РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 3 2000

УДК 621.391 : 53.08

Ю. Е. Воскобойников, И. Н. Мухина

(Новосибирск)

ЛОКАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОНТРАСТНЫХ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Предложен новый подход к построению локального регуляризирующего алгоритма, в котором вместо скалярного используется векторный параметр регуляризации. Вводится новый сглаживающий функционал, точка минимума которого принимается в качестве регуляризированного решения. Построена итерационная процедура, вычисляющая точку минимума этого функционала. Приведенные результаты вычислительного эксперимента показали существенное увеличение точности восстановления контрастных сигналов по сравнению с «глобальными» регуляризирующими алгоритмами.

Введение. Многие задачи восстановления сигналов и изображений сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$K\varphi = f, \tag{1}$$

где K – матрица размером $n \times m$; φ, f – векторы соответствующей размерности. В общем случае система (1) является несовместной, плохо обусловленной с прямоугольной матрицей K $(n > m)$. Поэтому в качестве решения системы принимается нормальное псевдорешение φ^+ [1–3], которое всегда существует и единственно. Известно, что вычисление псевдорешения – неустойчивая задача (малые ошибки в исходных данных могут вызвать большие ошибки в псевдорешении). Поэтому для устойчивого построения псевдорешения используют методы регуляризации [1–4].

Предположим, что вместо точной правой части f задан вектор

$$\tilde{f} = f + \eta, \tag{2}$$

где η – случайный вектор «шума измерений», обусловленный ошибками дискретизации, шумами измерительной аппаратуры и т. д. Тогда в качестве приближения к искомому псевдорешению φ^+, соответствующему точной правой части f, берется решение φ_α системы уравнений

$$(K^T W_f K + aW_\varphi)\varphi_\alpha = K^T W_f \tilde{f}, \tag{3}$$

где α – параметр регуляризации; T – транспонирование. Матрица W_f размером $n \times n$ определяется на основе априорной информации о числовых характеристиках вектора шума η и, как правило, с точностью до константы равна V_η^{-1} (V_η – корреляционная матрица вектора шума). Матрица W_φ размером $m \times m$ характеризует «априорную гладкость» вектора φ и определяется требуемым порядком регуляризации [2–4].

Известные алгоритмы выбора α [1–5] позволяют вычислить приемлемое значение α и гарантируют (при некоторых условиях) сходимость $\varphi_\alpha \to \varphi^+$ при стремлении уровня шума к нулю. Вектор φ_α можно назвать глобальным регуляризированным решением системы (1), так как оно получено подбором только одного параметра α, чем обусловлен существенный недостаток методов глобальной регуляризации, проявляющийся при восстановлении контрастных сигналов и изображений. Соответствующий этим сигналам вектор φ имеет группы рядом стоящих проекций с мало изменяющимися амплитудами проекций в каждой группе («плоские» участки сигнала) и скачкообразное изменение амплитуды при переходе от одного «плоского» участка к другому. Для сохранения скачков амплитуды необходимо уменьшать величину α, но это вызывает появление осцилляций на «плоских» участках сигнала. Увеличение α приводит к обратному эффекту.

Локальные регуляризирующие алгоритмы, основанные на концепции винеровской фильтрации [6–8], улучшают точность решения, но неизбежный переход из частотной области (в которой происходит вычисление отношений шум/сигнал) в пространственную ухудшает качество восстановления контрастных сигналов и изображений.

В данной работе предлагается подход к построению нового класса локальных регуляризирующих алгоритмов. В этих алгоритмах присутствует векторный параметр регуляризации, позволяющий локально управлять гладкостью регуляризированного решения.

Локальный регуляризирующий алгоритм. Можно показать, что решение φ_α системы (3) является точкой минимума квадратичного функционала

$$F_\alpha[\varphi] = \left\| \tilde{f} - K\varphi \right\|^2_{W_f} + \alpha \left\| \varphi \right\|^2_{W_\varphi},$$

где $\left\| \varphi \right\|^2_{W_\varphi} = \varphi^T W_\varphi \varphi$ – взвешенная норма вектора φ. Обычно для получения гладкого решения в качестве W_φ принимают трехдиагональную матрицу размером $m \times m$:

$$W_\varphi = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

и тогда функционал $F_\alpha[\varphi]$ можно записать в виде

$$F_\alpha[\varphi] = \left\| \tilde{f} - K\varphi \right\|^2_{W_f} + \alpha \sum_{j=2}^{m} (\varphi_j - \varphi_{j-1})^2.$$

