РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 3 2000

УДК 519.725 : 519.24

С. Н. Кириллов, О. Е. Шустиков
(Рязань)

ОПТИМАЛЬНАЯ ВЕСОВАЯ ОБРАБОТКА ПЕРИОДОГРАММЫ ОБОБЩЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Получены выражения для смещения и дисперсии сглаженной оценки обобщенного спектра мощности случайного процесса. Синтезирована оптимальная весовая функция, минимизирующая среднеквадратическую ошибку оценивания обобщенного спектра мощности. Проведено сравнение свойств синтезированной и известных весовых функций.

Введение. Основные преимущества обобщенных спектральных разложений случайных процессов (СП) перед классическим фурье-анализом по системе гармонических функций заключаются в возможности получения более высоких коэффициентов сжатия и использования быстрых ортогональных преобразований [1]. Так, описание СП на основе приспособленных базисных функций, оптимальных по критерию минимума среднеквадратической ошибки аппроксимации и имеющих факторизуемую матрицу преобразования, позволяет получить высокие коэффициенты сжатия при заданном уровне аппаратного обеспечения [2]. В системах связи находят применение не зависящие от статистических характеристик СП и эффективные с вычислительной точки зрения ортогональные преобразования Уолша, Хаара, Хартли и другие, обеспечивающие обработку информации в реальном масштабе времени [1, 3]. Применение расширенной системы функций Виленкина – Крестенсона, использующих многоосновную позиционную систему счисления, дает возможность вплотную подойти к проблеме нахождения квазиоптимальных базисов для ряда практических задач [1].

Между тем недостаточно разработанный аппарат оценивания спектральных коэффициентов в обобщенном ортогональном базисе препятствует широкому применению сверхбыстрых и эффективных алгоритмов обработки случайных сигналов. В связи с этим до сих пор наиболее распространенным инструментом анализа СП является преобразование Фурье [4], для которого в работе [5] синтезирована оптимальная весовая функция, позволяющая при корреляционно-спектральном анализе СП получить минимальную среднеквадратическую ошибку (СКО) оценивания.

Целью настоящей работы является синтез оптимальной весовой функции, позволяющей минимизировать СКО оценивания обобщенного спектра мощности (ОСМ).

Исходные соотношения. Пусть $X(t)$ – СП, заданный последовательностью своих отсчетов $X(i) = X(t_i)$, взятых с периодом дискретизации $T = t_i - t_{i-1} = \text{const}$. Полагаем, что дискретный СП $X(i)$ является центрированным и p-ично стационарным в широком смысле, т. е. моменты первого и второго порядков не изменяются при p-ичном сдвиге переменной i [6]. Используя определение второго центрального момента (корреляционной функции) [4], а также предположение о p-ичной стационарности СП $X(i)$, введем обобщенную корреляционную функцию (ОКФ) в виде [7]

$$K(i_1, i_2) = M\langle X(i_1)X(i_2)\rangle = K(i_1 \oplus i_2) = K(m), \tag{1}$$

где $M\langle\cdot\rangle$ – оператор усреднения по ансамблю реализаций; $\oplus$ – операция сложения по модулю p; $m = i_1 \oplus i_2$ – результат сложения по модулю p целых чисел i_1 и i_2. Пусть имеется ортогональная и мультипликативная по обеим координатам система функций $\{\varphi_k(i)\}_{k=0,\ i=0}^{N-1,\ N-1}$, так что $\varphi_k(i_1)\varphi_k(i_2) = \varphi_k(i_1 \oplus i_2)$; $\varphi_{k_1}(i)\varphi_{k_2}(i) = \varphi_{k_1 \oplus k_2}(i)$. Тогда связь ОКФ $K(m)$ и ОСМ $S(k)$ задается обобщенным преобразованием Винера – Хинчина [1, 7]:

$$K(m) = \sum_{k=0}^{N-1} S(k)\varphi_k(m), \qquad m = \overline{0, N-1}; \tag{2}$$

$$S(k) = \frac{1}{E}\sum_{m=0}^{N-1} K(m)\varphi_k(m), \qquad k = \overline{0, N-1}, \tag{3}$$

где $N = p^n$ (n – целое число) выбрано достаточно большим, так что $K(m) = 0$ при $m \ge N$; $E = E_k = \sum\limits_{m=0}^{N-1} \varphi_k^2(m)$ – энергия базисной функции. Считаем, что система базисных функций $\{\varphi_k(i)\}_{k=0,\ i=0}^{N-1,\ N-1}$ пронормирована, так что $E = N$.

