РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 3 2000

УДК 519.642

С. Н. Касьянова, О. Е. Трофимов

(Новосибирск)

ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПЛОСКОГО ДЕТЕКТОРА*

Формулы обращения для томографической реконструкции в конусе лучей преобразуются к виду, естественному для случая плоского детектора. Полученные формулы позволяют перейти от дифференцирования и интегрирования по окружностям, лежащим в трехмерном пространстве, к дифференцированию и интегрированию по прямым в плоскости регистрации, что позволяет, в частности, сократить время вычислений.

С математической точки зрения задача трехмерной томографической реконструкции заключается в определении функции трех переменных по ее интегралам вдоль лучей, лежащих в трехмерном пространстве. В работах [1–3] получены формулы, позволяющие строить численные алгоритмы восстановления функции $f(x)=f(x_1,x_2,x_3)$ по ее лучевому преобразованию $(R_1^+f)(\xi,S)$, которое определяется следующей формулой:

$$(R_1^+f)(\xi,S)=g_f^+(\xi,\lambda)=\int_0^\infty f(t\xi+S)dt. \tag{1}$$

Здесь $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $S=(s_1,s_2,s_3)$ – точки в трехмерном пространстве; t – одномерная переменная интегрирования.

Для сокращения записи будем использовать также обозначение $(R_1^+f)(\xi,S)=R_1^+(\xi,S)=g^+(\xi,S)$, опуская символ f.

Луч, по которому ведется интегрирование, определяется здесь шестью переменными $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,s_1,s_2,s_3)$. Задавая три координаты источника $S=(s_1,s_2,s_3)$, определяем начало луча; задавая с помощью трех других координат (ξ_1,ξ_2,ξ_3) еще одну точку ξ на луче, мы полностью определяем его. Каждый луч в трехмерном пространстве может быть задан таким способом, однако не единственным образом. Величины $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,s_1,s_2,s_3)$ и $(a\xi_1,a\xi_2,a\xi_3,s_1,s_2,s_3)$ определяют один и тот же луч.

Исходные данные в виде функции $R_1^+(\xi,S)=g^+(\xi,S)$ удобно использовать в теоретических рассмотрениях. Однако в силу отмеченного выше свойства они являются избыточными. Если, например, используется приемник в

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-07-90342).

виде матрицы детекторов, расположенных на плоскости, или в виде плоской пленки, то луч можно задать пятью переменными $(p_1, p_2, s_1, s_2, s_3)$. Здесь переменные (s_1, s_2, s_3) по-прежнему означают координаты источника, а переменные (p_1, p_2) – точку пересечения луча с плоскостью регистрации относительно некоторой системы координат, выбранной в этой плоскости. Исходными данными, как и ранее, являются интегралы по лучам, но теперь это функция пяти переменных $g_r(p_1, p_2, s_1, s_2, s_3)$. Для восстановления искомой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по функции $g_r(p_1, p_2, s_1, s_2, s_3)$ есть два способа. Можно по функции пяти переменных $g_r(p_1, p_2, s_1, s_2, s_3)$ начислять функцию шести переменных $g^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3, s_1, s_2, s_3)$, а затем использовать известные формулы обращения. Другой способ заключается в том, что формулы обращения преобразуются так, чтобы в них использовалась функция $g_r(p_1, p_2, s_1, s_2, s_3)$.

В настоящей работе рассматривается второй способ.

Следует отметить, что для определения функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ избыточной является и функция пяти переменных $g_r(p_1, p_2, s_1, s_2, s_3)$. Эта избыточность снимается тем, что рассматриваются не все возможные положения источника S, а лишь те, которые принадлежат некоторой траектории, зависящей от параметра λ, т. е. исходными данными являются значения функции трех переменных $g_r(p_1, p_2, \lambda) = g_r(p_1, p_2, s_1(\lambda), s_2(\lambda), s_3(\lambda))$. Так же поступают и при использовании функции $g^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3, s_1(\lambda), s_2(\lambda), s_3(\lambda)) = g^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \lambda)$, однако здесь в исходных данных содержится на одну переменную больше, чем в искомой функции. В формулах обращения, приведенных в [1–3], рассматриваются не все значения (ξ_1, ξ_2, ξ_3), а лишь те, что лежат на единичной сфере. Поэтому в теоретических рассмотрениях и в случае сферического детектора наличие четвертой переменной не имеет большого значения. Однако в случае плоского детектора лишнюю переменную желательно убрать.

Плоскость регистрации, источник и объект изображены на рис. 1. На рисунке приведены только одна из окружностей траектории источника и плоская часть конуса лучей. Детектор вращается вместе с источником. На рис. 2 изображена полная траектория источника.

Перейдем к выбору системы координат в плоскости регистрации.

Мы будем предполагать, что для источника, находящегося в точке $S = (s_1, s_2, s_3)$, исходные данные регистрируются в плоскости P, определяемой уравнением $xs_1 + ys_2 + zs_3 = -|S|^2$.