Вместо скалярного параметра регуляризации, введем во второе слагаемое этого функционала векторный параметр регуляризации:

$$\overline{\mu}=\{\mu_2,\mu_3,\ldots,\mu_m\}. \tag{4}$$

Тогда имеем новый сглаживающий функционал

$$F_\alpha[\varphi,\overline{\mu}]=\left\|\widetilde{f}-K\varphi\right\|^2_{W_f}+\sum_{j=2}^{m}\mu_j^2(\varphi_j-\varphi_{j-1})^2. \tag{5}$$

Определив матрицу

$$M(\overline{\mu})=\begin{vmatrix} \mu_2^2 & -\mu_2^2 & & 0 \\ -\mu_2^2 & (\mu_2^2+\mu_3^2) & -\mu_3^2 & \\ 0 & -\mu_3^2 & (\mu_3^2+\mu_4^2) & -\mu_4^2 \\ & & \ddots & \\ & 0 & -\mu_m^2 & \mu_m^2 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

выражение (5) можно переписать в виде

$$F_\alpha[\varphi,\overline{\mu}]=\left\|\widetilde{f}-K\varphi\right\|^2_{W_f}+\left\|\varphi\right\|^2_{M(\overline{\mu})}. \tag{7}$$

Введем функционал

$$\Gamma[\overline{\mu}]=\gamma_1^2\sum_{j=2}^{m}(\mu_j-\gamma_0)^2+\gamma_2^2\sum_{j=3}^{m}(\mu_j-\mu_{j-1})^2 \tag{8}$$

и ограничения $0\le\mu_j\le\gamma_0$, $j=2,\ldots,m$.

Очевидно, что при $\mu_j\to\gamma_0$ уменьшается величина функционала $\Gamma[\overline{\mu}]$, но увеличивается слагаемое $\left\|\varphi\right\|^2_{M(\overline{\mu})}$ функционала (7). Учитывая такую взаимосвязь, введем новый функционал (назовем его локальным сглаживающим функционалом) $\Phi[\varphi,\overline{\mu}]=F[\varphi,\overline{\mu}]+\Gamma[\overline{\mu}]$ и определим точку его минимума $(\varphi^*_{\overline{\mu}},\overline{\mu}^*)$ из условий

$$\frac{\partial\Phi[\varphi,\overline{\mu}]}{\partial\varphi_j}=0,\quad j=1,\ldots,m; \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Phi[\varphi,\overline{\mu}]}{\partial\mu_j}=0,\quad j=2,\ldots,m. \tag{10}$$

Вектор $\varphi_{\overline{\mu}}$, удовлетворяющий (9) при заданном векторе $\overline{\mu}$, является решением системы линейных уравнений

$$(K^TW_fK+M(\overline{\mu}))\varphi_{\overline{\mu}}=K^TW_f\widetilde{f}, \tag{11}$$

где матрица $M(\overline{\mu})$ определяется соотношением (6). Условия (10) приводят к следующей системе уравнений, состоящей из $(m-1)$ уравнений относительно $(m-1)$ величин $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_m$:

$$[(\varphi_2-\varphi_1)^2+\gamma_1^2+2\gamma_2^2]\mu_2-\gamma_2^2\mu_3=\gamma_1^2\gamma_0;$$

$$-\gamma_2^2\mu_{i-1}+[(\varphi_i-\varphi_{i-1})^2+\gamma_1^2+2\gamma_2^2]\mu_i-\gamma_2^2\mu_{i+1}=\gamma_1^2\gamma_0, \quad i=3,\ldots,m-1;$$

$$-\gamma_2^2\mu_{m-1}+[(\varphi_m-\varphi_{m-1})^2+\gamma_1^2+2\gamma_2^2]\mu_m=\gamma_1^2\gamma_0.$$

Перепишем эту систему в матричном виде:

$$A(\varphi)\overline{\mu}=\overline{\gamma}, \tag{12}$$

где $\overline{\gamma}$ – вектор с элементами $\overline{\gamma}_i=\gamma_1^2\gamma_0$, $i=1,\ldots,m-1$.