На практике требуется оценить ОСМ по одной реализации СП $x(i)$ конечной длины N. В этом случае на основе оценки ОКФ

$$K_e(m) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i)x(i \oplus m), \qquad m = \overline{0, N-1}, \tag{4}$$

можно найти оценку ОСМ в виде

$$S_e(k) = \frac{1}{E}\sum_{m=0}^{N-1} K_e(m)\varphi_k(m). \tag{5}$$

В работе [7] показано, что математическое ожидание оценки (5) $M\langle S_e(k)\rangle = S(k)$, а дисперсия $D\langle S_e(k)\rangle = 2S^2(k)$. Таким образом, точные измерения ОСМ невозможны, так как оценка (5) является несостоятельной.

Один из методов повышения эффективности оценивания ОСМ – применение весовой функции в спектральной области, выделяющей функции в корреляционной области [4]. Вследствие мультипликативности базисных функций имеет место теорема обобщенной свертки [1, 7], что позволяет представить сглаженную оценку ОСМ $S_{e1}(k)$ следующим образом:

$$S_{e1}(k)=\frac{1}{E}\sum_{m=0}^{N-1}K_e(m)B(m)\varphi_k(m)=\sum_{g=0}^{N-1}S_e(g)R(g\oplus k), \quad (6)$$

где $B(m)$ – выделяющая функция (корреляционное окно); $R(k)$ – весовая функция (функция спектрального окна), причем

$$R(k)=\frac{1}{E}\sum_{m=0}^{N-1}B(m)\varphi_k(m), \qquad B(m)=\sum_{k=0}^{N-1}R(k)\varphi_k(m). \quad (7)$$

Использование весовой обработки уменьшает флуктуационную составляющую погрешности измерений, но приводит к смещению оценки ОСМ. Синтез оптимальной весовой функции требует определения составляющих квадрата среднеквадратичных отклонений (СКО) оценивания ОСМ $\Delta(k)$, которая определяется выражением [4]

$$\Delta(k)=b^2(k)+D(k), \quad (8)$$

где $b(k)=M\langle S_{e1}(k)\rangle-S(k)$, $D(k)=M\left\langle[S_{e1}(k)-M\langle S_{e1}(k)\rangle]^2\right\rangle$ – соответственно смещение и дисперсия оценки ОСМ.

Начальные моменты оценки ОКФ. Для нахождения математического ожидания и дисперсии сглаженной оценки ОСМ $S_{e1}(k)$ необходимо определить аналитические выражения для первого и второго начальных моментов оценки ОКФ $K_e(m)$.

Усредняя по множеству соотношение (4), получим математическое ожидание оценки ОКФ:

$$M\langle K_e(m)\rangle=M\left\langle\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x(i)x(i\oplus m)\right\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}M\langle x(i)x(i\oplus m)\rangle=K(m). \quad (9)$$

Найдем начальный момент второго порядка $W_K(m_1, m_2)$ случайной функции $K_e(m)$:

$$W_K(m_1,m_2)=M\langle K_e(m_1)K_e(m_2)\rangle=$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{i_1=0}^{N-1}\sum_{i_2=0}^{N-1}M\langle x(i_1)x(i_2)x(i_1\oplus m_1)x(i_2\oplus m_2)\rangle. \quad (10)$$

Аналогично [4] будем считать, что СП $X(i)$ имеет нормальное распределение. Тогда можно представить выражение для момента четвертого порядка в виде

$$M\langle X(i_1)X(i_2)X(i_3)X(i_4)\rangle=K_{12}K_{34}+K_{13}K_{24}+K_{14}K_{23}, \quad (11)$$

где K_{ij} – коэффициент корреляции между $X(i)$ и $X(j)$. Используя (1), (11), преобразуем выражение (10) следующим образом:

$$W_K(m_1, m_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} [K(i_1 \oplus i_1 \oplus m_1) K(i_2 \oplus i_2 \oplus m_2) +$$

$$+ K(i_1 \oplus i_2 \oplus m_2) K(i_2 \oplus i_1 \oplus m_1) + K(i_1 \oplus i_2) K(i_1 \oplus m_1 \oplus i_2 \oplus m_2)]. \quad (12)$$