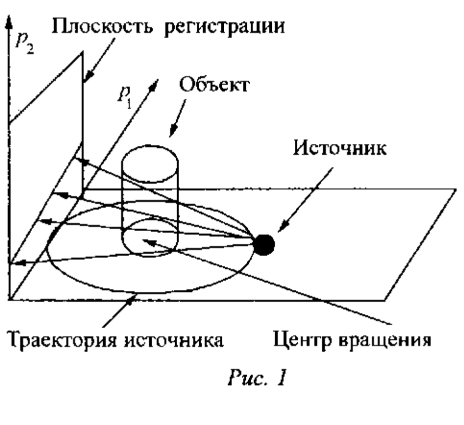

Рис. 1

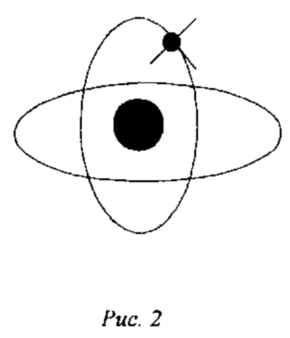
Рис. 2

Плоскость P определяется следующими условиями: она перпендикулярна лучу, соединяющему источник с началом координат, и проходит через точку $-S=(-s_1, -s_2, -s_3)$.

Расстояние D между плоскостью регистрации и источником равно удвоенному расстоянию от источника до начала координат.

В плоскости регистрации будем использовать прямоугольную систему координат (p_1, p_2), начало которой находится в точке пересечения с лучом, соединяющим источник с точкой (0, 0, 0). Таким образом, если источник располагается в точке $S=(s_1, s_2, s_3)$, то началом системы координат (p_1, p_2) в плоскости регистрации является точка с трехмерными координатами $(-s_1, -s_2, -s_3)=-S$.

При реконструкции в конусе лучей наиболее распространенными примерами траекторий источника являются винтовая линия и пара окружностей, лежащих в пересекающихся плоскостях.

В настоящей работе мы рассматриваем траекторию в виде двух окружностей. Рассмотрим сначала ситуацию, когда источник движется по окружности, лежащей в плоскости $z=0$.

Направление оси p_2 в плоскости регистрации будет совпадать с направлением оси z. Ось p_1 системы координат возьмем на линии пересечения плоскости регистрации с плоскостью, содержащей окружность, по которой движется источник. Для окончательного определения системы координат необходимо выбрать одно из двух возможных направлений оси p_1. Если $s_3=0$, $s_1=r\cos\lambda$, $s_2=r\sin\lambda$ (источник движется в плоскости $z=0$), то положительный единичный вектор на оси p_1 выберем так, чтобы он совпадал с вектором $(\cos(\lambda+\pi/2), \sin(\lambda+\pi/2), 0)=(-\sin\lambda, \cos\lambda, 0)=(-s_2/|S|, s_1/|S|, 0)$.

Точка с координатами (p_1, p_2) в плоскости регистрации имеет следующие пространственные координаты:

$$x_1=x=-p_1\sin\lambda-r\cos\lambda=-p_1s_2/|S|-s_1,$$

$$x_2=y=p_1\cos\lambda-r\sin\lambda=p_1s_1/|S|-s_2, \qquad x_3=z=p_2.$$

В случае плоского детектора исходными данными являются интегралы по лучам, соединяющим точки (p_1, p_2) в плоскости регистрации с источником S.

Регистрируемая функция $g_r(p_1, p_2, \lambda)$ есть интеграл от искомой функции $f(x)=f(x_1, x_2, x_3)$ вдоль луча, исходящего из точки $S=(s_1, s_2, s_3)=(r\cos\lambda, r\sin\lambda, 0)$ в направлении точки

$$P=(-p_1\sin\lambda-r\cos\lambda, p_1\cos\lambda-r\sin\lambda, p_2)=$$

$$=(-p_1s_2/|S|-s_1, p_1s_1/|S|-s_2, p_2).$$

Интегральная форма регистрируемой функции имеет вид:

$$g_r(p_1, p_2, \lambda)=$$

$$=\int_0^\infty f(r\cos\lambda+t(-p_1\sin\lambda-2r\cos\lambda), r\sin\lambda+t(p_1\cos\lambda-2r\sin\lambda), 0+tp_2)dt. \quad (2)$$

При $t=0$ луч проходит через точку $S=(r\cos\lambda,\ r\sin\lambda,\ 0)$, при $t=1$ – через точку $P=(p_1,\ p_2)=(-p_1\sin\lambda - r\cos\lambda,\ p_1\cos\lambda - r\sin\lambda,\ p_2)$.

