки уменьшается и равна

$$\varepsilon^2 = \sigma_f^2 \frac{\alpha_1^4}{2} \frac{2N+1+\frac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}}{\left(1+\frac{\alpha_1^2}{2}\left(2N+1+\frac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}\right)\right)^2}. \quad (20)$$

При $\alpha_1^2 \to \infty$ соотношение (20) совпадает с (18).

Для иллюстрации изложенного выше рассмотрим пример, когда на тестовое изображение "Lenna" (рис. 1) наложен мощный гармонический сигнал частоты $\omega_1 = 0{,}25$ (рис. 2). На рис. 4, *a* приведен результат обработки смеси (рис. 3) фильтром заграждения с частотной характеристикой (17). На рис. 4, *b* показана фильтрация шума с частотой $\omega_1 = 0{,}5$, а на рис. 4, *c* – с частотой $\omega_1 = 0{,}75$. Соответствующие частотные характеристики фильтра изображены на рис. 5, *a* – *c*. Вследствие колебаний частотной характеристики фильтра заграждения на восстановленных изображениях возникают повторы, особенно при низкочастотном шуме. Характер этих искажений может быть изменен путем наложения дополнительных условий на частотную характеристику фильтра с целью «успокоения» ее колебаний. Однако при этом возрастает величина диспер-

Рис. 1. Тестовое изображение (256 × 256 × 8 бит)

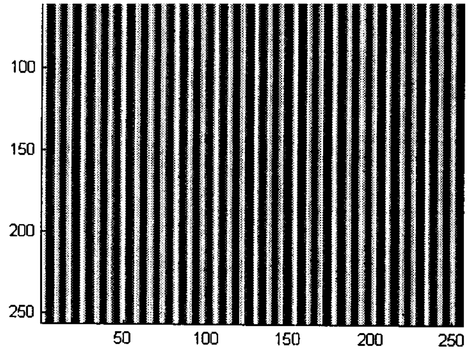


Рис. 2. Гармоническая помеха (256 × 256 × 10 бит)

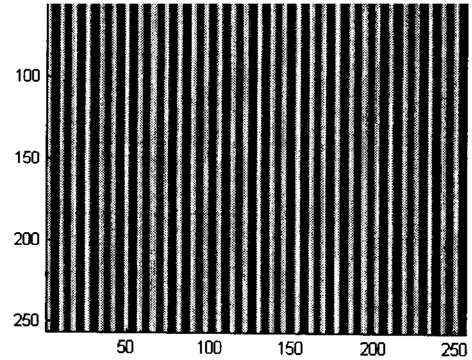
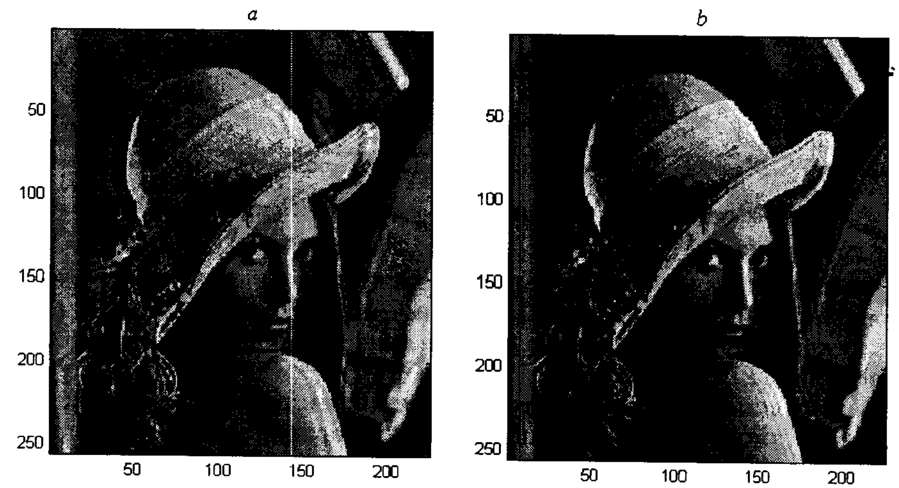


Рис. 3. Смесь тестового изображения и гармонической помехи (256 × 256 × 11 бит)



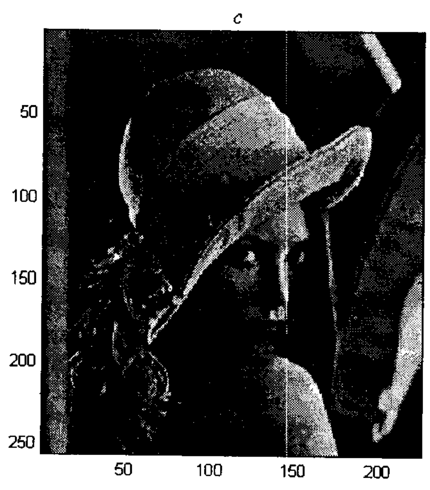


Рис. 4. Результат фильтрации шума с частотой $\omega_1 = 0{,}25$ (*a*), 0,5 (*b*) и 0,75 (*c*), $L = 31$ (226 × 256 × 8 бит)