Рассмотрим отдельно каждый из трех слагаемых в выражении (12), при этом, используя (2), перейдем к спектральному представлению слагаемых. Учитывая свойства ортогональности, мультипликативности и нормировку базисных функций $E - N$, получим выражения для первых двух слагаемых в виде

$$Q_1 = \sum_{g_1=0}^{N-1} S(g_1) \varphi_{g_1}(m_1) \sum_{g_2=0}^{N-1} S(g_2) \varphi_{g_2}(m_2) \times$$

$$\times \frac{1}{N} \sum_{i_1=0}^{N-1} \varphi_{g_1}^2(i_1) \frac{1}{N} \sum_{i_2=0}^{N-1} \varphi_{g_2}^2(i_2) = K(m_1) K(m_2),$$

$$Q_2 = \sum_{g_1=0}^{N-1} S(g_1) \varphi_{g_1}(m_1) \sum_{g_2=0}^{N-1} S(g_2) \varphi_{g_2}(m_2) \times$$

$$\times \frac{1}{N^2} \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} \varphi_{g_1}(i_1 \oplus i_2) \varphi_{g_2}(i_1 \oplus i_2) = \sum_{g_1=0}^{N-1} S^2(g_1) \varphi_{g_1}(m_1 \oplus m_2).$$

Аналогично можно показать, что для третьего слагаемого $Q_3 = Q_2$. Тогда окончательно начальный момент второго порядка равен

$$W_K(m_1, m_2) = K(m_1) K(m_2) + 2 \sum_{g=0}^{N-1} S^2(g) \varphi_g(m_1 \oplus m_2). \quad (13)$$

Полученные результаты (9), (13) требуются для определения аналитического вида выражений для математического ожидания и дисперсии сглаженной оценки ОСМ.

Смещение сглаженной оценки ОСМ. Используя формулу (9), найдем математическое ожидание оценки ОСМ (6) в обобщенном ортогональном мультипликативном базисе:

$$M\langle S_{e1}(k) \rangle = M\left\langle \frac{1}{E} \sum_{m=0}^{N-1} K_e(m) B(m) \varphi_k(m) \right\rangle = \frac{1}{E} \sum_{m=0}^{N-1} M\langle K_e(m) \rangle B(m) \varphi_k(m) =$$

$$= \frac{1}{E} \sum_{m=0}^{N-1} K(m) B(m) \varphi_k(m) = \sum_{g=0}^{N-1} S(g) R(g \oplus k).$$

Применяя первую интерполяционную формулу Гаусса [8] и полагая, что весовая функция $R(g \oplus k)$ является быстро спадающей в окрестности точки k, представим функцию $S(g), g = \overline{0, N-1}$, приближенным выражением

$$S(g) \approx S(k) + \Delta S(k)(g-k) + 0{,}5\Delta^2 S(k-1)(g-k)(g-k-1), \qquad (14)$$

где $\Delta S(k), \Delta^2 S(k-1)$ – первая и вторая центральные разности функции $S(k)$ в точках k и $(k-1)$. Тогда

$$M\langle S_{e1}(k)\rangle \approx S(k)\sum_{g=0}^{N-1} R(g \oplus k) + \Delta S(k)\sum_{g=0}^{N-1} gR(g \oplus k) -$$

$$-\Delta S(k)k\sum_{g=0}^{N-1} R(g \oplus k) + 0{,}5\Delta^2 S(k-1) \times$$

$$\times\left[\sum_{g=0}^{N-1} g^2 R(g \oplus k) - (2k+1)\sum_{g=0}^{N-1} gR(g \oplus k) + (k^2+k)\sum_{g=0}^{N-1} R(g \oplus k)\right].$$

Приняв условие нормировки

$$\alpha_0 = \sum_{g=0}^{N-1} R(g \oplus k) = \sum_{g=0}^{N-1} R(g) = 1 \qquad (15)$$

и обозначив

$$\alpha_1 = \sum_{g=0}^{N-1} gR(g \oplus k) = \sum_{g=0}^{N-1} (g \oplus k)R(g),$$

$$\alpha_2 = \sum_{g=0}^{N-1} g^2 R(g \oplus k) = \sum_{g=0}^{N-1} (g \oplus k)^2 R(g), \qquad (16)$$

