РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 3 2000

УДК 621.391 : 517.97

В. В. Кашинов

(Санкт-Петербург)

# ОПТИМАЛЬНАЯ ДВУХКАНАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОМЕХАХ

Сформулирована проблема оптимальной двухканальной линейной фильтрации при нестационарных помехах. Показано, что она приводит к решению вариационной задачи для функционалов, которые зависят от операторов с искомыми нестационарными ядрами, действующих на заданные функции – входные процессы. Выведены необходимые условия экстремума для этих функционалов, на основе которых получены явные выражения для нестационарного ядра оптимального оператора. Найдено выражение для нижней границы дисперсии ошибки. Рассмотрен частный случай двухканальной стационарной фильтрации.

Разнесенный прием до сих пор применяется для борьбы с замираниями сигнала в коротковолновых каналах связи. Эти каналы в основном используются, когда необходимо организовать связь на большое расстояние при помощи маломощного передатчика. В этом случае, как правило, применяется линейное сложение сигналов, поступающих из каналов разнесенного приема [1]. Естественно, перед сумматором следует включить фильтры, осуществляющие оптимальное выделение суммарного сигнала из помех. Критерием оптимальности в этом случае может быть минимум дисперсии ошибки выделения полезного сигнала на выходе сумматора.

Похожие задачи возникают при создании бортовых навигационных комплексов, в которых часто используется калмановская фильтрация [2], и при приеме сигналов в многолучевых каналах [3, 4]. Однако и в этих случаях интерес представляет нижняя граница дисперсии ошибки, которую не преодолеть никакими средствами и которая обеспечивается физически нереализуемыми фильтрами.

**Критерий оптимальности.** Рассмотрим систему приема, состоящую из двух каналов, выходные сигналы которых складываются. Фильтры, включенные в каждый канал, описываются линейными интегральными операторами:

$$K_1 f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tau) h_1(t,\tau) f(\tau) d\tau = \int\limits_{T} h_1(t,\tau) f(\tau) d\tau,$$

$$K_2 f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tau) h_2(t,\tau) f(\tau) d\tau = \int\limits_{T} h_2(t,\tau) f(\tau) d\tau, \qquad (1)$$

где $\Pi(\tau) = H(\tau + T/2) - H(\tau - T/2)$ описывает непрерывную кривую – прямоугольный импульс, ограничивающий интервал наблюдения;

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ [0, 1] & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

интегралы с бесконечными пределами (1) для краткости будем обозначать в виде правых частей (1); $h_1(t,\tau)$ и $h_2(t,\tau)$ – импульсные характеристики фильтров.

На входах фильтров действуют процессы, являющиеся суммой сигнала $S(t)$ и разных аддитивных помех $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$:

$$U_1(t) = S(t) + \eta_1(t), \qquad U_2(t) = S(t) + \eta_2(t). \tag{2}$$

Полезный сигнал $S(t)$ является случайным нестационарным процессом с корреляционной функцией $B_s(t,\tau)$, помехи $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ – также случайные нестационарные процессы с корреляционными функциями $B_1(t,\tau)$ и $B_2(t,\tau)$. Поскольку сигнал и каждая из помех порождаются независимыми источниками, будем считать их взаимно некоррелированными. Будем также считать математические ожидания процессов $S(t)$, $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ равными нулю. Процесс на выходе сумматора имеет вид:

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_T h_1(t,\tau) U_1(\tau) d\tau + \int_T h_2(t,\tau) U_2(\tau) d\tau. \tag{3}$$

Критерием качества воспроизведения полезного сигнала $S(t)$ выбирается мгновенное значение дисперсии ошибки

$$\sigma^2(t) = \left\langle [U_{\text{вых}}(t) - S(t)]^2 \right\rangle, \tag{4}$$

где угловые скобки означают операцию усреднения по ансамблю. Раскрывая это выражение с учетом формул (2) и (3), получаем

$$\sigma^2 = \left\langle \left[ \int_T h_1(t,\tau)[S(\tau) + \eta_1(\tau)] d\tau + \int_T h_2(t,\tau)[S(\tau) + \eta_2(\tau)] d\tau - S(t) \right]^2 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left[ \int_T h_1(t,\tau) \eta_1(\tau) d\tau \right]^2 \right\rangle + \left\langle \left[ \int_T h_1(t,\tau) S(\tau) d\tau \right]^2 \right\rangle + \left\langle \left[ \int_T h_2(t,\tau) S(\tau) d\tau \right]^2 \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \left[ \int_T h_2(t,\tau) \eta_2(\tau) d\tau \right]^2 \right\rangle + \left\langle S^2(t) \right\rangle - 2 \left\langle S(t) \int_T h_1(t,\tau) S(\tau) d\tau \right\rangle -$$

$$- 2 \left\langle S(t) \int_T h_2(t,\tau) S(\tau) d\tau \right\rangle + 2 \left\langle \int_T h_1(t,\tau) S(\tau) d\tau \int_T h_2(t,\tau) S(\tau) d\tau \right\rangle. \tag{5}$$