Матрица $A(\varphi)$ трехдиагональная и для любого вектора φ имеет диагональное преобладание. Следовательно, система (12) всегда имеет единственное решение. Учитывая структуру систем (11), (12), для нахождения точки минимума $(\varphi^*_{\overline{\mu}}, \overline{\mu}^*)$ функционала $\Phi[\varphi, \overline{\mu}]$ используем итерационную процедуру вида

$$\varphi^{(l)}_{\overline{\mu}}=[K^TW_fK+M(\overline{\mu}^{(l)})]^{-1}K^TW_f\widetilde{f};$$

$$\widehat{\mu}^{(l+1)}=A^{-1}(\varphi^{(l)}_{\overline{\mu}})\overline{\gamma}, \quad l=0,1,2,\ldots; \tag{13}$$

$$\overline{\mu}_i^{(l+1)}=\begin{cases}\widehat{\mu}_i^{(l+1)}, & \text{если } 0\le\widehat{\mu}_i^{(l+1)}\le\gamma_0;\\ 0, & \text{если } \widehat{\mu}_i^{(l+1)}<0;\\ \gamma_0, & \text{если } \widehat{\mu}_i^{(l+1)}>\gamma_0.\end{cases}$$

Условием прекращения итераций является одновременное выполнение неравенств:

$$\frac{\left\|\mu^{(l)}-\mu^{(l-1)}\right\|}{\left\|\mu^{(l)}\right\|}\le\varepsilon, \qquad \frac{\left\|\varphi^{(l)}_{\overline{\mu}}-\varphi^{(l-1)}_{\overline{\mu}}\right\|}{\left\|\varphi^{(l)}_{\overline{\mu}}\right\|}\le\varepsilon.$$

Здесь ε – достаточно малая величина порядка $10^{-4}\div10^{-3}$. В качестве начального значения $\overline{\mu}^{(0)}$ примем вектор с проекциями

$$\mu_i^{(0)}=\sqrt{\alpha_W}/2, \quad i=2,\ldots,m, \tag{14}$$

где α_W – значение параметра регуляризации, гарантирующее сходимость регуляризированного решения, найденного из системы (3), к искомому псевдорешению φ^+. Заметим, что выбор такого значения может быть осуществлен из принципа невязки [1, 2, 4] или критерия оптимальности [2, 5].

Вычислительный эксперимент, проведенный для матрицы K различных размеров, чисел обусловленности (10^3, 10^6, 10^{12}) и при различных векторах

φ, показал, что число итераций, необходимых для завершения процесса (13) (величина $\varepsilon = 10^{-3}$), не превышало 10, а типичное число итераций равнялось 4–7.

Утверждение. Если

$$\mu_i^{(0)} = \sqrt{\alpha_W}/2, \quad i = 2, \ldots, m; \tag{15}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\alpha_W}, \tag{16}$$

то вектор $\varphi^*_{\bar{\mu}}$ является регуляризированным решением системы (1).

Доказательство этого утверждения опирается на следующие свойства:

– вектор $\varphi^*_{\bar{\mu}}$ как решение системы (11) существует при любой правой части $\tilde{f}$;

– при выполнении (15) μ_j^* удовлетворяет условию $0 \le \mu_j^* \le \gamma_0$;

– из сходимости глобального регуляризированного решения φ_α, построенного при $\alpha = \alpha_W$ (при этом $\alpha_W \to 0$), и условия (16) следуют сходимости $\gamma_0 \to 0$, $\mu_j^* \to 0$ и сходимость решения $\varphi_{\bar{\mu}} \to \varphi^+$ при стремлении уровня шума к нулю.

Заметим, что наряду с функционалом $\Gamma(\bar{\mu})$, определенным выражением (8), можно построить и другие функционалы, например

$$\Gamma(\bar{\mu}) = \gamma_1^2 \sum_{j=2}^{m} [\gamma_0 - (\gamma_0^2 - (\gamma_0 - \mu_j)^2)^{1/2}] + \gamma_2^2 \sum_{j=3}^{m} (\mu_j - \mu_{j-1})^2. \tag{17}$$

Данный функционал имеет то же поведение, что и функционал (8), однако условия (10) приводят к системе нелинейных уравнений относительно μ_j. Это означает: а) добавление к «внешней» итерационной процедуре (13) «внутренней» итерационной процедуры решения данной системы нелинейных уравнений; б) увеличение вычислительных затрат при нахождении вектора μ_j^*.

Положительным моментом является более высокая точность решения $\varphi^*_{\bar{\mu}}$ (уменьшение среднеквадратической ошибки может составлять 3–7 %).