получим окончательное выражение для математического ожидания сглаженной оценки ОСМ:

$$M\langle S_{e1}(k)\rangle \approx S(k) + \Delta S(k)\alpha_1 - \Delta S(k)k +$$

$$+ 0{,}5\Delta^2 S(k-1)[\alpha_2 - (2k+1)\alpha_1 + (k^2+k)].$$

Смещение сглаженной оценки ОСМ

$$b(k) \approx M\langle S_{e1}(k)\rangle - S(k) \approx$$

$$\approx \Delta S(k)[\alpha_1 - k] + 0{,}5\Delta^2 S(k-1)[\alpha_2 - (2k+1)\alpha_1 + k(k+1)]. \qquad (17)$$

Дисперсия сглаженной оценки ОСМ. Рассмотрим начальный момент второго порядка $W_S(k_1, k_2)$ случайной функции $S_{e1}(k)$. Используя свойство мультипликативности базисных функций и выражения (2), (3), (6), (7), (13), запишем

$$W_S(k_1, k_2) = M\langle S_{e1}(k_1)S_{e1}(k_2)\rangle =$$

$$= M\left\langle \frac{1}{E}\sum_{m_1=0}^{N-1} K_e(m_1)B(m_1)\varphi_{k_1}(m_1)\frac{1}{E}\sum_{m_2=0}^{N-1} K_e(m_2)B(m_2)\varphi_{k_2}(m_2)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{E^2}\sum_{m_1}\sum_{m_2} M\langle K_e(m_1)K_e(m_2)\rangle B(m_1)B(m_2)\varphi_{k_1}(m_1)\varphi_{k_2}(m_2) =$$

$$= \frac{1}{E}\sum_{m_1=0}^{N-1} K(m_1)B(m_1)\varphi_{k_1}(m_1)\frac{1}{E}\sum_{m_2=0}^{N-1} K(m_2)B(m_2)\varphi_{k_2}(m_2) +$$

$$+ \frac{1}{E^2}\sum_{m_1}\sum_{m_2} 2\sum_{g=0}^{N-1} S^2(g)\varphi_g(m_1 \oplus m_2)B(m_1)B(m_2)\varphi_{k_1}(m_1)\varphi_{k_2}(m_2) =$$

$$= \sum_{g_1=0}^{N-1} S(g_1)R(g_1 \oplus k_1)\sum_{g_2=0}^{N-1} S(g_2)R(g_2 \oplus k_2) +$$

$$+ 2\sum_{g} S^2(g)\frac{1}{E}\sum_{m_1} B(m_1)\varphi_{g\oplus k_1}(m_1)\frac{1}{E}\sum_{m_2} B(m_2)\varphi_{g\oplus k_2}(m_2) =$$

$$= \sum_{g_1=0}^{N-1} S(g_1)R(g_1 \oplus k_1)\sum_{g_2=0}^{N-1} S(g_2)R(g_2 \oplus k_2) + 2\sum_{g=0}^{N-1} S^2(g)R(g \oplus k_1)R(g \oplus k_2).$$

Найдем центральный момент второго порядка $L_S(k_1, k_2)$ случайной функции $S_{e1}(k)$:

$$L_S(k_1, k_2) = W_S(k_1, k_2) - M\langle S_{e1}(k_1)\rangle M\langle S_{e1}(k_2)\rangle =$$

$$= 2\sum_{g=0}^{N-1} S^2(g)R(g \oplus k_1)R(g \oplus k_2).$$

Дисперсия сглаженной оценки ОСМ

$$D\langle S_{e1}(k)\rangle = L_S(k_1, k_2)\big|_{k_1 = k_2 = k} = 2\sum_{g=0}^{N-1} S^2(g)R^2(g \oplus k). \tag{18}$$

Полагая, что весовая функция $R(g)$ отлична от нуля только в окрестности точки k, на основании формулы (14) приближенно представим $S(g) \approx S(k) + \Delta S(k)(g - k)$. Тогда

$$D\langle S_{e1}(k)\rangle \approx 2S^2(k)\sum_{g=0}^{N-1} R^2(g \oplus k) + 2k\Delta S(k)[\Delta S(k)k - 2S(k)]\sum_{g=0}^{N-1} R^2(g \oplus k) +$$

$$+4\Delta S(k)[S(k)-\Delta S(k)k]\sum_{g=0}^{N-1} gR^2(g\oplus k)+2[\Delta S(k)]^2\sum_{g=0}^{N-1} g^2R(g\oplus k).$$