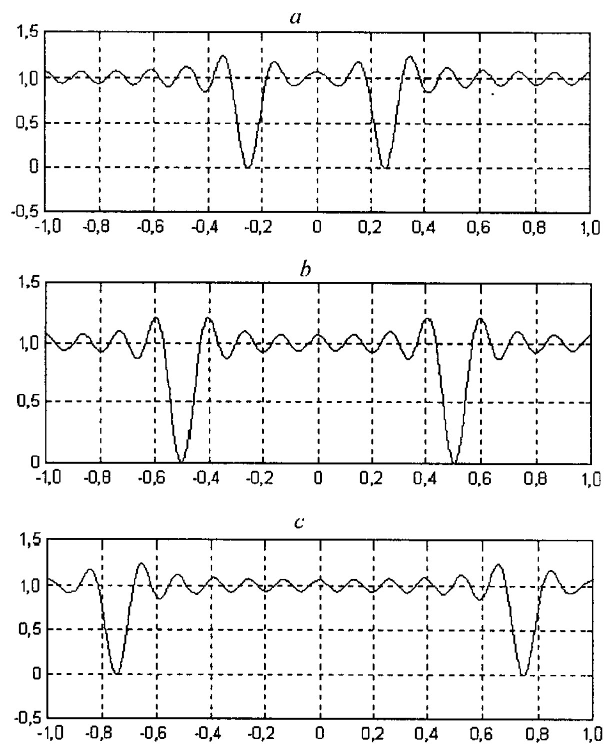


Рис. 5. Частотная характеристика фильтра: ω_1 = 0,25 (*a*), 0,5 (*b*) и 0,75 (*c*)

сии ошибки восстановления изображения и восстановленное изображение становится менее контрастным. При увеличении длины фильтра L дисперсия искажений восстановленного изображения уменьшается (обратно пропорционально L).

Выше рассматривалось построение четной частотной характеристики фильтра. Соотношения для нечетной частотной характеристики приведены в приложении 2. Если частотная характеристика смешанная, то ее необходимо известными методами разделить на четную и нечетную составляющую.

Решение задачи нахождения четной частотной характеристики в двумерном случае содержится в приложении 3.

4. Использование приведенных выше соотношений представляет один из возможных способов построения частотной характеристики КИХ-фильтра при наличии ограничений на нее на частотах, не совпадающих с абсциссами частотной выборки.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Построение фильтра заграждения на совокупности частот $\{\omega_m\}(m=\overline{1, M})$ с учетом энергии гармонических составляющих $\{\sigma^2_{m\varphi}\}$ можно связать с минимумом функционала

$$\min_{\{\omega_k\}} \int_{-1}^{1} S_f(\omega)\left(1 - \sum_{k=-N}^{N} w_k \cos\pi k\omega\right)^2 d\omega + \sum_{m=1}^{M} \sigma^2_{m\varphi} \tilde{w}^2(\omega_m). \qquad (\text{П}1)$$

Если спектр мощности сигнала постоянен в полосе частот $|\omega|<1$, то решение задачи (П1) примет вид:

$$w_0 = 1 - \sum_{m=1}^{M} \alpha_m^2 \tilde{w}(\omega_m), \qquad w_k = -\sum_{m=1}^{M} \alpha_m^2 \tilde{w}(\omega_m) \cos \pi k \omega_m, \tag{П2}$$

где $\alpha_m^2 = \sigma_{m\varphi}^2 / \sigma_f^2$.

Частотная характеристика фильтра заграждения

$$\tilde{w}(\omega) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \alpha_m^2 \tilde{w}(\omega_m) \left(\frac{\sin \frac{2N+1}{2} \pi (\omega - \omega_1)}{\sin \frac{\pi}{2} (\omega - \omega_1)} + \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \pi (\omega + \omega_1)}{\sin \frac{\pi}{2} (\omega + \omega_1)} \right). \tag{П3}$$

Значения частотной характеристики фильтра $\{\tilde{w}(\omega_m)\}$ на частотах $\{\omega_m\}$ подавления шума определяются системой уравнений

$$\tilde{w}(\omega_m) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{M} \alpha_r^2 \tilde{w}(\omega_r) \left(\frac{\sin \frac{2N+1}{2} \pi (\omega_r - \omega_m)}{\sin \frac{\pi}{2} (\omega_r - \omega_m)} + \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \pi (\omega_r + \omega_m)}{\sin \frac{\pi}{2} (\omega_r + \omega_m)} \right), \tag{П4}$$

где $m = \overline{1, M}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для оптимизации нечетной составляющей частотной характеристики при наличии ограничений на ее значения справедливы следующие соотношения:

$$w_k = \frac{1}{2} h_k - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \sin \pi k \omega_m, \qquad h_k = \int_{-1}^{1} \tilde{h}(\omega) \sin \pi k \omega \, d\omega, \tag{П5}$$

$$\tilde{w}(\omega) = \tilde{h}_{2N+1}(\omega) - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \left(\frac{\sin \frac{2N+1}{2} \pi (\omega - \omega_m)}{\sin \frac{\pi}{2} (\omega - \omega_m)} - \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \pi (\omega + \omega_m)}{\sin \frac{\pi}{2} (\omega + \omega_m)} \right), \tag{П6}$$

где $\tilde{h}_{2N+1}(\omega) = \sum_{k=1}^{N} h_k \sin \pi k \omega$.