Итак, имеем соотношение между функциями $g_r(p_1,\ p_2,\ \lambda)$ и $R_1^+(\xi, S(\lambda))$:

$$g_r(p_1,\ p_2,\ \lambda)=R_1^+(-p_1\sin\lambda-2r\cos\lambda,\ p_1\cos\lambda-2r\sin\lambda,\ p_2,\ S(\lambda)),$$
$$S(\lambda)=(s_1(\lambda), s_2(\lambda), s_3(\lambda))=(r\cos\lambda,\ r\sin\lambda,\ 0). \tag{3}$$

Наряду с обозначением $g_r(p_1,\ p_2,\ \lambda)$, будем использовать обозначения $g_r(p_1,\ p_2, S(\lambda))$, $g_r(p_1,\ p_2, S)$ и $g_r(P, S)$. Здесь $S(\lambda)$ – точка на траектории источника, соответствующая параметру λ, а $P=(p_1,\ p_2)$. Функция $g_r(p_1,\ p_2,\ \lambda)$ выражена через функцию $R_1^+(\xi, S(\lambda))=g^+(\xi,\lambda)$.

Формула обращения лучевого преобразования основана на функции $g^+(\xi,\lambda)=R_1^+(\xi, S(\lambda))$. Для того чтобы перейти к функции $g_r(p_1,\ p_2,\ \lambda)$, регистрируемой в случае плоского детектора, нужно выразить $g^+(\xi,\lambda)$, используя $g_r(p_1,\ p_2,\ \lambda)$.

Для дальнейшего потребуются координаты $(p_1,\ p_2)$ (в системе координат плоскости регистрации) точки пересечения плоскости регистрации данных с лучом $(S+t\xi)=(s_1+t\xi_1,\ s_2+t\xi_2,\ s_3+t\xi_3)$.

Учитывая, что уравнение плоскости регистрации имеет вид $s_1x+s_2y+s_3z=-|S|^2$, получаем

$$t(s_1\xi_1+s_2\xi_2+s_3\xi_3)=-2|S|^2.$$

Если $s_1\xi_1+s_2\xi_2+s_3\xi_3\ge 0$, то соответствующий луч не пересекается с плоскостью регистрации при неотрицательных t, в противном случае

$$t=-2|S|^2/(s_1\xi_1+s_2\xi_2+s_3\xi_3)=-2|S|^2/\langle S,\ \xi\rangle.$$

Для трехмерных координат точки пересечения получаем

$$x(S,\xi)=s_1-\xi_1 2|S|^2/\langle S,\xi\rangle,\qquad y(S,\xi)=s_2-\xi_2 2|S|^2/\langle S,\xi\rangle,$$
$$z(S,\xi)=s_3-\xi_3 2|S|^2/\langle S,\xi\rangle.$$

Здесь $\langle S,\xi\rangle$ – скалярное произведение векторов S и ξ. Если источник лежит в плоскости $z=0$, то $s=0$ и $z(S,\xi)=-\xi_3 2|S|^2/\langle S,\xi\rangle=p_2(S,\xi)$.

Уравнение плоскости регистрации в этом случае имеет вид $s_1x+s_2y=-|S|^2$. Отсюда следует, что при $|S|\ne 0$ координаты точки пересечения $x(S,\xi)$ и $y(S,\xi)$ не могут быть равны нулю одновременно.

Так как начало оси p_1 есть точка $(-s_1,\ -s_2)$, а вектор $(-s_2/|S|,\ s_1/|S|)$ единичный, то координату $p_1(S,\xi)$ можно найти из условия минимума расстояния точки $(x(S,\xi),\ y(S,\xi))$ от вектора вида $(-s_1-(s_2/|S|)p_1,\ -s_2+(s_1/|S|)p_1)$. Приравнивая нулю производную по p_1 от выражения $(x-(-s_1-(s_2/|S|)p_1))^2+(y-(-s_2+(s_1/|S|)p_1))^2$, получаем

$$p_1(S,\xi)=[-s_2(s_1-\xi_1 2|S|^2/\langle S,\xi\rangle)+s_1(s_2-\xi_2 2|S|^2/\langle S,\xi\rangle)]/|S|=$$
$$=2|S|(s_2\xi_1-s_1\xi_2)/\langle S,\xi\rangle=2|S|(s_2\xi_1-s_1\xi_2)/(s_1\xi_1+s_2\xi_2),$$

$$p_2(S,\xi) = -\xi_3 2|S|^2 / \langle S,\xi\rangle.$$

Теперь мы можем выразить $R_1^+(\xi, S(\lambda))$, используя $g_r(p_1, p_2, \lambda)$:

$$R_1^+(\xi, S(\lambda)) = g^+(\xi,\lambda) = -2|S(\lambda)|^2 / \langle S(\lambda),\xi\rangle \times$$

$$\times g_r(2|S(\lambda)|(s_2(\lambda)\xi_1 - s_1(\lambda)\xi_2)/\langle S(\lambda),\xi\rangle, -2|S(\lambda)|^2\xi_3 / \langle S(\lambda),\xi\rangle, \lambda),$$

$$\text{если } \langle S,\xi\rangle < 0, \text{ и } R_1^+(\xi, S(\lambda)) = 0, \text{ если } \langle S,\xi\rangle \geq 0. \quad (4)$$