Формула (5) отличается от суммы дисперсий фильтров одноканальных систем наличием последнего слагаемого – взаимной мощности полезных сигналов на выходах фильтров. Для каждого конкретного $t \in T$ выражение (5) является функционалом, определенным на пространстве импульсных характеристик фильтров $h_1(t,\tau)$ и $h_2(t,\tau)$. Для нахождения минимума функционала, зависящего от двух ядер, следует получить систему уравнений, варьируя $\sigma^2$ по $h_1(t,\tau)$ и $h_2(t,\tau)$, и решить эту систему.

Рассмотрим общую задачу нахождения экстремума интегрального функционала с разрывным интегрантом $F$, зависящего от интегрального оператора $\Phi_i(x)$, действующего на входные процессы $S_i(t)$. Пусть существует функционал $I$ – интегральный критерий качества:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F[\Phi_1(x), \ldots, \Phi_i(x), \ldots, \Phi_n(x)]dx. \tag{6}$$

Величины $\Phi_i(x)$, входящие в функционал (6), – линейные интегральные операторы вида

$$\Phi_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x,t)S_i(t)dt, \tag{7}$$

где $S_i(t) \in L_p$, $p \geq 1$, – заданные функции (сигналы или помехи, которые, в частности, могут задаваться статистически); $k(x,t)$ – ядро, которое для всех операторов одно и то же. Функционал (6) и операторы (7) с конечными пределами интегрирования аналогично формуле (1) также можно представить через интегралы с бесконечными пределами с помощью непрерывной кривой $\Pi(t)$.

Будем решать оптимизационную задачу (6), (7) как вариационную. Для этого по общему правилу введем однопараметрическое семейство кривых $\hat{k}(x,t)$ – функций двух переменных:

$$\hat{k}(x,t) = k(x,t) + \alpha\delta k(x,t), \tag{8}$$

где $\delta k(x,t)$ – произвольная функция двух переменных; $\alpha$ – малый параметр. Подставляя $\hat{k}(x,t)$ из (8) вместо $k(x,t)$ в операторы (7), операторы (7) в функционал (6), дифференцируя (6) по параметру $\alpha$, получим вариацию функционала $I$:

$$\delta I = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{dF}{d\Phi_i}(x) \int_{-\infty}^{\infty} S_i(t)\delta k(x,t)dtdx. \tag{9}$$

Положим, что к вариации (9) применима теорема Фубини. Изменим порядок интегрирования и суммирования и приравняем вариацию к нулю:

$$\delta I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{dF}{d\Phi_i}(x)S_i(t) \right] \delta k(x,t)dtdx = 0. \tag{10}$$

Применяя к вариации (10) основную лемму вариационного исчисления в формулировке Л. Янга [5], получим необходимое условие экстремума функционала (6), зависящего от операторов (7):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dF}{d\Phi_i}(x) S_i(t) = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) отличается от необходимого условия экстремума функционала с разрывным интегрантом, который зависит от интегральных операторов с разными ядрами $K_i(x,t)$, действующими на одну искомую функцию $h(t)$, и получен в работе [6, формула (8)], тем, что функция $S$ зависит от одного переменного и отсутствует связь через интеграл между $dF/d\Phi_i$ и $S$.

В развернутом виде необходимое условие экстремума (11) можно представить таким образом:

$$\sum_{i=1}^{n} F'_{\Phi_i}\left[\int_{-\infty}^{\infty} k(x,t_1) S_i(t_1)\,dt_1\right] S_i(t) = 0. \tag{12}$$

Переменные $t$ и $t_1$ обозначены по-разному, потому что операция интегрирования выполняется без участия функций вне знака интеграла оператора.

