РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 2000

УДК 519.24

Е. Л. Кулешов

(Владивосток)

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ КАК ОСНОВА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ВЫСОКОГО РАЗРЕШЕНИЯ

Предлагается при вычислении спектральных оценок использовать процедуру декомпозиции исследуемого процесса на гармонические компоненты в отличие от преобразования Фурье в непараметрических методах. Показано, что такой подход может обеспечить более высокое разрешение спектральных оценок. Для решения проблемы декомпозиции предложен метод гармонического тестового сигнала, минимизирующего энергию суммы наблюдаемого процесса и тестового сигнала. Процедура декомпозиции сведена к решению системы линейных уравнений, в которой коэффициенты и свободные члены вычисляются через преобразование Фурье исследуемого процесса.

Пусть $x(t)$ – стационарный в широком смысле случайный процесс с математическим ожиданием $\mathbf{M}x(t)=0$ ($\mathbf{M}$ – оператор математического ожидания), корреляционной функцией $B(\tau)$ и спектральной плотностью $F(\omega)$. Известно, что

$$F(\omega)=\lim_{T\to\infty}\mathbf{M}f_0(\omega), \tag{1}$$

где $f_0(\omega)=|X_T(\omega)|^2/T$ – периодограмма,

$$X_T(\omega)=\int_0^T x(t)e^{-i\omega t}dt \tag{2}$$

– конечное преобразование Фурье по интервалу наблюдения $[0,T]$.

Непараметрические методы оценивания спектральной плотности сводятся к вычислению периодограммы и последующему ее сглаживанию спектральными окнами [1, 2]. Соотношение (1) можно рассматривать как формулу, порождающую эти методы, в том смысле, что непараметрические спектральные оценки определяются правой частью (1), в которой предел опускается, T фиксировано и оператор математического ожидания заменяется процедурой сглаживания спектральными окнами. Эти методы называют также классическими [1] или линейными. Последнее связано с тем, что спектральная оценка вычисляется как линейное преобразование над периодограммой. Эквивалентные спектральные оценки могут быть вычислены через корреляционные оценки и корреляционные окна [1, 2].

Непараметрические методы во многих случаях имеют недостаточную разрешающую способность, что особенно проявляется при анализе процессов с линейчатым спектром. Простым примером здесь может служить процесс в виде суммы гармонического сигнала со случайной фазой и помехи. Поэтому в последние годы интенсивно развивались новые методы спектрального анализа, обладающие более высокой разрешающей способностью, основанные на представлении исследуемых процессов математическими моделями, заданными с точностью до параметров. Здесь спектральная оценка получается из выражения для спектральной плотности математической модели путем замены параметров модели их оценками. Применение этих методов предполагает знание априорной информации, достаточной для построения параметрической модели исследуемого процесса. Если такая информация отсутствует, то применение параметрических методов может быть связано со значительными ошибками, возникающими из-за неадекватного выбора модели. В этом случае предпочтение следует отдать непараметрическим методам [1].

В данной работе предлагается в основу построения непараметрических спектральных оценок с высоким разрешением положить процедуру декомпозиции случайного процесса на гармонические компоненты. На возможность декомпозиции указывает известный результат, обоснованный А. Н. Колмогоровым [3] и состоящий в том, что стационарный случайный процесс $x(t)$ представим выражением

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{3}$$

где $X(\omega)$ – случайная функция с некоррелированными (δ-коррелированными) значениями. Выражение (3) называется спектральным представлением случайного процесса. Декомпозицию случайного процесса $x(t)$ на гармонические сигналы определим как выделение из суммы вида

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\Delta\omega)\frac{\Delta\omega}{2\pi}e^{in\Delta\omega t} \tag{4}$$

каждого слагаемого, где $\Delta\omega$ – шаг дискретизации по частоте. Каждое слагаемое в (4) – это гармонический сигнал без искажений, поскольку его амплитуда a_n и фаза ϑ_n определяются случайной величиной $X(n\Delta\omega)\Delta\omega/2\pi=a_n e^{i\vartheta_n}$ и поэтому не зависят от времени t. Если выполнить декомпозицию вида (4), то можно проанализировать отдельно каждую гармонику, оценить ее амплитуду a_n и затем оценить спектральную плотность на основе оценок всех амплитуд.