Вводя обозначения

$$\beta_0=\sum_{g=0}^{N-1} R^2(g+k)=\sum_{g=0}^{N-1} R^2(g), \qquad \beta_1=\sum_{g=0}^{N-1} gR^2(g\oplus k),$$

$$\beta_2=\sum_{g=0}^{N-1} g^2R^2(g\oplus k) \tag{19}$$

и перегруппировывая слагаемые, окончательно получаем выражение для дисперсии сглаженной оценки ОСМ:

$$D\langle S_{e1}(k)\rangle\approx 2S^2(k)\beta_0+2\Delta S(k)k[\Delta S(k)k-2S(k)]\beta_0+$$

$$+4\Delta S(k)[S(k)-\Delta S(k)k]\beta_1+2[\Delta S(k)]^2\beta_2. \tag{20}$$

Синтез оптимальной весовой функции. Из анализа выражений (17), (20) следует, что при оценке каждого k-го спектрального отсчета необходимо производить адаптацию формы $R(g)$ под параметры СП и номер k, что существенно влияет на гибкость и быстродействие алгоритма спектрального анализа. Поэтому представляется целесообразным ограничить пространство возможных решений. Для определения вида оптимальной весовой функции воспользуемся функционалами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0$, оказывающими основное влияние на ошибку оценивания ОСМ, и рассмотрим вариационную задачу минимизации функционала β_0 при наличии связей (15), (16). Составим вспомогательный функционал

$$V[R(g)]=\sum_{g=0}^{N-1} R^2(g)+\lambda_0R(g)+\lambda_1(g\oplus k)R(g)+\lambda_2(g\oplus k)^2R(g), \tag{21}$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ – множители Лагранжа. Известно [9], что условный экстремум функционала β_0 достигается на той же кривой $R(g)$, на которой реализуется безусловный экстремум функционала $V[R(g)]$. Используя конечно-разностный метод [9], из уравнения Эйлера – Лагранжа получим ломаную, являющуюся приближенным решением вариационной задачи:

$$R(g)=\mu_2g^2+\mu_1g+\mu_0, \qquad g=\overline{0,N-1}, \tag{22}$$

где параметры μ_0, μ_1, μ_2 – некоторые постоянные множители; $\mu_j=-\lambda_j/2$, $j=0,1,2$. Задаваясь значениями α_1, α_2 и подставляя (22) в (15), (16), получим систему из трех алгебраических уравнений, решая которую, найдем значения коэффициентов μ_0, μ_1, μ_2, определяющих форму $R(g)$. Таким образом, синтезированная оптимальная весовая функция обеспечит минимизацию среднеквадратической ошибки оценивания при заданном ограничении на ошибку смещения.

Экспериментальные исследования. В теории классического спектрального анализа известна и широко используется на практике процедура стягивания корреляционного окна [4], которая обеспечивает гибкость алгоритма при компромиссном выборе между высоким разрешением и малой дисперсией отсчетов спектра мощности в базисе Фурье. Рассмотрим возможность применения аналогичной методики в обобщенном спектральном анализе на основе оптимальной весовой функции (22), что обусловлено существенным расширением области практической применимости алгоритма сглаживания (6).

Реализация процедуры стягивания корреляционного окна в обобщенном спектральном анализе позволяет, не меняя формы весовой функции $R(g)$, обеспечить минимизацию СКО оценивания только путем выбора длительности $R(g)$. Однако использование оптимальной весовой функции в явном виде (22) затруднено в силу необходимости постоянной адаптации коэффициентов μ_0, μ_1, μ_2 относительно числа отсчетов M, определяющих длительность весовой функции $R(g)$. Исходя из результатов выполненных нами модельных экспериментов, из всей совокупности возможных представлений (22), реализующих минимум СКО оценивания, при заданном уровне ошибки смещения выбрано следующее:

$$R(g)=0{,}3\left(\frac{g}{M-1}-1\right)^2,\quad g=\overline{0,M-1};\quad R(g)=0,\quad g=\overline{M,N-1}. \tag{23}$$

Нормировка $R(g)$ числа отсчетов M позволяет осуществлять «регулировку» M, делая процедуру сглаживания оценок ОСМ универсальной, что обеспечивает гибкую адаптацию алгоритма к практическим задачам.