Если интегрант $F$ в функционале (6) не является линейным, частные производные интегранта $F'_{\Phi}$ всегда содержат сам оператор (7), а уравнение (12) является нелинейным двумерным интегральным уравнением, когда искомая функция $k(x,t)$ двух независимых переменных входит под знак интеграла. Свойства уравнения (12) в общем виде пока не исследованы. Только если функционал (6) квадратичный, уравнение (12) – линейное двумерное интегральное уравнение. Некоторые сведения об этих уравнениях можно найти в монографии [7].

**Система уравнений фильтрации и ее анализ.** Применяя необходимое условие экстремума (12) к функционалу (5), получим систему уравнений фильтрации:

$$\left\langle\left[\int_T h_1(t,\tau_1)U_1(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_T h_2(t,\tau_1)U_2(\tau_1)\,d\tau_1 - S(t)\right] U_1(t)\right\rangle = 0, \tag{13}$$

$$\left\langle\left[\int_T h_1(t,\tau_1)U_1(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_T h_2(t,\tau_1)U_2(\tau_1)\,d\tau_1 - S(t)\right] U_2(\tau)\right\rangle = 0. \tag{14}$$

Вычитая (14) из уравнения (13) и преобразуя результат вычитания с учетом некоррелированности составляющих входных процессов, получим систему, равносильную системе (13), (14):

$$\int_T [h_1(t,\tau_1) + h_2(t,\tau_1)] B_s(\tau_1,\tau)\,d\tau_1 + \int_T h_1(t,\tau_1) B_1(\tau_1,\tau)\,d\tau_1 = B_s(t,\tau), \tag{15}$$

$$\int_T h_1(t,\tau_1) B_1(\tau_1,\tau) = \int_T h_2(t,\tau_1) B_2(\tau_1,\tau)\,d\tau_1. \tag{16}$$

Корреляционные функции $B_s$, $B_1$ и $B_2$ являются ядрами самосопряженных положительных линейных интегральных операторов $Af$, $B_1 f$ и $B_2 f$ соответственно [7], действующих в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, если при $f \in \mathbf{H}$ все функции $B \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}$. Произведение операторов $AB_1$ в $\mathbf{H}$ также является интегральным оператором с ядром

$$M(t,\tau) = \int_T B_s(t,y) B_1(y,\tau) dy. \tag{17}$$

Аналогично определяются ядра других произведений операторов.

Для решения системы (15), (16) перейдем к соответствующей системе операторных уравнений:

$$(K_1 + K_2)A + K_1 B_1 = A, \tag{18}$$

$$K_1 B_1 = K_2 B_2, \tag{19}$$

где $K_1$ и $K_2$ – операторы, определяемые формулами (1).

Будем считать, что для всех операторов и их произведений в пространстве $\mathbf{H}$ существуют обратные операторы: $A^{-1}$, $B_1^{-1}$, $B_2^{-1}$, $(AB_1)^{-1}$ и т. д. Ядра обратных операторов определяются из уравнений [7]:

$$\delta(t-\tau) = \int_T B_1(t,y) B_1^{-1}(y,t) dy, \qquad \delta(t-\tau) = \int_T B_2(t,y) B_2^{-1}(y,\tau) dy.$$

Аналогично определяются ядра других обратных операторов.

*Примечание.* Ядро $K^{-1}(t,\tau)$ оператора $A^{-1}$, обратного интегральному $A$, является в общем случае обобщенной функцией. Например, если ядро оператора $A$ равно $K(t,\tau) = \exp(-a|t-\tau|)$, $-\infty \le t,\tau \le \infty$, то

$$K^{-1}(t,\tau) = (a/2)[\delta(t-\tau) - (1/a^2)\delta''(t-\tau)],$$

что легко проверяется.

Умножая обе части уравнения (19) справа на оператор $B_2^{-1}$, получим

$$K_1 B_1 B_2^{-1} = K_2. \tag{20}$$

Подставляя оператор $K_2$ из формулы (20) в выражение (18), вынесем влево $K_1$ и умножим обе части полученного выражения справа на $A^{-1}$:

$$K_1(I + B_1 B_2^{-1} + B_1 A^{-1}) = I,$$

где $I$ – тождественный оператор с ядром $\delta(t-\tau)$. Окончательно найдем $K_1 = (I + B_1 B_2^{-1} + B_1 A^{-1})^{-1}$.

Аналогично получим оператор $K_2 = (I + B_2 B_1^{-1} + B_2 A^{-1})^{-1}$.