Формула обращения, основанная на функции $g^+(\xi,\lambda)$, имеет вид [2, 3]:

$$f(x) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \frac{1}{\langle \gamma'(\lambda), \beta\rangle} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left[\int_{S(\beta)} L(\beta, D) g^+(\xi,\lambda) \Omega(\xi) \right] d\theta d\varphi. \quad (5)$$

Здесь $S(\beta)$ – окружность, являющаяся пересечением единичной сферы и плоскости $P(\beta)$. Плоскость $P(\beta)$ проходит через начало координат и ортогональна вектору β. Символ $\Omega(\xi)$ соответствует интегрированию по окружности. Оператор $L(\beta, D)$ означает дифференцирование функции $g^+(\xi, \lambda)$ в направлении вектора β:

$$L(\beta, D) g^+(\xi,\lambda) = \beta_1 \frac{\partial}{\partial\xi_1} g^+(\xi,\lambda) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial\xi_2} g^+(\xi,\lambda) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial\xi_3} g^+(\xi,\lambda),$$

при этом λ, зависящее от β и x, остается фиксированным. Здесь $\beta = \beta(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cdot \cos\varphi, \cos\theta \cdot \sin\varphi, \sin\theta)$ и $\langle\beta, x\rangle = \langle\beta, \gamma(\lambda)\rangle$, $\langle\beta, \gamma'(\lambda)\rangle \neq 0$. Предполагается, что для исследуемой точки x и любых θ и φ такое λ существует (выполняются условия Кириллова – Туя).

Перейдем теперь к формуле обращения, основанной на функции $g_r(P,\lambda) = g_r(P, S(\lambda)) = g_r(P, S)$. Для этого, в частности, дифференцирование в трехмерном пространстве $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ функции $R_1^+(\xi, S(\lambda))$ нужно заменить на дифференцирование функции двух переменных $g_r(p_1, p_2, S(\lambda))$ в плоскости регистрации (λ предполагается фиксированным). Такая замена возможна в силу однородности функции $R_1^+(\xi, S(\lambda))$ по переменным (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Соотношение между функциями $R_1^+(\xi, S(\lambda)) = g^+(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \lambda)$ и $g_r(p_1, p_2, \lambda) = g_r(P, \lambda)$ удобно представить в виде

$$R_1^+(\xi, S(\lambda)) = C(\xi, S(\lambda)) g_r(P(\xi), S(\lambda)) =$$

$$= C(\xi, S(\lambda)) g_r(p_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, S(\lambda)), p_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, S(\lambda), S(\lambda))).$$

Отметим, что если точка $S(\lambda) + \xi$ принадлежит плоскости регистрации, то множитель $C(\xi, \lambda)$ равен единице. Дифференцируя произведение функций, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i} R_1^+(\xi, S) = g_r(p_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, S(\lambda)), p_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, S(\lambda), S(\lambda))) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \xi_i} C(\xi, S(\lambda)) + C(\xi, S(\lambda)) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \xi_i} g_r(p_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, S(\lambda)), p_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, S(\lambda), S(\lambda))).$$

Дифференцируя суперпозицию функций, находим

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} g_r(p_1(\xi, S), p_2(\xi, S)) = \frac{\partial}{\partial p_1} g_r(p_1(\xi), p_2(\xi), S) \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \xi_i} p_1(\xi, S) + \frac{\partial}{\partial p_2} g_r(p_1(\xi), p_2(\xi), S) \frac{\partial}{\partial \xi_i} p_2(\xi, S).$$

Учитывая, что

$$p_1(\xi, S) = 2|S| \frac{s_2\xi_1 - s_1\xi_2}{s_1\xi_1 + s_2\xi_2}, \qquad p_2(\xi, S) = -2|S|^2 \frac{\xi_3}{s_1\xi_1 + s_2\xi_2},$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} p_1(\xi, S) = 2|S|^3 \xi_2 / \langle S, \xi \rangle^2, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_2} p_1(\xi, S) = -2|S|^3 \xi_1 / \langle S, \xi \rangle^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} p_1(\xi, S) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_1} p_2(\xi, S) = 2|S|^2 s_1 \xi_3 / \langle S, \xi \rangle^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} p_2(\xi, S) = 2|S|^2 s_2 \xi_3 / \langle S, \xi \rangle^2, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi_3} p_2(\xi, S) = -2|S|^2 / \langle S, \xi \rangle.$$

Перейдем теперь к оператору дифференцирования функции $g^+(\xi, \lambda) = R_1^+(\xi, S(\lambda))$ в направлении $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$:

$$\mathcal{I}(\beta, D) R_1^+(\xi, S) = \beta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} R_1^+(\xi, S) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} R_1^+(\xi, S) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^+(\xi, S) =$$

$$= (2|S|^2 \langle S, \beta \rangle / \langle S, \xi \rangle^2) g_r(p_1(\xi), p_2(\xi), S) - (2|S|^2 / \langle S(\lambda), \xi \rangle) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial p_1} g_r(p_1(\xi), p_2(\xi), S) 2|S|^3 \frac{\beta_1\xi_2 - \beta_2\xi_1}{(s_1\xi_1 + s_2\xi_2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial p_2} g_r(p_1(\xi), p_2(\xi), S) 2|S|^2 \left(\xi_3 \frac{\beta_1 s_1 + \beta_2 s_2}{(s_1\xi_1 + s_2\xi_2)^2} - \frac{\beta_3}{(s_1\xi_1 + s_2\xi_2)} \right) \right). \qquad (6)$$

