РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 2000

НАУЧНЫЕ ДИСКУССИИ

УДК 519.234

В. Г. Алексеев

(Москва)

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Обсужден ряд вопросов, связанных с построением непараметрических оценок спектральной плотности стационарного случайного процесса с непрерывным временем. Рассмотрена классическая периодограммная оценка спектральной плотности и оценка типа Уэлча, получаемая осреднением по сдвигу во времени. Формулируются рекомендации по выбору спектрального окна при построении периодограммной оценки. Для случая оценки типа Уэлча предложены окна данных (временны́е окна), обеспечивающие беспрецедентно высокую помехозащищенность (робастность) оценки.

1. Пусть $X(t)$, $-\infty < t < \infty$,– стационарный в широком смысле случайный процесс со средним $\mathrm{M}X(t) \equiv 0$, корреляционной функцией $B(\tau)$ и спектральной плотностью $f(\omega) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau$.

Вопросы, касающиеся статистического оценивания спектральной плотности $f(\omega)$ по выборочным данным, продолжают, как и ранее, интенсивно обсуждаться в литературе. К числу работ, посвященных прикладному спектральному анализу стационарных случайных процессов, принадлежит и работа [1], в которой предпринята попытка отыскать оптимальные спектральные окна при построении непараметрических оценок спектральной плотности $f(\omega)$. Разд. 2 настоящей работы носит преимущественно критический характер. В нем показана несостоятельность рекомендаций работы [1] по выбору спектральных окон. Совсем другие рекомендации, вытекающие из предшествующих работ и личного опыта автора, сформулированы в разд. 3.

В разд. 4 обсуждаются некоторые вопросы, связанные с построением оценки спектральной плотности типа Уэлча (оценки, получаемой осреднением по сдвигу во времени). Здесь один из решающих элементов конструкции оценки – это окно данных (временно́е окно), используемое для построения модифицированной периодограммы. Читателю будут предложены окна данных, обеспечивающие беспрецедентно высокую помехозащищенность (робастность) оценки.

Всюду в дальнейшем мы остаемся в рамках приведенного выше определения случайного процесса $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, с корреляционной функцией $B(\tau)$ и спектральной плотностью $f(\omega)$.

2. Пусть нам дана реализация случайного процесса $X(t)$ на отрезке $[0, T]$. Введем в рассмотрение периодограмму $I_T(\omega)$, определяемую соотношением

$$I_T(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T X(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2. \quad (1)$$

Классическая периодограммная оценка спектральной плотности $f(\omega)$ строится в виде

$$f_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A_T(\lambda - \omega) I_T(\lambda) d\lambda, \quad (2)$$

где функция $A_T(\lambda)$, называемая обычно спектральным окном, четна, ограничена и нормируется условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_T(\lambda) d\lambda = 1.$$

Выбором спектрального окна $A_T(\lambda)$ в значительной мере определяются статистические свойства (смещение, дисперсия) оценки (2).

В разделе «Спектральный фильтр с постоянными параметрами» работы [1] предлагается использовать спектральное окно $A_T(\lambda)$, являющееся решением интегрального уравнения

$$f(\omega) \mathrm{M} I_T(\nu) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} A_T(\omega - \lambda) \mathrm{M}[I_T(\lambda) I_T(\nu)] d\lambda. \quad (3)$$

Множитель 2π, отсутствующий в правой части уравнения (31) работы [1], появляется в правой части уравнения (3) настоящей работы вследствие того, что периодограмма $I_T(\omega)$, определяемая формулой (1) настоящей работы, в 2π раз меньше периодограммы, определенной формулой (1) работы [1].

Что же дает нам уравнение (3)? Так как $\mathrm{M} I_T(\nu) > 0$, если только случайный процесс $X(t)$ не равен тождественно нулю с вероятностью 1, уравнение (3) может быть переписано в виде

$$f(\omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} A_T(\omega - \lambda) \frac{\mathrm{M}[I_T(\lambda) I_T(\nu)]}{\mathrm{M} I_T(\nu)} d\lambda. \quad (4)$$

Здесь у читателя неизбежно возникает ряд вопросов. Почему правая часть уравнения (4) зависит от аргумента ν, а левая – не зависит? Значит ли это, что каждому значению ν соответствует свое спектральное окно $A_T(\lambda) = A_T(\lambda; \nu)$? И как, наконец, найти спектральное окно $A_T(\lambda)$ из уравнения (4)? Ведь нам не известны ни спектральная плотность $f(\omega)$, ни тем более величины $\mathrm{M} I_T(\nu)$ и $\mathrm{M}[I_T(\lambda) I_T(\nu)]$.

Ответа на все перечисленные вопросы в статье [1] мы не находим. Каких-либо примеров, иллюстрирующих отыскание спектрального окна $A_T(\lambda)$ при заданной спектральной плотности $f(\omega)$ и заданном значении T, тоже нет.