Такой подход может привести к существенному увеличению разрешающей способности спектральных оценок по сравнению с линейными спектральными оценками, для которых разрешение определяется величиной $1/T$, обратной длине интервала наблюдения. Это объясняется тем, что соотношение (4) обеспечивает прогноз случайного процесса вне интервала наблюдения. Действительно, каждая гармоника в (4) может быть точно продолжена на интервал длительностью $T_0>T$ и даже на всю действительную ось; сумма этих гармоник и является прогнозом процесса $x(t)$ за пределами интервала наблюдения. Однако правая часть (4) – периодическая функция с периодом $T_0 = 2\pi/\Delta\omega$, поэтому такой прогноз имеет смысл в пределах интервала длительностью не более чем T_0. Выбор малого шага дискретизации по частоте $\Delta\omega$ приводит к большому интервалу прогнозирования T_0, который обеспечивает более высокое разрешение, а также дает возможность, используя спектральные окна, эффективно снижать среднеквадратическую ошибку спектральной оценки за счет снижения ее дисперсии, если соседние спектральные амплитуды $X(n\Delta\omega)$ в (4) некоррелированы. В приложениях длина реализации является величиной ограниченной, и поэтому оценить спектральные амплитуды $X(\omega)$ в формуле (3) или (4) возможно только по конечному интервалу наблюдения. Отметим, что конечное преобразование Фурье $X_T(\omega)$ является неудовлетворительной оценкой спектральных амплитуд, поскольку характерный интервал $|\omega-\lambda|$, на котором корреляция $\mathbf{M}X_T(\omega)X_T^*(\lambda)$ ($*$ – знак операции комплексного сопряжения) существенно убывает, определяется величиной $1/T$, т. е. слишком большой, что следует из точного выражения для корреляции конечного преобразования Фурье, полученного в [4].

В данной работе для решения проблемы декомпозиции предложен метод гармонического тестового сигнала, минимизирующего энергию суммы наблюдаемого процесса и тестового сигнала. Процедура декомпозиции сведена к решению системы линейных уравнений.

Тестовый сигнал. Энергия суммы тестового сигнала и наблюдаемого процесса. Пусть наблюдаемый процесс $x(t)$ в соответствии с (4) представим соотношением

$$x(t)=\sum_{n=1}^{N}a_n e^{i(\omega_n t+\vartheta_n)},\qquad t\in[0,T], \tag{5}$$

интервал наблюдения $[0,T]$ разбивается на K интервалов длительностью Δt каждый, $T=K\Delta t$, а непрерывное время t заменяется на $t_k=k\Delta t$, $k=0,1,\ldots$ $\ldots,K-1$. Частоты $\omega_1,\ldots,\omega_N$ покрывают весь диапазон частот в спектре процесса $x(t)$ с шагом $\Delta\omega$. Величина Δt в (5) выбирается достаточно малой, что позволяет пренебречь ошибками, возникающими за счет дискретизации по времени.

Введем тестовый сигнал $a_0e^{i(\omega_0 t+\vartheta_0)}$ как дополнительное слагаемое к исследуемому процессу $x(t)$. Тогда $s(t)=x(t)+a_0e^{i(\omega_0 t+\vartheta_0)}$ представляет сумму наблюдаемого процесса и тестового сигнала. Найдем энергию E сигнала $s(t)$:

$$E=\Delta t\sum_{k=0}^{K-1}|s(t_k)|^2=\Delta t\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}a_n a_m e^{i(\vartheta_n-\vartheta_m)}\sum_{k=0}^{K-1}e^{i(\omega_n-\omega_m)k\Delta t}. \tag{6}$$

Введем обозначение:

$$\psi_{nm}=e^{i(\vartheta_n-\vartheta_m)}\,\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}e^{i(\omega_n-\omega_m)k\Delta t}. \tag{7}$$

Суммирование в (7) приводит к результату

$$\psi_{nm}=e^{i\left[(\omega_n-\omega_m)(K-1)\frac{\Delta t}{2}+\vartheta_n-\vartheta_m\right]}\,\frac{\sin(\omega_n-\omega_m)K\frac{\Delta t}{2}}{K\sin(\omega_n-\omega_m)\frac{\Delta t}{2}}. \tag{8}$$