Подставим теперь оператор дифференцирования (6) в формулу обращения (5). Вектор β в формуле (5) задается в виде

$$\beta = \beta(\theta, \varphi) = (\beta_1(\theta, \varphi), \beta_2(\theta, \varphi), \beta_3(\theta, \varphi)),$$

$$\beta_1(\theta, \varphi) = \cos\theta \cdot \cos\varphi, \qquad \beta_2(\theta, \varphi) = \cos\theta \cdot \sin\varphi, \qquad \beta_3(\theta, \varphi) = \sin\theta.$$

Для того чтобы в формуле обращения интегрировать по окружности $S(\beta)$, удобно векторы ξ, лежащие на этой окружности, выразить в параметрическом виде. Это можно сделать следующим образом:

$$\xi_1(\beta,\omega)=\sin\theta\cdot\cos\varphi\cdot\cos(\alpha-\omega)-\sin\varphi\cdot\sin(\alpha-\omega),$$

$$\xi_2(\beta,\omega)=\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos(\alpha-\omega)+\cos\varphi\cdot\sin(\alpha-\omega),$$

$$\xi_3(\beta,\omega)=-\cos\theta\cdot\cos(\alpha-\omega).$$

Здесь α – некоторое фиксированное число, определяющее начало обхода окружности.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при любых α,β,ω вектор $\xi(\beta,\alpha,\omega)$ имеет единичную длину и ортогонален вектору $\beta=\beta(\theta,\varphi)=$ $=(\beta_1(\theta,\varphi),\ \beta_2(\theta,\varphi),\ \beta_3(\theta,\varphi))$, $\beta_1(\theta,\varphi)=\cos\theta\cdot\cos\varphi$, $\beta_2(\theta,\varphi)=\cos\theta\cdot\sin\varphi$, $\beta_3(\theta,\varphi)=\sin\theta$. Если ω пробегает интервал $[0,2\pi]$, то вектор $\xi(\beta,\alpha,\omega)$ пробегает соответствующую окружность.

Выберем величину α так, чтобы упростить выражение для скалярного произведения $\langle\xi(\beta,\alpha,\omega),S\rangle$. У вектора $\xi(\beta,\alpha,\omega)$ будем сохранять только переменную ω, по которой нужно будет интегрировать на первом шаге, в более полной записи следовало бы писать $\xi(\theta,\varphi,\alpha,\omega)$. Здесь переменные θ,φ задают вектор β, α может быть взято произвольно.

Рассматривается случай, когда источник движется по окружности, лежащей в плоскости $z=0$, поэтому текущие координаты источника можно представить в виде $s_1=|S|\cos\lambda$, $s_2=|S|\sin\lambda$, $s_3=0$.

Учитывая такое представление, получаем

$$s_1\xi_1(\omega)+s_2\xi_2(\omega)=|S|(\sin\theta\cdot\cos(\lambda-\varphi)\cdot\cos(\alpha-\omega)+\sin(\lambda-\varphi)\cdot\sin(\alpha-\omega)).$$

Рассматривая пару чисел $\sin\theta\cdot\cos(\lambda-\varphi)$ и $\sin(\lambda-\varphi)$ как точку на плоскости, можно ввести обозначения

$$\sin\theta\cdot\cos(\lambda-\varphi)=C_1(\theta,\varphi,\lambda)\cos\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda),$$

$$\sin(\lambda-\varphi)=C_1(\theta,\varphi,\lambda)\sin\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda).$$

Здесь $C_1(\theta,\varphi,\lambda)$ и $\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda)$ – модуль и угол радиуса-вектора, соответствующего этой точке.

Для скалярного произведения $\langle S,\xi\rangle$ получаем

$$s_1\xi_1(\omega)+s_2\xi_2(\omega)=|S|C_1(\theta,\varphi,\lambda)\cos(\alpha_1-\alpha+\omega).$$

Для упрощения зависимости от ω можно выбрать $\alpha=\alpha_1$, однако для того чтобы сделать область интегрирования состоящей из одного интервала, лучше выбрать $\alpha=\alpha_1-\pi/2$. Тогда

$$\langle S(\lambda),\xi(\theta,\varphi,\omega)\rangle=s_1\xi_1(\omega)+s_2\xi_2(\omega)=-|S|C_1(\theta,\varphi,\lambda)\sin\omega.$$

Область D в этом случае совпадает с интервалом $[0,\pi]$.