Проверка эффективности выбранной весовой функции реализована нами путем имитационного моделирования оценки ОСМ в базисе Уолша – Качмажа. В качестве модели выбран СП типа «белый шум» с нормальным законом распределения, в котором присутствуют детерминированные составляющие (функции Уолша). Экспериментальные исследования в рамках данной модели обусловлены тем фактом, что теоретический ОСМ в любом ортогональном базисе известен только для СП типа «белый шум». На рис. 1, $a-c$ показаны соответственно теоретический спектр мощности в базисе Уолша – Качмажа, спектр мощности, полученный на основе оценки (5), и спектр мощности, полученный на основе оценки (6) при использовании весовой функции (23).

В случае 100 реализаций СП длиной $N=1024$ для оценки (6) вычислялись среднее смещение $B=\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\frac{1}{100}\sum\limits_{j=1}^{100}S_{e1j}(k)-S(k)$ и средняя относительная дисперсия

$$D=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{100}\sum_{h=1}^{100}\left(S_{e1h}(k)-\frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100}S_{e1j}(k)\right)^2\right)\Big/S^2(k)$$

оценки ОСМ в базисе Уолша – Качмажа при разной длительности весовой функции (числа отсчетов M). На рис. 2 представлены результаты экспери-

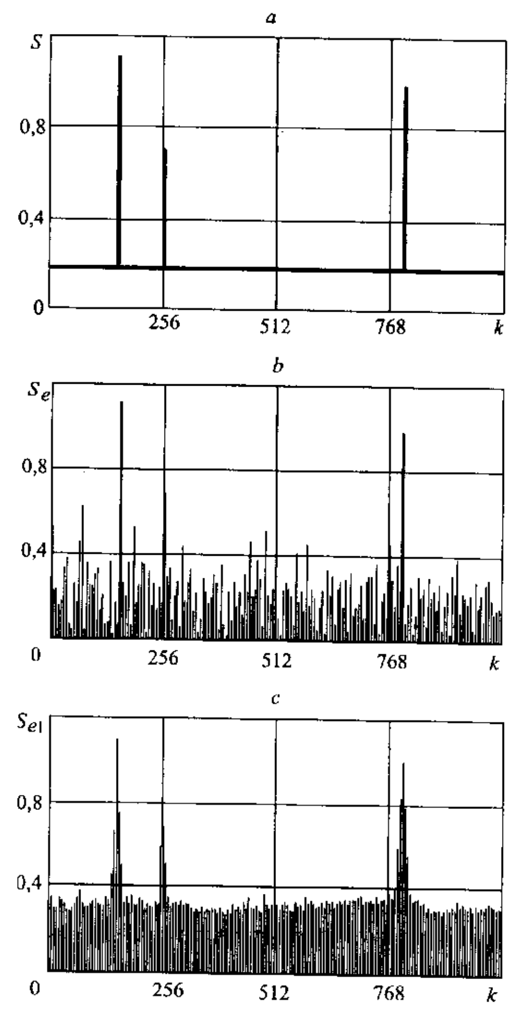

Рис. 1

мента в виде зависимости величины $B_0 = B \cdot 10^3$ от D при использовании синтезированной весовой функции (23) (кривая *1*), выделяющей функции Хэмминга (кривая *2*) и прямоугольной выделяющей функции (кривая *3*).

Анализ результатов экспериментальных исследований, представленных на рис. 1 и 2, позволяет сделать следующие выводы:

– рекомендованная весовая функция (23) превосходит известные и дает возможность существенно уменьшить дисперсию оценки ОСМ при заданном смещении;

– применение в обобщенном спектральном анализе классических весовых функций малоэффективно и может привести к несостоятельным оценкам ОСМ при неверном задании параметров спектрального анализа;

– при обобщенном спектральном анализе процедура стягивания окна реализуема для весовой функции (23) и нереализуема для ряда окон (например, Хэмминга) в точках малого смещения.