Теперь энергия (6) сигнала $s(t)$ представима в виде

$$E = T\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_n a_m \psi_{nm}. \tag{9}$$

Преобразуем выражение (9) к виду, содержащему только действительные величины. Из (9) следует:

$$E = T\sum_{n=0}^{N} a_n^2 + T\sum_{\substack{0\le n,\,m\le N\\ n\ne m}} a_n a_m \psi_{nm} = T\sum_{n=0}^{N} a_n^2 + T\sum_{0\le n<m\le N}(a_n a_m \psi_{nm} + a_m a_n \psi_{mn}). \tag{10}$$

С учетом (7) $\psi_{mn} = \psi_{nm}^{*}$, поэтому $\psi_{nm} + \psi_{mn} = 2\mathrm{Re}\,\psi_{nm}$. Пусть $z_{nm} = \mathrm{Re}\psi_{nm}$, тогда энергия (10) принимает вид выражения

$$E = T\sum_{n=0}^{N} a_n^2 + 2T\sum_{0\le n<m\le N} a_n a_m z_{nm}, \tag{11}$$

содержащего только действительные величины.

Выделим в (11) последовательно слагаемые с индексами $n, m = 0$ и $n, m = j, 1 \le j \le N$. На первом шаге представим (11) в виде

$$E = T\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + Ta_0^2 + 2T\sum_{1\le n<m\le N} a_n a_m z_{nm} + 2T\sum_{1\le m\le N} a_0 a_m z_{0m}. \tag{12}$$

Здесь аналогично (11)

$$E_{n=1}^{N} = T\sum_{n=1}^{N} a_n^2 + 2T\sum_{1\le n<m\le N} a_n a_m z_{nm} \tag{13}$$

– энергия суммы гармоник с номерами от $n = 1$ до $n = N$. Теперь в (12) выделим слагаемое с индексами $n, m = j$, тогда

$$E = T\sum_{\substack{n=1\\ n\ne j}}^{N} a_n^2 + Ta_j^2 + Ta_0^2 + 2T\sum_{\substack{1\le n<m\le N\\ n\ne j,\, m\ne j}} a_n a_m z_{nm} +$$

$$+2T\left(\sum_{j<m\le N} a_j a_m z_{jm} + \sum_{1\le n<j} a_n a_j z_{nj}\right) + 2T\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne j}} a_0 a_m z_{0m} + 2Ta_0 a_j z_{0j}. \tag{14}$$

Аналогично (13) здесь

$$E_{\substack{n=1\\ n\ne j}}^{N} = T\sum_{\substack{n=1\\ n\ne j}}^{N} a_n^2 + 2T\sum_{\substack{1\le n<m\le N\\ n\ne j,\, m\ne j}} a_n a_m z_{nm} \tag{15}$$

$$E = E_{\substack{n=1\\ n\neq j}}^{N} + T(a_j^2 + 2a_0 a_j z_{0j} + a_0^2) + 2T \sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\neq j}} (a_j z_{jm} + a_0 z_{0m}) a_m. \qquad (16)$$

Настройка тестового сигнала по минимальной энергии. Пусть частота ω_0 тестового сигнала равна частоте гармонического сигнала с номером j: $\omega_0 = \omega_j$. Следовательно, все параметры сигнала $s(t)$ фиксированы, кроме a_0 – амплитуды и ϑ_0 – фазы тестового сигнала. Энергию (16) при этом будем рассматривать как функцию двух переменных: $E = E(a_0, \vartheta_0)$. Покажем, что функция $E(a_0, \vartheta_0)$ имеет минимум по своим переменным, и определим значение p_0 двумерного вектора (a_0, ϑ_0), обеспечивающее этот минимум, а также минимальное значение E_0 энергии E.