Выразим теперь через θ, φ, $|S|$, λ, ω коэффициенты перед функцией g_r и ее производными по p_1 и p_2 в операторе дифференцирования L. Предварительно выразим через указанные переменные используемые скалярные произведения:

$$\langle S(\lambda), \xi(\theta, \varphi, \omega)\rangle = s_1(\lambda)\xi_1(\omega) + s_2(\lambda)\xi_2(\omega) = -|S| C_1(\theta, \varphi, \lambda)\sin\omega,$$

$$\langle S(\lambda), \beta(\theta, \varphi)\rangle = s_1(\lambda)\beta_1(\theta, \varphi) + s_2(\lambda)\beta_2(\theta, \varphi) = |S|\cos\theta \cdot \cos(\varphi - \lambda),$$

$$\beta_1(\theta, \varphi)\xi_2(\omega) - \beta_2(\theta, \varphi)\xi_1(\omega) = \cos\theta \cdot \sin(\alpha - \omega) = -\cos\theta \cdot \cos(\alpha_1 - \omega).$$

Коэффициент при $g_r(p_1, p_2)$

$$E_0(\theta, \varphi, |S|, \lambda, \omega) = 2|S|\cos\theta \cdot \cos(\varphi - \lambda) / (C_1(\theta, \varphi, \lambda)\sin\omega)^2,$$

коэффициент при производной $g_r(p_1, p_2)$ по p_1

$$E_1(\theta, \varphi, |S|, \lambda, \omega) = -4|S|^2 \cos\theta \cdot \cos(\alpha_1 - \omega) / (C_1(\theta, \varphi, \lambda)\sin\omega)^3,$$

коэффициент при производной $g_r(p_1, p_2)$ по p_2

$$E_2(\theta, \varphi, |S|, \lambda, \omega) = 4|S|^2 [-(\cos\theta)^2 \cdot \cos(\varphi - \lambda) \times$$

$$\times \sin(\alpha_1 - \omega) / (C_1(\theta, \varphi, \lambda)\sin\omega)^3 + \sin\theta / (C_1(\theta, \varphi, \lambda)\sin\omega)^2].$$

Для интеграла $I(X, \theta, \varphi)$ получаем выражение

$$I(X, \theta, \varphi) = I(\theta, \varphi, \lambda(X, \theta, \varphi)) = I(\theta, \varphi, \lambda) =$$

$$= \frac{2|S|\cos\theta \cdot \cos(\varphi - \lambda)}{(C_1(\theta, \varphi, \lambda))^2} \int_0^\pi g_r(p_1(\xi(\omega)), p_2(\xi(\omega)), S(X, \theta, \varphi)) \frac{1}{(\sin\omega)^2} d\omega -$$

$$- \frac{4|S|^2 \cos\theta}{C_1(\theta, \varphi, \lambda)^3} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial p_1} g_r(p_1(\xi(\omega)), p_2(\xi(\omega)), S(X, \theta, \varphi)) \frac{\cos(\alpha_1 - \omega)}{(\sin\omega)^3} d\omega -$$

$$- \frac{4|S|^2 (\cos\theta)^2}{C_1(\theta, \varphi, \lambda)^3} \cos(\lambda - \varphi) \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial p_2} g_r(p_1(\xi(\omega)), p_2(\xi(\omega)), S(X, \theta, \varphi)) \times$$

$$\times \frac{\sin(\alpha_1 - \omega)}{(\sin\omega)^3} d\omega + \frac{4\sin\theta |S|^2}{(C_1(\theta, \varphi, \lambda))^2} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial p_2} g_r(p_1(\xi(\omega)), p_2(\xi(\omega)), S(X, \theta, \varphi)) \frac{1}{(\sin\omega)^2} d\omega. \quad (7)$$

После преобразований получаем

$$I(X, \theta, \varphi) =$$

$$= \frac{2|S|\cos\theta \cdot \cos(\varphi - \lambda)}{(C_1(\theta, \varphi, \lambda))^2} \int_0^\pi g_r(p_1(\xi(\omega)), p_2(\xi(\omega)), S(X, \theta, \varphi)) \frac{1}{(\sin\omega)^2} d\omega -$$

$$-\frac{4|S|^2\cos\theta}{C_1(\theta,\varphi,\lambda)^3}\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial p_1}g_r\,\frac{\cos\alpha_1\cdot\cos\omega+\sin\alpha_1\cdot\sin\omega}{(\sin\omega)^3}\,d\omega-$$

$$-\frac{4|S|^2(\cos\theta)^2}{C_1(\theta,\varphi,\lambda)^3}\cos(\varphi-\lambda)\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial p_2}g_r\,\frac{\sin\alpha_1\cdot\cos\omega-\cos\alpha_1\cdot\sin\omega}{(\sin\omega)^3}\,d\omega+$$

$$+\frac{4\sin\theta|S|^2}{C_1(\theta,\varphi,\lambda)^2}\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial p_2}g_r(p_1(\xi(\omega)),\,p_2(\xi(\omega)),\,S(X,\theta,\varphi))\frac{1}{(\sin\omega)^2}\,d\omega.$$