Обратимся теперь к разделу «Корреляционный фильтр с постоянными параметрами». Здесь читателю предлагается оценка спектральной плотности, являющаяся произведением периодограммы $I_T(\omega)$ на некоторую неслучайную функцию частоты ω (см. формулы (38) и (39) [1]). Однако периодограмма, хотя и домноженная на неслучайную функцию, не может служить оценкой спектральной плотности $f(\omega)$ ни при больших, ни тем более при малых T. По этому поводу нам достаточно сослаться на книгу [2, § 18], где подробно описаны статистические свойства периодограммы. В качестве оценки спектральной плотности может быть использована лишь периодограмма, осредненная либо по тому или иному частотному интервалу, либо по сдвинутым во времени отрезкам исследуемой реализации (см. разд. 4 настоящей работы).

Цитируемые нами разделы работы [1] являются ее итоговыми разделами. Из приведенного нами краткого критического анализа следует, что они не содержат информации, сколько-нибудь полезной для читателя.

3. Будем считать критическую часть статьи завершенной. Перейдем к ее позитивной части. В настоящем разделе мы попытаемся дать ответ на вопрос о том, как же все-таки следует выбирать спектральное окно $A_T(\lambda)$ при построении оценки спектральной плотности.

Нам будет удобно предположить, что спектральное окно $A_T(\lambda)$ может быть представлено в виде

$$A_T(\lambda) = h^{-1} w(\lambda/h),$$

где $h = h(T)$ – некоторая положительная функция такая, что

$$h + (Th)^{-1} \to 0 \quad (T \to \infty), \tag{5}$$

а весовая функция $w(x)$ четна, ограничена и удовлетворяет условиям $w(x) = 0$, если $|x| \geq 1$, и $\int_{-1}^{1} w(x)dx = 1$.

Будем называть порядком весовой функции $w(x)$ наименьшее четное число $r \geq 2$ такое, что $\int_{-1}^{1} x^r w(x)dx \neq 0$.

Весовая функция $w(x)$ и величина $2h$ определяют форму и соответственно ширину спектрального окна $A_T(\lambda)$. Соотношение (5) означает, в частности, что с ростом длины T интервала наблюдения окно $A_T(\lambda)$ все более тесно концентрируется около нуля.

Наши рекомендации по выбору весовой функции $w(x)$ по существу совпадают с теми, которые сформулированы в работе [3] для стационарного случайного процесса $\xi(k)$ с дискретным временем $k = 0, \pm 1, \ldots$. Разница состоит лишь в том, что объем выборки определяется теперь не числом отсчетов n, а длиной T интервала наблюдения. Как и в случае дискретного времени, с ростом объема выборки (т. е. длины T интервала наблюдения) становится целесообразным применение весовых функций все более высоких порядков, если только спектральная плотность $f(\omega)$ является достаточно гладкой (многократно дифференцируемой) функцией. При достаточно больших T применение весовых функций высших порядков, т. е. $r > 2$, может привести к многократному уменьшению ошибки оценивания спектральной плотности. Весовые функции 2-го порядка следует применять в тех случаях, когда либо объем выборки мал, либо нет оснований предполагать, что спектральная плотность $f(\omega)$ имеет производные выше 1-го порядка. Из весовых функций 2-го порядка могут быть рекомендованы, например, параболическая или треугольная весовая функция (см. [2, с. 203]). Что же касается прямоугольной весовой функции (см. там же), то ее применение нежелательно: получаемая с ее помощью оценка $f_T(\omega)$ может испытывать интенсивные флуктуации, не отражающие реального поведения оцениваемой спектральной плотности.

Отдельного рассмотрения заслуживает случай, когда нам известно, что оцениваемая спектральная плотность является функцией класса $\mathrm{Lip}\alpha$, где $0 < \alpha \le 1$, т. е. удовлетворяет условию

$$|f(\omega') - f(\omega'')| \le K|\omega' - \omega''|^{\alpha}, \qquad K < \infty,$$

каковы бы ни были точки ω' и ω'' на оси частот. Для этого случая в работе [4] предложена весовая функция

$$w(x) = \frac{1+\alpha}{2\alpha}(1 - |x|^{\alpha}), \quad |x| \le 1. \tag{6}$$

Очень высокая оценка весовой функции (6) дается, в частности, в книге [5, гл. 3].

4. До сих пор мы рассматривали лишь периодограммную оценку спектральной плотности. Рассмотрим теперь еше одну непараметрическую оценку, называемую в литературе оценкой типа Уэлча, периодограммой Уэлча или (в работах И. Г. Журбенко) оценкой, получаемой осреднением по сдвигу во времени. Речь идет в данном случае о вычислительном алгоритме, включающем в себя разбиение всего интервала наблюдения $[0, T]$ на конечное число неперекрывающихся или частично перекрывающихся интервалов длиной $S < T$, вычисление по каждому из них периодограммы и ее последующее осреднение по числу подынтервалов длиной S. При этом вместо периодограммы (1) используется модифицированная периодограмма

$$I_S^{\{A\}}(\omega) = \left|\int_0^S a(t)X(t)e^{i\omega t}dt\right|^2 \left(2\pi\int_0^S a^2(t)dt\right)^{-1}. \tag{7}$$

Здесь $A = \{a(t),\ 0 \le t \le S\}$ – так называемое окно данных, используемое для домножения (неравномерного взвешивания) отрезка реализации $\{X(t),\ 0 \le t \le S\}$. Функция $a(t)$ чаще всего плавно убывает от середины отрезка $[0, S]$ к его краям, чем достигается сглаживание краев реализации и в конечном счете уменьшение смещения (т. е. систематической ошибки оценивания) периодограммы.