Известно [5], что достаточные условия существования минимума функции $E(a_0, \vartheta_0)$ двух переменных в точке p_0 заключаются в следующем: 1) функция E имеет непрерывные вторые производные; 2) в точке p_0 выполняются условия

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial \vartheta_0} = 0, \qquad (17)$$

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 E}{\partial a_0^2} & \dfrac{\partial^2 E}{\partial \vartheta_0 \partial a_0} \\ \dfrac{\partial^2 E}{\partial a_0 \partial \vartheta_0} & \dfrac{\partial^2 E}{\partial \vartheta_0^2} \end{vmatrix} > 0, \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial a_0^2} > 0. \qquad (18)$$

Вычисление производных по a_0 и ϑ_0 энергии $E(a_0, \vartheta_0)$ (16) и подстановка в (17) приводят к уравнениям, которым удовлетворяют a_0, ϑ_0, минимизирующие энергию:

$$a_0 + \sum_{1\le m\le N} a_m z_{0m} = 0, \qquad (19)$$

$$a_0 \sum_{1\le m\le N} a_m \frac{\partial z_{0m}}{\partial \vartheta_0} = 0. \qquad (20)$$

Условие (20) сводится к равенству $a_0 = 0$ или

$$\sum_{1\le m\le N} a_m \frac{\partial z_{0m}}{\partial \vartheta_0} = 0. \qquad (21)$$

В дальнейшем интерес представляет второй вариант: $a_0 \neq 0$ и условие (21). При этом уравнения (19), (21) определяют значение вектора (a_0, ϑ_0), минимизирующего энергию E. Условие $a_0 \neq 0$ можно выполнить несколькими способами, например, исключая из рассмотрения те частоты ω_j, на которых $a_0 = 0$, но это вопрос практической реализации.

Вычислим элементы определителя D (18). Из (16) следует:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a_0^2} = 2T, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \vartheta_0 \partial a_0} = 2T \sum_{1 \le m \le N} a_m \frac{\partial z_{0m}}{\partial \vartheta_0}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a_0 \partial \vartheta_0} = 2T \sum_{1 \le m \le N} a_m \frac{\partial z_{0m}}{\partial \vartheta_0}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \vartheta_0^2} = 2Ta_0 \sum_{1 \le m \le N} a_m \frac{\partial^2 z_{0m}}{\partial \vartheta_0^2} = -2Ta_0 \sum_{1 \le m \le N} a_m z_{0m}. \tag{25}$$

В последнем соотношении использовано равенство $\partial^2 z_{nm} / \partial \vartheta_n^2 = -z_{nm}$, которое следует из (8) и равенства $z_{nm} = \mathrm{Re}\psi_{nm}$.

Подставим (22)–(25) в определитель (18), тогда

$$D = (2T)^2 \left[-a_0 \sum_{1 \le m \le N} a_m z_{0m} - \left(\sum_{1 \le m \le N} a_m \frac{\partial z_{0m}}{\partial \vartheta_0} \right)^2 \right]. \tag{26}$$

В точке p_0, удовлетворяющей условиям (19), (21), значение определителя $D(p_0) = (2Ta_0)^2 > 0$. С учетом (22) $\partial^2 E / \partial a_0^2 > 0$. Таким образом, выполнены все достаточные условия минимума функции $E(a_0, \vartheta_0)$ в точке p_0.

Минимальное значение энергии. Определим минимальное значение E_0 энергии сигнала $s(t)$ при выборе a_0, ϑ_0, удовлетворяющих уравнениям (19), (21). Для этого подставим в (16) сначала условие (19), а затем (21). Пусть E_1 – энергия при подстановке в (16) соотношения (19), тогда

$$E_1 = E_{\substack{n=1 \\ n \ne j}}^N + T \left[a_j^2 - 2a_j z_{0j} \sum_{1 \le m \le N} a_m z_{0m} + \left(\sum_{1 \le m \le N} a_m z_{0m} \right)^2 \right] +$$

$$+ 2T \sum_{\substack{1 \le m \le N \\ m \ne j}} \left(a_j z_{jm} - z_{0m} \sum_{1 \le n \le N} a_n z_{0n} \right) a_m. \tag{27}$$

Преобразуем второе слагаемое в (27) следующим образом:

$$T \left[a_j^2 - 2a_j z_{0j} \left(a_j z_{0j} + \sum_{\substack{1 \le m \le N \\ m \ne j}} a_m z_{0m} \right) + \left(a_j z_{0j} + \sum_{\substack{1 \le m \le N \\ m \ne j}} a_m z_{0m} \right)^2 \right] =$$

$$=T\left[a_j^2-(a_j z_{0j})^2+\left(\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne j}} a_m z_{0m}\right)^2\right]. \qquad (28)$$