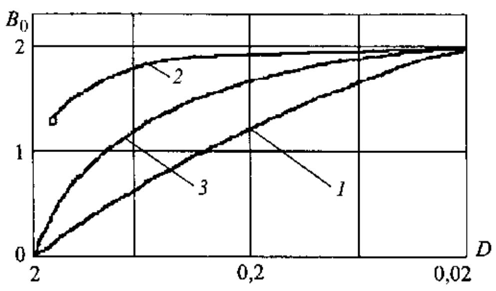

Рис. 2

Заключение. Теоретические и экспериментальные результаты настоящей работы показывают, что применение при обобщенном спектральном анализе известных весовых функций не позволяет обеспечить существенного снижения СКО оценивания. Применение весовой функции, минимизирующей СКО, приводит к адаптивному алгоритму оценивания ОСМ, что связано с необходимостью анализа параметров СП и сглаживания каждого k-го отсчета своей весовой функцией (т. е. всего необходимо N весовых функций). Рекомендованная весовая функция (23) обеспечивает при использовании процедуры стягивания корреляционного окна гибкое изменение составляющих $b(k)$ и $D(k)$ квадрата СКО оценивания $\Delta(k)$ в зависимости от специфики решаемой задачи и превосходит известные весовые функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трахтман А. М.** Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов. радио, 1972.
2. **Кириллов С. Н., Шелудяков А. С.** Оптимизация признакового пространства в задачах распознавания элементов речи // АиТ. 1998. № 5.
3. **Литвин А. И.** Вычисление спектральных коэффициентов Уолша, Фурье и Хартли // Автометрия. 1997. № 2. С. 83.
4. **Грибанов Ю. И., Мальков В. Л.** Спектральный анализ случайных процессов. М.: Энергия, 1974.
5. **Кириллов С. Н., Соколов М. Ю., Стукалов Д. Н.** Оптимальная весовая обработка при спектральном анализе сигналов // Радиотехника. 1996. № 6. С. 36.
6. **Пойда В. Н.** Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах. Минск: Наука и техника, 1978.
7. **Кириллов С. Н., Шустиков О. Е.** Анализ устойчивости оценки обобщенной спектральной плотности мощности случайного процесса // Вестник РГРТА. Рязань, 1998. Вып. 4. С. 36.
8. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.
9. **Эльсгольц Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

Рязанская государственная радиотехническая академия,
E-mail: drug@org.etr.ru

Поступила в редакцию 3 декабря 1998 г.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 3 2000

УДК 621.391 : 517.97

В. В. Кашинов
(Санкт-Петербург)

ОПТИМАЛЬНАЯ ДВУХКАНАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОМЕХАХ

Сформулирована проблема оптимальной двухканальной линейной фильтрации при нестационарных помехах. Показано, что она приводит к решению вариационной задачи для функционалов, которые зависят от операторов с искомыми нестационарными ядрами, действующих на заданные функции – входные процессы. Выведены необходимые условия экстремума для этих функционалов, на основе которых получены явные выражения для нестационарного ядра оптимального оператора. Найдено выражение для нижней границы дисперсии ошибки. Рассмотрен частный случай двухканальной стационарной фильтрации.

Разнесенный прием до сих пор применяется для борьбы с замираниями сигнала в коротковолновых каналах связи. Эти каналы в основном используются, когда необходимо организовать связь на большое расстояние при помощи маломощного передатчика. В этом случае, как правило, применяется линейное сложение сигналов, поступающих из каналов разнесенного приема [1]. Естественно, перед сумматором следует включить фильтры, осуществляющие оптимальное выделение суммарного сигнала из помех. Критерием оптимальности в этом случае может быть минимум дисперсии ошибки выделения полезного сигнала на выходе сумматора.

Похожие задачи возникают при создании бортовых навигационных комплексов, в которых часто используется калмановская фильтрация [2], и при приеме сигналов в многолучевых каналах [3, 4]. Однако и в этих случаях интерес представляет нижняя граница дисперсии ошибки, которую не преодолеть никакими средствами и которая обеспечивается физически нереализуемыми фильтрами.

Критерий оптимальности. Рассмотрим систему приема, состоящую из двух каналов, выходные сигналы которых складываются. Фильтры, включенные в каждый канал, описываются линейными интегральными операторами:

$$K_1 f = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tau) h_1(t,\tau) f(\tau) d\tau = \int_T h_1(t,\tau) f(\tau) d\tau,$$
$$K_2 f = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\tau) h_2(t,\tau) f(\tau) d\tau = \int_T h_2(t,\tau) f(\tau) d\tau, \quad (1)$$