Выбор параметров локального регуляризирующего алгоритма. Функционал $\Gamma[\bar{\mu}]$ содержит два параметра: γ_1^2, γ_2^2. Очевидно, что от значений этих параметров зависит точность регуляризированного решения $\varphi^*_{\bar{\mu}}$. Для их выбора обратимся к критерию оптимальности [2, 5], используемому при оценивании оптимального значения α_{opt} параметра регуляризации. Этот параметр доставляет минимум среднеквадратической ошибки регуляризированного решения φ_α, определяемой функционалом

$$\Delta(\varphi_\alpha) = M\left[\left\|\varphi_\alpha - \varphi^+\right\|^2\right],$$

где $M[\cdot]$ – оператор математического ожидания по ансамблю реализаций случайного вектора $\tilde{f}$.

Введем билинейную форму:

$$\rho_W(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i(\gamma_1, \gamma_2)\tilde{f}_i}{\sigma_i^2}, \tag{18}$$

где $e_i(\gamma_1, \gamma_2)$ – i-я проекция вектора невязки $e(\gamma_1, \gamma_2) = \tilde{f} - K\varphi_{\bar{\mu}}^*$; $\varphi_{\bar{\mu}}^*$ – решение, вычисленное при заданных величинах γ_1, γ_2. В качестве γ_1, γ_2 будем брать значения $\gamma_{W_1}, \gamma_{W_2}$, для которых имеет место неравенство

$$\nu_n(\beta/2) \le \rho_W(\gamma_1, \gamma_2) \le \nu_n(1-\beta/2), \tag{19}$$

где $\nu_n(\beta/2)$ – квантиль χ^2-распределения с n степенями свободы уровня $\beta/2$, $\beta = 0{,}10$. Для вычисления $\gamma_{W_1}, \gamma_{W_2}$ используется любой итерационный алгоритм решения нелинейного уравнения

$$\rho_W(\gamma_1, \gamma_2) = n, \tag{20}$$

итерации которого прекращаются, как только выполнится условие (19).

Многочисленные вычислительные эксперименты с различными векторами φ показали, что величина γ_{W_1} изменяется в пределах $1 \div 10$, γ_{W_2} – в пределах $0{,}1 \div 10$. Так как вычисление $\gamma_{W_1}, \gamma_{W_2}$ требует значительного объема вычислений, то можно рекомендовать априорное задание величин $\gamma_{W_1} = 5$, $\gamma_{W_2} = 0{,}5$.

Локальный алгоритм фильтрации. Наряду с решением СЛАУ вида (1), при обработке экспериментальных данных часто возникает задача фильтрации зашумленных сигналов и изображений, описываемых моделью $\tilde{f}_j = f_j + \eta_j$, $j = 1, \ldots, n$, где f_j – точное (но неизвестное) значение сигнала; η_j – случайный шум измерения. Необходимо по «зашумленным» значениям $\{\tilde{f}_j\}$ вычислить оценку $\hat{f}_j$, наилучшим образом (с точки зрения принятого критерия) приближающую значение f_j.

Приняв в качестве матрицы K единичную матрицу I, задачу решения СЛАУ (1) трансформируем в задачу фильтрации зашумленного сигнала. Поэтому, используя изложенный выше подход, построим локальный алгоритм фильтрации. Введем функционал

$$\Phi[f, \mu] = \sum_{j=1}^{n} \frac{(\tilde{f}_j - f_j)^2}{\sigma_j^2} + \sum_{j=2}^{n} \mu_j^2 (\varphi_j - \varphi_{j-1})^2 +$$

$$+ \gamma_1^2 \sum_{j=2}^{n} (\mu_j - \gamma_0)^2 + \gamma_2^2 \sum_{j=3}^{n} (\mu_j - \mu_{j-1})^2$$

и определим точку минимума $(f_{\bar{\mu}}^*, \bar{\mu}^*)$ этого функционала из условий

$$\frac{\partial \Phi[f, \bar{\mu}]}{\partial f_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n; \qquad \frac{\partial \Phi[f, \bar{\mu}]}{\partial \mu_j} = 0, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Для нахождения точки минимума используется итерационная процедура, аналогичная (13), с заданием начального значения $\bar{\mu}^{(0)}$ согласно выражению (14). Также по аналогии выбираются параметры γ_1, γ_2, входящие в функционал $\Phi[f, \bar{\mu}]$. В качестве «выходного» сигнала локального сглаживающего фильтра принимается вектор $f_{\bar{\mu}}^*$.

Результаты вычислительного эксперимента показывают более высокую точность предлагаемого алгоритма при сглаживании контрастных сигналов по сравнению с алгоритмами фильтрации на основе дискретного преобразования Фурье, фильтром скользящего среднего и медианным фильтром.