Аналогично третье слагаемое (27) преобразуется к виду

$$2T\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne j}}\left(a_j z_{jm}-z_{0m}a_j z_{0j}-z_{0m}\sum_{\substack{1\le n\le N\\ n\ne j}} a_n z_{0n}\right)a_m=$$

$$=2T\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne j}} a_j(z_{jm}-z_{0m}z_{0j})a_m-2T\left(\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne j}} a_m z_{0m}\right)^2. \qquad (29)$$

Подставим (28), (29) в (27), тогда

$$E_1=E^N_{\substack{n=1\\ n\ne j}}+Ta_j^2(1-z_{0j}^2)+2T\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne j}} a_j(z_{jm}-z_{0m}z_{0j})a_m-T\left(\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne j}} a_m z_{0m}\right)^2. \qquad (30)$$

Рассмотрим выражение $z_{jm}-z_{0m}z_{0j}$ в (30). Введем обозначения:

$$C_{nm}=\frac{\sin(\omega_n-\omega_m)K\dfrac{\Delta t}{2}}{K\sin(\omega_n-\omega_m)\dfrac{\Delta t}{2}}, \qquad (31)$$

$$\varphi_{nm}=(\omega_n-\omega_m)(K-1)\frac{\Delta t}{2}, \qquad (32)$$

тогда из (8) следует $z_{nm}=\mathrm{Re}\psi_{nm}=C_{nm}\cos(\varphi_{nm}+\vartheta_n-\vartheta_m)$. При настройке тестового сигнала на частоту ω_j имеет место следующее равенство: $\omega_0=\omega_j$, поэтому $z_{0j}=\cos(\vartheta_0-\vartheta_j)$, $C_{jm}=C_{0m}$, $\varphi_{jm}=\varphi_{0m}$ и, следовательно,

$$z_{jm}-z_{0m}z_{0j}=C_{0m}[\cos(\varphi_{0m}+\vartheta_j-\vartheta_m)-\cos(\varphi_{0m}+\vartheta_0-\vartheta_m)\cos(\vartheta_0-\vartheta_j)]. \qquad (33)$$

С учетом равенств $\cos(\varphi_{0m}+\vartheta_0-\vartheta_m)\cos(\vartheta_0-\vartheta_j)=[\cos(\varphi_{0m}+\vartheta_j-\vartheta_m)+\cos(\varphi_{0m}+2\vartheta_0-\vartheta_m-\vartheta_j)]/2$, $\cos(\varphi_{0m}+\vartheta_j-\vartheta_m)-\cos(\varphi_{0m}+2\vartheta_0-\vartheta_m-\vartheta_j)=-2\sin(\varphi_{0m}+\vartheta_0-\vartheta_m)\sin(\vartheta_j-\vartheta_0)$ выражение (33) преобразуется к виду

$$z_{jm}-z_{0m}z_{0j}=C_{0m}\sin(\varphi_{0m}+\vartheta_0-\vartheta_m)\sin(\vartheta_0-\vartheta_j)=-\sin(\vartheta_0-\vartheta_j)\frac{\partial}{\partial\vartheta_0}z_{0m}. \qquad (34)$$

Подставим этот результат в (30), тогда

$$E_1 = E^N_{\substack{n=1\\n\neq j}} + Ta_j^2(1-z_{0j}^2) - 2Ta_j\sin(\vartheta_0-\vartheta_j)\sum_{\substack{1\le m\le N\\m\neq j}} a_m\frac{\partial z_{0m}}{\partial\vartheta_0} - T\left(\sum_{\substack{1\le m\le N\\m\neq j}} a_m z_{0m}\right)^2. \quad (35)$$

Теперь в (35) можно ввести условие (21), при этом $E_1 = E_0$. Из (21) следует:

$$\sum_{\substack{1\le m\le N\\m\neq j}} a_m\frac{\partial z_{0m}}{\partial\vartheta_0} = -a_j\frac{\partial z_{0j}}{\partial\vartheta_0} = a_j\sin(\vartheta_0-\vartheta_j).$$