Переходя к записи операторов через ядра, получаем явные выражения для оптимальных импульсных характеристик:

$$h_1(t,\tau)=\left[\int_T B_1(t,y)[B_2^{-1}(y,\tau)+B_s^{-1}(y,\tau)]dy+\delta(t-\tau)\right]^{-1}, \qquad (21)$$

$$h_2(t,\tau)=\left[\int_T B_2(t,y)[B_1^{-1}(y,\tau)+B_s^{-1}(y,\tau)]dy+\delta(t-\tau)\right]^{-1}. \qquad (22)$$

Для вычисления оптимальных импульсных характеристик из формул (21) и (22) необходимо сначала найти обратные ядра $B_1^{-1}(t,\tau)$, $B_2^{-1}(t,\tau)$ и $B_s^{-1}(t,\tau)$. В численном виде вычисления обратных ядер можно производить с помощью разложения в ряды по ортонормированному базису, используя программы обращения матриц, а также методом итераций [8].

Нижнюю границу дисперсии ошибки фильтрации найдем, подставляя формулы (21) и (22) в выражение (5), с учетом уравнений (13) и (14):

$$\sigma_{\min}^2(t)=B_s(t,t)-\int_T[h_1(t,\tau)+h_2(t,\tau)]B_s(\tau,t)d\tau. \qquad (23)$$

Рассмотрим частный случай стационарных сигнала и помех, который подробно изучен в монографии [9]. При стационарных входных процессах корреляционные функции зависят только от разности аргументов $t$ и $\tau$. Поэтому при $T=\infty$ импульсные характеристики зависят от одного переменного, а операторы становятся операторами свертки (оптимизационную задачу в этом случае можно было бы решать методом, изложенным в статье [6]). Перейдя в частотную область и обозначив соответствие по Фурье корреляционных функций и их энергетических спектров $B_s(\tau)\Leftrightarrow F_s(\omega)$, $B_1(\tau)\Leftrightarrow F_1(\omega)$ и $B_2(\tau)\Leftrightarrow F_2(\omega)$, для коэффициентов передачи стационарных фильтров получим:

$$K_1(\omega)=\frac{F_s(\omega)}{F_1(\omega)+\left[1+\dfrac{F_1(\omega)}{F_2(\omega)}\right]}, \qquad (24)$$

$$K_2(\omega)=\frac{F_s(\omega)}{F_2(\omega)+\left[1+\dfrac{F_2(\omega)}{F_1(\omega)}\right]}. \qquad (25)$$

Существенным для двухканального приема является то, что коэффициент передачи фильтра в каждом канале определяется не только энергетическими спектрами сигнала и помехи в этом канале, но и энергетическим спектром помехи в другом канале.

Подставив выражения для коэффициентов передачи (24) и (25) в формулу (23), найдем выражение для дисперсии минимальной неустранимой ошибки выделения сигнала при двухканальной нереализуемой стационарной фильтрации:

$$\sigma^2_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F_s(\omega)F_1(\omega)F_2(\omega)}{F_1(\omega)F_2(\omega) + F_s(\omega)[F_1(\omega) + F_2(\omega)]} d\omega. \tag{26}$$

Из выражения (26) следует, что интервалы частот, в которых хотя бы один из спектров помехи равен нулю, не вносят вклада в ошибку $\sigma^2_{\min}$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Лекции** по теории систем связи /Под ред. Багдади. М.: Мир, 1972.
2. **Пахолков Г. А., Збрицкая Г. Е., Криворучко Ю. Т., Пономаренко Б. В.** Обработка сигналов в радиотехнических системах ближней навигации. М.: Радио и связь, 1992.
3. **Поляков П. Ф.** Прием сигналов в многолучевых каналах. М.: Радио и связь, 1986.
4. **Современные** системы ближней радионавигации летательных аппаратов /Под ред. Г. А. Пахолкова. М.: Транспорт, 1986.
5. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению. М.: Мир, 1974.
6. **Вознесенский В. В., Кашинов В. В., Оганджанянц С. И.** Вариационный метод оптимизации обработки результатов эксперимента по разрывным критериям // Автометрия. 1995. № 3. С. 97.
7. **Ван-Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1975. Т. 2.
8. **Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
9. **Челпанов И. Б.** Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах. М.: Наука, 1967.



*Санкт-Петербургский*
*государственный университет,*
*E-mail: Kashinov@VK3109.spb.edu*



*Поступила в редакцию*
*8 мая 1998 г.*