По мнению И. Г. Журбенко [5, 6], оценка типа Уэлча заслуживает самого широкого применения в практике прикладного спектрального оценивания. К числу достоинств оценки типа Уэлча следует отнести прежде всего ее высокую помехозащищенность, т. е. слабую зависимость от возмущений и всплесков на удаленных частотах. В качестве окон данных при построении периодограммы (7) могут быть использованы, например, корреляционные окна

$w(t)$, приведенные в монографии [7, табл. 5-1], или же импульсные характеристики $g(t)$ линейных фильтров, приведенные в [8, § 27].

Рекомендации автора этих строк сводятся к использованию предложенных в работе [9] преобразований Фурье $a_r(t)$ функций

$$\varphi_r(\omega) = \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right]^{2r}, \qquad r = \overline{1,6}.$$

Все функции $a_r(t)$ имеют конечный носитель: $a_r(t) \equiv 0$, как только $|t| \geq r$, $r = \overline{1,6}$. Формулы, описывающие функции $a_r(t)$, $r = 1$ и 2, занимают одну и соответственно две строки, однако с ростом r формулы для функций $a_r(t)$ становятся все более объемными [9].

В качестве примера рассмотрим случай, когда длина S каждого из подынтервалов реализации $\{X(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ равна 12, и используем для построения оценки типа Уэлча окно $a_6(t)$.

Согласно определению (7), имеем

$$I_S^{\{A\}}(\omega) = \left|\int_0^{12} a_6(t-6)X(t)e^{i\omega t}dt\right|^2 \left(2\pi \int_{-6}^{6} a_6^2(t)dt\right)^{-1}. \tag{8}$$

Отсюда, пользуясь спектральным разложением корреляционной функции $B(\tau)$ случайного процесса $X(t)$ и формулой Парсеваля, находим

$$\mathrm{M}I_S^{\{A\}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)|\varphi_6(\lambda-\omega)|^2 d\lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_6(\lambda)|^2 d\lambda\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [2\sin(\lambda/2)/\lambda]^{24} f(\omega+\lambda)d\lambda}{\int_{-\infty}^{\infty} [2\sin(\lambda/2)/\lambda]^{24} d\lambda}. \tag{9}$$

Формула (9) со всей очевидностью свидетельствует о высокой помехозащищенности периодограммы (8). Показатель степени 24 при множителе $2\sin(\lambda/2)/\lambda$, может быть, не бросается в глаза при беглом взгляде на крайнюю правую часть формулы (9), но именно он обеспечивает нам беспрецедентно слабую зависимость величины $\mathrm{M}I_S^{\{A\}}(\omega)$ от возмущений и всплесков на удаленных частотах. В силу стационарности случайного процесса $X(t)$ математическое ожидание модифицированной периодограммы, построенной по любому из подынтервалов длиной S, будет совпадать с найденным нами значением величины $\mathrm{M}I_S^{\{A\}}(\omega)$. Что же касается дисперсии получаемой оценки спектральной плотности, то она будет мала, если только $T \gg S$.

Приведенные литературные ссылки несколько дополняют список литературы из работы [1]. Нам представляется, что читателю, интересующемуся методами спектрального оценивания, будут полезны также книга [10] и сборник [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кулешов Е. Л.** Оптимальные сглаживающие окна в спектральном анализе случайных процессов // Автометрия. 1999. № 2. С. 44.
2. **Яглом А. М.** Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
3. **Алексеев В. Г.** К вопросу о построении сверхразрешающих спектральных оценок // Автометрия. 1986. № 1. С. 3.
4. **Алексеев В. Г.** О выборе спектрального окна при оценке спектра гауссовского стационарного случайного процесса // Проблемы передачи информации. 1971. **7**, № 4. С. 45.
5. **Журбенко И. Г.** Анализ стационарных и однородных случайных систем. М.: Изд-во МГУ, 1987.
6. **Журбенко И. Г.** О работах по анализу временных рядов на кафедрах теории вероятностей и математической статистики МГУ // Теория вероятностей и ее применения. 1989. **34**, № 1. С. 202.
7. **Мирский Г. Я.** Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М.: Энергия, 1972.
8. **Гутников В. С.** Фильтрация измерительных сигналов. Л.: Энергоатомиздат, 1990.
9. **Алексеев В. Г.** Новые непрерывные фильтры нижних частот // Радиотехника. 1998. № 4. С. 34.
10. **Rosenblatt M.** Stationary Sequences and Random Fields. Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser, 1985.
11. **Применение** теории вероятностей и математической статистики. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, 1985. Вып. 6.

Институт физики атмосферы РАН

Поступила в редакцию
16 августа 1999 г.