Для представления последнего слагаемого формулы (35) используем соотношение (19), тогда с учетом равенства $z_{0j} = \cos(\vartheta_0-\vartheta_j)$ выражение (35) принимает вид:

$$E_0 = E^N_{\substack{n=1\\n\neq j}} - Ta_j^2\sin^2(\vartheta_0-\vartheta_j) - T(a_0 + a_j\cos(\vartheta_0-\vartheta_j))^2. \quad (36)$$

Если значения a_0, ϑ_0, минимизирующие энергию E и удовлетворяющие уравнениям (19), (21), оказались равными $\vartheta_0 = \vartheta_j$ и $a_0 = -a_j$, тогда из (36) следует $E_0 = E^N_{\substack{n=1\\n\neq j}}$. Это означает, что процедура минимизации по a_0, ϑ_0 энергии сигнала $s(t)$ приводит к полному погашению гармоники с частотой ω_j в исследуемом процессе $x(t)$, т. е. к выделению этой гармоники из наблюдаемого процесса.

Редукция задачи декомпозиции случайного процесса на гармонические сигналы к системе линейных уравнений. Условия (19), (21) минимизации энергии сигнала $s(t)$ по параметрам a_0, ϑ_0 тестового сигнала при его настройке на частоту ω_j, т. е. при $\omega_0 = \omega_j$, можно свести к системе линейных уравнений. Решение этой системы позволяет вычислить оценки параметров $a_1, \ldots, a_N, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_N$ случайного процесса во всем спектре частот.

Используя обозначения (31), (32), представим

$$z_{0m} = C_{0m}\cos(\varphi_{0m}+\vartheta_0-\vartheta_m) =$$
$$= C_{0m}[\cos(\varphi_{0m}+\vartheta_0)\cos\vartheta_m + \sin(\varphi_{0m}+\vartheta_0)\sin\vartheta_m]. \quad (37)$$

Отсюда

$$\frac{\partial z_{0m}}{\partial\vartheta_0} = -C_{0m}[\sin(\varphi_{0m}+\vartheta_0)\cos\vartheta_m - \cos(\varphi_{0m}+\vartheta_0)\sin\vartheta_m]. \quad (38)$$

Подставим выражения (37), (38) в (19), (21), тогда

$$a_0 + \sum_{1\le m\le N} a_m C_{0m}[\cos(\varphi_{0m}+\vartheta_0)\cos\vartheta_m + \sin(\varphi_{0m}+\vartheta_0)\sin\vartheta_m] = 0, \quad (39)$$

$$\sum_{1\le m\le N} a_m C_{0m}[\sin(\varphi_{0m}+\vartheta_0)\cos\vartheta_m - \cos(\varphi_{0m}+\vartheta_0)\sin\vartheta_m] = 0. \quad (40)$$

Введем обозначения, указывающие на явную зависимость от j величин, входящих в (39), (40). Во-первых, частота тестового сигнала $\omega_0 = \omega_j$, поэтому $C_{0m} = C_{jm}$, $\varphi_{0m} = \varphi_{jm}$. Во-вторых, a_0, ϑ_0 зависят от j, поэтому обозначим эти величины соответственно через $a_0(j)$, $\vartheta_0(j)$. Введем также обозначения:

$$x_m = a_m \cos\vartheta_m, \qquad y_m = a_m \sin\vartheta_m, \tag{41}$$

$$b_{jm} = C_{jm}\cos[\varphi_{jm} + \vartheta_0(j)], \qquad d_{jm} = C_{jm}\sin[\varphi_{jm} + \vartheta_0(j)]. \tag{42}$$

Тогда соотношения (39), (40) принимают вид:

$$\sum_{1 \le m \le N} [b_{jm}x_m + d_{jm}y_m] = -a_0(j), \tag{43}$$

$$\sum_{1 \le m \le N} [d_{jm}x_m - b_{jm}y_m] = 0. \tag{44}$$

Здесь $j = 1, \ldots, N$, и, таким образом, (43), (44) – это система $2N$ линейных уравнений относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N$. Для каждого j тестовый сигнал имеет частоту $\omega_0 = \omega_j$, амплитуду $a_0(j)$ и фазу $\vartheta_0(j)$.