Результаты вычислительного эксперимента. Для проверки работоспособности и изучения свойств предложенного локального регуляризирующего алгоритма был проведен обширный вычислительный эксперимент. Приведем результаты следующих экспериментов.

Матрица K системы (1) имела размер 80×50 и число обусловленности, приблизительно равное 10^{12}. Вектор φ, соответствующий контрастному сигналу, изображен на рис. 1. Проекции точной правой части $f = K\varphi$ искажались нормально распределенными псевдослучайными числами с нулевым средним и дисперсией σ_η^2, которая задавалась по относительному уровню шума $\delta_\eta = \left\| \tilde{f} - f \right\| / \left\| f \right\|$. Так как регуляризированное решение, построенное по случайному вектору $\tilde{f}$, является также случайным вектором, а следовательно, норма ошибки решения – случайной величиной, то в качестве меры точности была принята относительная среднеквадратическая ошибка

$$\Delta(\varphi_{\bar{\mu}}^*) = \frac{\left(M\left[\left\| \varphi_{\bar{\mu}}^* - \varphi \right\|^2 \right] \right)^{1/2}}{\left\| \varphi \right\|},$$

при вычислении которой оператор математического ожидания по ансамблю случайного вектора $\varphi_{\bar{\mu}}^*$ заменялся усреднением по 20 реализациям этого вектора.

На рис. 1 приведены проекции «глобального» регуляризированного решения φ_{α_W} ($\alpha_W = 1793$) и «локального» регуляризированного решения $\varphi_{\bar{\mu}}^*$ ($\gamma_0 = \sqrt{1793}; \gamma_{W_1} = 1{,}0$; $\gamma_{W_2} = 0{,}1$), построенные для относительного уровня

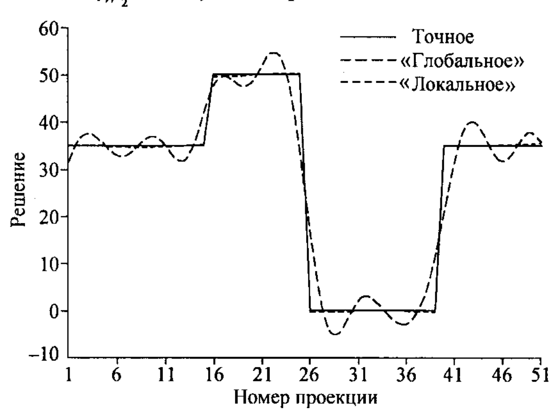

Рис. 1. Проекции точного, «глобального» и «локального» решений при относительном уровне шума 0,01