Множители Лагранжа определяются системой уравнений

$$\sum_{r=1}^{M} \lambda_r \left(\frac{\sin \frac{2N+1}{2} \pi (\omega_r - \omega_m)}{\sin \frac{\pi}{2} (\omega_r - \omega_m)} - \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \pi (\omega_r + \omega_m)}{\sin \frac{\pi}{2} (\omega_r + \omega_m)} \right) = 4(\tilde{h}_{2N+1}(\omega_m) - \tilde{w}(\omega_m)). \tag{П7}$$

В двумерном случае ($|\omega|, |\lambda| \le 1$), если частотная характеристика – четная функция:

$$\widetilde{w}(\omega,\lambda) = w_{00} + 2\sum_{k=1}^{N} w_{k0}\cos\pi k\omega + 2\sum_{n=1}^{N} w_{0n}\cos\pi n\lambda +$$

$$w_{00} = \frac{1}{4} h_{00} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}\lambda_m, \sum^{N} \ldots \quad w_{k0} = \frac{1}{4} h_{k0} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}\lambda_m\cos\pi k\omega_m, \tag{П8}$$

$$w_{0n} = \frac{1}{4} h_{0n} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\cos\pi n\lambda_m, \qquad w_{kn} = \frac{1}{4} h_{kn} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\cos\pi k\omega_m\cos\pi n\lambda_m, \tag{П9}$$

где $h_{kn} = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} d\omega d\lambda \widetilde{h}(\omega,\lambda)\cos\pi k\omega\cos\pi n\lambda$. При этом частотная характеристика

$$\widetilde{w}(\omega,\lambda) = \widetilde{h}_{2N+1}(\omega,\lambda) - \frac{1}{8}\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\left(\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\omega-\omega_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\omega-\omega_m)} + \frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\omega+\omega_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\omega+\omega_m)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\lambda-\lambda_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\lambda-\lambda_m)} + \frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\lambda+\lambda_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\lambda+\lambda_m)}\right). \tag{П10}$$

Система уравнений для определения $\{\lambda_m\}$

$$\sum_{r=1}^{M}\lambda_r\left(\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\omega-\omega_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\omega-\omega_m)} + \frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\omega+\omega_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\omega+\omega_m)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\lambda-\lambda_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\lambda-\lambda_m)} + \frac{\sin\frac{2N+1}{2}\pi(\lambda+\lambda_m)}{\sin\frac{\pi}{2}(\lambda+\lambda_m)}\right) = 8(\widetilde{h}_{2N+1}(\omega_m,\lambda_m) - \widetilde{w}(\omega_m,\lambda_m)). \tag{П11}$$

Если регулируется одно (на самом деле из-за четности четыре) значение частотной характеристики, то в этом случае

$$\lambda_1 = \frac{8}{\left(2N+1+\dfrac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}\right)\left(2N+1+\dfrac{\sin(2N+1)\pi\lambda_1}{\sin\pi\lambda_1}\right)}, \tag{П12}$$

$$\tilde{w}(\omega) = 1 - \frac{\left(\dfrac{\sin\dfrac{2N+1}{2}\pi(\omega-\omega_1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(\omega-\omega_1)} + \dfrac{\sin\dfrac{2N+1}{2}\pi(\omega+\omega_1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(\omega+\omega_1)}\right)}{\left(2N+1+\dfrac{\sin(2N+1)\pi\omega_1}{\sin\pi\omega_1}\right)} \to$$

$$\to \frac{\left(\dfrac{\sin\dfrac{2N+1}{2}\pi(\lambda-\lambda_1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(\lambda-\lambda_1)} + \dfrac{\sin\dfrac{2N+1}{2}\pi(\lambda+\lambda_1)}{\sin\dfrac{\pi}{2}(\lambda+\lambda_1)}\right)}{\left(2N+1+\dfrac{\sin(2N+1)\pi\lambda_1}{\sin\pi\lambda_1}\right)}. \tag{П13}$$

Авторы признательны А. Н. Касперовичу за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рабинер Л., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.

2. **Ефимов В. М., Касперович А. Н.** Оптимизация децимирующего фильтра в АЦП с дельта–сигма-модуляцией // Автометрия. 1995. № 4. С. 75.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: torgov@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
2 июня 2000 г.