Выразим теперь $p_1(S,\xi)$ и $p_2(S,\xi)$ через $\omega,\theta,\varphi,\lambda$. Для числителя в p_1 получаем

$$s_2\xi_1-s_1\xi_2=|S|(\sin\theta\cdot\sin(\lambda-\varphi)\cdot\cos(\alpha_1-\pi/2-\omega)-$$

$$-\cos(\lambda-\varphi)\cdot\sin(\alpha_1-\pi/2-\omega)).$$

Выше мы рассмотрели пару чисел $(\sin\theta\cdot\cos(\lambda-\varphi),\ \sin(\lambda-\varphi))$ как точку на плоскости и, представив эту точку в тригонометрической форме, ввели обозначения: $\sin\theta\cdot\cos(\lambda-\varphi)=C_1(\theta,\varphi,\lambda)\cos\alpha_1$, $\sin(\lambda-\varphi)=C_1(\theta,\varphi,\lambda)\sin\alpha_1$. Поступая аналогичным образом с парой чисел $(\sin\theta\cdot\sin(\lambda-\varphi),-\cos(\lambda-\varphi))$, введем следующие обозначения:

$$\sin\theta\cdot\sin(\lambda-\varphi)=C_2(\theta,\varphi,\lambda)\cos\alpha_2,\qquad -\cos(\lambda-\varphi)=C_2(\theta,\varphi,\lambda)\sin\alpha_2.$$

Тогда $s_2\xi_1-s_1\xi_2=|S|C_2(\theta,\varphi,\lambda)\cos(\alpha_2-\alpha_1+\pi/2+\omega)$.

Полагаем $\delta(\theta,\varphi,\lambda)=\alpha_2-\alpha_1+\pi/2$. Тогда для p_1 получаем

$$p_1=-2|S|\frac{C_2(\theta,\varphi,\lambda)}{C_1(\theta,\varphi,\lambda)}\frac{\cos(\omega+\delta(\theta,\varphi,\lambda))}{\sin\omega}=D_1(\theta,\varphi,\lambda)\frac{\cos(\omega+\delta(\theta,\varphi,\lambda))}{\sin\omega}=$$

$$=D_1(\theta,\varphi,\lambda)\cos(\delta(\theta,\varphi,\lambda))\mathrm{ctg}\omega-D_1(\theta,\varphi,\lambda)\sin(\delta(\theta,\varphi,\lambda))=$$

$$=K_1(\theta,\varphi,\lambda)\mathrm{ctg}\omega+L_1(\theta,\varphi,\lambda),$$

для p_2 получаем

$$p_2=-2|S|\frac{\cos(\theta)}{C_1(\theta,\varphi,\lambda)}\frac{\sin(\alpha_1-\omega)}{\sin\omega}=D_2(\theta,\varphi,\lambda)\sin(\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda))\mathrm{ctg}\omega-$$

$$-D_2(\theta,\varphi,\lambda)\cos(\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda))=K_2(\theta,\varphi,\lambda)\mathrm{ctg}\omega+L_2(\theta,\varphi,\lambda).$$

Если ω пробегает интервал $(0,\pi)$, то $\mathrm{ctg}\varphi$ пробегает интервал $(\infty,-\infty)$, а точка $(p_1(\mathrm{ctg}\omega),\ p_2(\mathrm{ctg}\omega))$ в плоскости регистрации пробегает прямую, задаваемую уравнениями

$$p_1(\mathrm{ctg}\omega)=K_1(\theta,\varphi,\lambda)\mathrm{ctg}\omega+L_1(\theta,\varphi,\lambda),$$

$$p_2(\mathrm{ctg}\omega)=K_2(\theta,\varphi,\lambda)\mathrm{ctg}\omega+L_2(\theta,\varphi,\lambda).$$

Эта прямая является пересечением плоскости регистрации и плоскости, которая ортогональна вектору β и проходит через точки X и $S(\lambda)$.

Сделаем в интегралах замену переменных $l = -\operatorname{ctg}\omega$, тогда $\frac{d\omega}{\sin^2\omega} = dl$. Для интеграла $I(X, \theta, \varphi)$ получаем

$$I(X,\theta,\varphi) = \frac{2|S|\cos\theta \cdot \cos(\varphi - \lambda)}{(C_1(\theta, \varphi, \lambda))^2} \int_{-\infty}^{\infty} g_r(p_1(l), p_2(l), S(X,\theta,\varphi))dl +$$

$$+\frac{4|S|^2\cos\theta}{C_1(\theta, \varphi, \lambda)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p_1} g_r(p_1(l), p_2(l), S(X,\theta,\varphi))(l\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1)dl +$$

$$+\frac{4|S|^2(\cos\theta)^2}{C_1(\theta, \varphi, \lambda)^3}\cos(\lambda-\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p_2} g_r(p_1(l), p_2(l), S(X,\theta,\varphi))(l\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1)dl +$$

$$+\frac{4\sin\theta|S|^2}{C_1(\theta, \varphi, \lambda)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p_2} g_r(p_1(l), p_2(l), S(X,\theta,\varphi))dl. \quad (8)$$

Формула (8) позволяет при обращении лучевого преобразования перейти от интегрирования по окружности в трехмерном пространстве координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) к интегрированию по прямой в плоскости регистрации (в двумерном пространстве). Как уже отмечалось выше, такой переход возможен в силу однородности функции $g^+(\xi,\lambda) = g^+(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\lambda)$ по переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3 при любом фиксированном λ.