Рис. 2. Проекции векторного параметра регуляризации

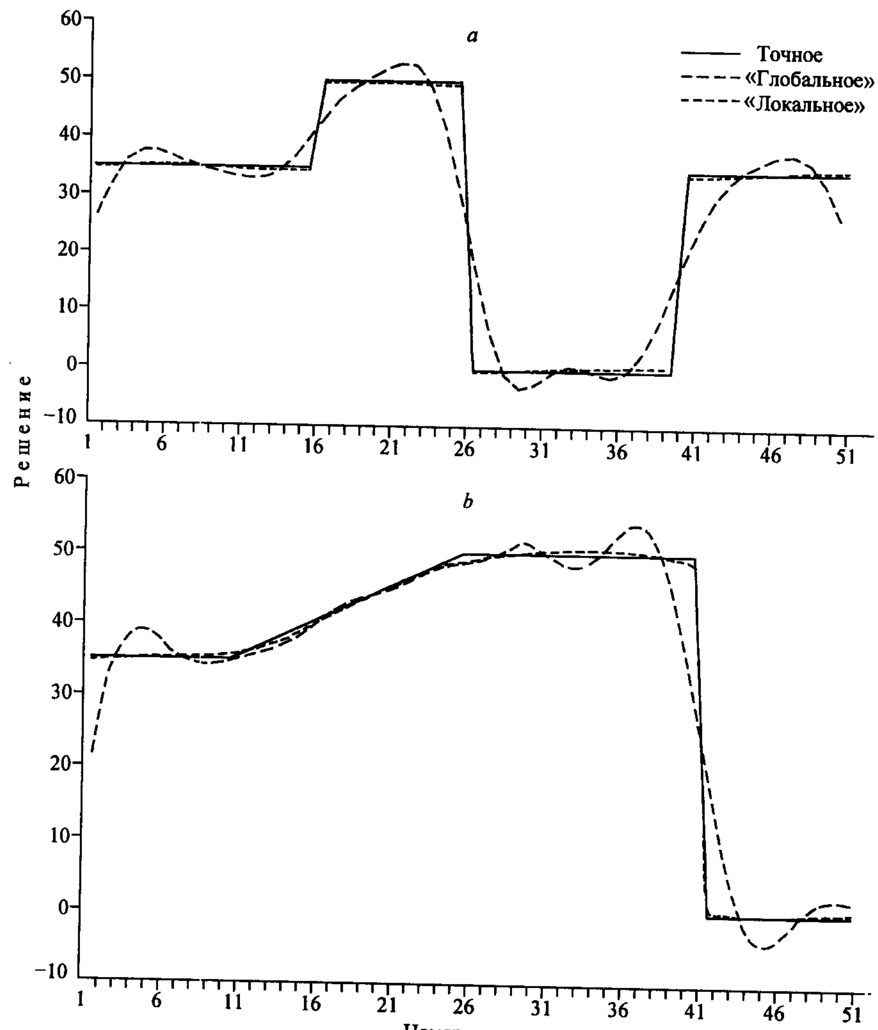

Рис. 3. Проекции точного, «глобального» и «локального» решений при относительном уровне шума 0,10 (*a*) и другой форме решения (*b*)

шума $\delta_\eta = 0{,}01$ (или иначе 1 %). Видно, что решение $\varphi_{\bar\mu}^*$ существенно точнее решения φ_{α_W}. Это подтверждают величины $\Delta(\varphi_{\alpha_W}) = 0{,}0217$; $\Delta(\varphi_{\bar\mu}^*) = 0{,}0004$.

На рис. 2 приведены проекции векторного параметра регуляризации $\bar\mu^*$, имеющие специфический характер изменения: в точках «скачка» амплитуды контрастного сигнала проекции μ_j принимают значения, близкие к нулю, на «плоских» участках $\mu_j \approx \sqrt{\alpha_W}$.

На рис. 3, *а* даны решения $\varphi_{\alpha_W}, \varphi_{\bar\mu}^*$, построенные при уровне шума $\delta_\eta = 0{,}1$. Даже при таком высоком уровне шума очевидны преимущества решения $\varphi_{\bar\mu}^*$ ($\Delta(\varphi_{\alpha_W}) = 0{,}0302$; $\Delta(\varphi_{\bar\mu}^*) = 0{,}00052$; $\gamma_{W_1} = 4{,}64$; $\gamma_{W_2} = 0{,}8$).

На рис. 3, *b* приведены регуляризированные решения φ_{α_W}, $\varphi_{\bar\mu}^*$, построенные при уровне шума $\delta_\eta = 0{,}1$ и соответствующие другому решению φ, которое, кроме скачков и плоских участков, содержит наклонные участки. Заметим, что такая форма решения часто встречается на практике. Вновь очевидны преимущества решения $\varphi_{\bar\mu}^*$ ($\Delta(\varphi_{\alpha_W}) = 0{,}0202$; $\Delta(\varphi_{\bar\mu}^*) = 0{,}00022$).

Заключение. Предложенный локальный регуляризирующий алгоритм с векторным параметром регуляризации не требует задания априорной информации о характеристиках и форме искомого решения и существенно точнее алгоритмов глобальной регуляризации при восстановлении контрастных сигналов и изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. **Воскобойников Ю. Е.** Методы решения некорректных задач параметрической идентификации. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1996.
3. **Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И.** Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
4. **Морозов В. А., Гребенников А. И.** Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1992.
5. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующих алгоритмов восстановления изображений //Автометрия. 1995. № 3. С. 68.
6. **Арсенин В. Я., Тимонов А. А.** О построении регуляризующих операторов, близких к оптимальному, для одномерных и многомерных интегральных уравнений I рода типа свертки // ДАН СССР. 1985. **284**, № 6. С. 1289.
7. **Арсенин В. Я., Криксин Ю. А., Тимонов А. А.** Метод локальной регуляризации линейных операторных уравнений I рода и его приложение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1988. **28**, № 6. С. 793.
8. **Воскобойников Ю. Е., Мухина И. Н.** Регуляризующий алгоритм восстановления сигналов и изображений с уточнением локальных отношений шум/сигнал // Автометрия. 1999. № 4. С. 71.

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,
E-mail: voscob@mail.ru

Поступила в редакцию 8 июня 1999 г.