Оптимальные параметры тестового сигнала. Определим параметры $a_0(j)$, $\vartheta_0(j)$ в системе (43), (44). Для этого представим энергию сигнала $s(t)$ в виде

$$E = \Delta t \sum_{k=0}^{K-1} \left| x(t_k) + a_0 e^{i(\omega_0 t_k + \vartheta_0)} \right|^2 \tag{45}$$

и найдем a_0, ϑ_0 из решения уравнений (17). Из (45) следует:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2\Delta t \sum_{k=0}^{K-1} \mathrm{Re}\,[x(t_k) e^{-i(\omega_0 t_k + \vartheta_0)}] + 2a_0 T, \tag{46}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \vartheta_0} = 2\Delta t a_0 \sum_{k=0}^{K-1} \mathrm{Im}[x(t_k) e^{-i(\omega_0 t_k + \vartheta_0)}]. \tag{47}$$

Введем обозначения:

$$R = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{K-1} x(t_k) e^{-i\omega_0 t_k}, \qquad I = \mathrm{Im} \sum_{k=0}^{K-1} x(t_k) e^{-i\omega_0 t_k}. \tag{48}$$

Тогда из уравнений (17) и выражений (46), (47) при условии $a_0 \ne 0$ следует:

$$a_0 = -\frac{1}{K}(R\cos\vartheta_0 + I\sin\vartheta_0), \qquad R\sin\vartheta_0 = I\cos\vartheta_0. \tag{49}$$

Соотношения (49) – это система двух уравнений относительно a_0, ϑ_0; ее решение имеет вид:

$$\vartheta_0 = \mathrm{arctg}\,\frac{I}{R}, \quad a_0 = -\frac{1}{K}(R^2 + I^2)^{1/2} = -\frac{1}{K}\left| \sum_{k=0}^{K-1} x(t_k) e^{-i\omega_0 t_k} \right|. \tag{50}$$

Таким образом, параметры $a_0(j)$, $\vartheta_0(j)$ в системе уравнений (43), (44) вычисляются через преобразование Фурье от $x(t_k)$ на частоте ω_j по формулам (50).

Пример решения системы уравнений. В простейшем варианте $N=1$ система (43), (44) содержит два уравнения, частотный диапазон вырождается в точку ω_1 и задача спектрального анализа сводится к задаче оценивания амплитуды a_1 и фазы ϑ_1 гармонического сигнала с известной частотой ω_1. Поскольку $b_{11}^2 + d_{11}^2 = 1$, то решение системы имеет вид: $x_1 = -a_0(1)b_{11}$, $y_1 = -a_0(1)d_{11}$. Отсюда $\operatorname{tg}\vartheta_1 = y_1/x_1 = \operatorname{tg}\vartheta_0(1)$ и $\vartheta_1 = \vartheta_0(1)$, а также $x_1 + y_1 = -a_0(1)(b_{11} + d_{11})$ или $a_1 = -a_0(1)$. Этот результат согласуется с выводом, следующим из формулы (36). Величины $a_0(1)$, $\vartheta_0(1)$ определяются соотношениями (50) при $\omega_0 = \omega_1$. Отметим, что это решение справедливо и для вещественного гармонического сигнала $x(t) = a_1\cos(\omega_1 t + \vartheta_1) = a_1(e^{i(\omega_1 t + \vartheta_1)} + e^{-i(\omega_1 t + \vartheta_1)})/2$, если две его комплексные гармоники на частотах ω_1 и $-\omega_1$ не искажают спектры друг друга (например, при $\omega_1 \gg 2\pi/T$), тогда достаточно тестирования на одной частоте ω_1 и $N=1$. При этом в соотношениях (50) функция $x(t_k)$ вещественная и решение системы совпадает с решением задачи совместного оценивания амплитуды и фазы гармонического сигнала в аддитивном нормальном белом шуме, полученном в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. Вып. 2.
3. **Рытов С. М.** Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.
4. **Кулешов Е. Л.** Непараметрические спектральные оценки с высоким разрешением // Автометрия. 1984. № 2. С. 17.
5. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике. М.: Наука, 1986.
6. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1975. Кн. 2.

Дальневосточный государственный университет,
E-mail: kuleshov@lemoi.phys.dvgu.ru

Поступила в редакцию
28 апреля 1999 г.