Выразим теперь через $\theta, \varphi, |S|, \lambda, l$ коэффициенты при функции g_r и ее производными по p_1 и p_2 в формуле (8). Коэффициент при $g_r(p_1, p_2)$

$$E_0(\theta, \varphi, |S|, \lambda, l) = \frac{2|S|\cos\theta \cdot \cos(\varphi - \lambda)}{(C_1(\theta, \varphi, \lambda))^2},$$

коэффициент при производной $g_r(p_1, p_2)$ по p_1

$$E_1(\theta, \varphi, |S|, \lambda, l) = \frac{4|S|^2\cos\theta}{C_1(\theta, \varphi, \lambda)^3}(l\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1),$$

коэффициент при производной $g_r(p_1, p_2)$ по p_2

$$E_2(\theta, \varphi, |S|, \lambda, l) = \frac{4|S|^2(\cos\theta)^2}{C_1(\theta, \varphi, \lambda)^3}\cos(\lambda-\varphi)(l\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1) + \frac{4\sin\theta|S|^2}{C_1(\theta, \varphi, \lambda)^2}.$$

Для понимания структуры соответствующих алгоритмов необходимо более подробное изучение коэффициентов $E_0(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)$, $E_1(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)$, $E_2(\theta, \varphi, |S|, \lambda, l)$. Рассмотрим сначала ситуацию, когда источник находится в точке $S=(1,0,0)$, а вектор $\beta=(0,0,1)$. В этом случае $|S|=1, \lambda=0, \theta=\pi/2, \varphi=0$, величина $\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda)$ определяется из условий

$$\sin\theta\cdot\cos(\lambda-\varphi)=1=C_1(\theta,\varphi,\lambda)\cos\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda),$$

$$\sin(\lambda-\varphi)=0=C_1(\theta,\varphi,\lambda)\sin\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda),$$

т. е. $\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda)=0$, $C_1(\theta,\varphi,\lambda)=1$. Таким образом, $E_0(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=0$, $E_1(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=0$, $E_2(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=4=D^2$, где D – расстояние от источника до плоскости регистрации. Таким образом, в рассматриваемом случае дифференцировать в плоскости регистрации необходимо в направлении оси p_2. Отметим, что линия пересечения плоскости регистрации и плоскости $P(S,\beta)(S\in P(S,\beta),\ \beta\perp P(S,\beta))$ совпадает с осью p_1, т. е. дифференцировать следует в направлении, ортогональном указанной линии. Причем операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами, поскольку весовой коэффициент $E_2(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)$ не зависит от l.

Рассмотрим, что происходит с направлением дифференцирования при изменении вектора β. Координаты источника оставим прежними: $(1,0,0)$, т. е. $|S|=1$, $\lambda=0$. Положим $\varphi=\pi/2$, а θ возьмем отличным от $\pi/2$ и нуля, т. е. повернем вектор β, оставляя его параллельным плоскости регистрации. (Если $\theta=0$, то плоскость регистрации не пересекается с плоскостью $P(S,\beta)$.)

Для $\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda)$ имеем выражения

$$\sin\theta\cdot\cos(\lambda-\varphi)=0=C_1(\theta,\varphi,\lambda)\cos\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda),$$

$$\sin(\lambda-\varphi)=-1=C_1(\theta,\varphi,\lambda)\sin\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda),$$

т. е. $\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda)=-\pi/2$, $C_1(\theta,\varphi,\lambda)=1$.

Таким образом,

$$E_0(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=0,\ \ E_1(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=D^2\cos\theta,\ \ E_2(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=D^2\sin\theta,$$

где $D=2$ – расстояние от источника до плоскости регистрации.

Запишем теперь уравнение линии пересечения плоскости регистрации и плоскости $P(S,\beta)$ в координатах p_1 и p_2 плоскости регистрации. Для нахождения коэффициентов в уравнении прямой нам понадобится величина α_2, определяемая из условий

$$\sin\theta\cdot\sin(\lambda-\varphi)=-\sin\theta=C_2(\theta,\varphi,\lambda)\cos\alpha_2,$$

$$-\cos(\lambda-\varphi)=0=C_2(\theta,\varphi,\lambda)\sin\alpha_2,$$

т. е. $\alpha_2=\pi$, $C_2=\sin\theta$, $\delta(\theta,\varphi,\lambda)=\alpha_2-\alpha_1+\pi/2=2\pi$. Следовательно, $p_1(l)=2l\sin\theta$, $p_2(l)=-2l\cos\theta$ и $p_1\cos\theta+p_2\sin\theta=0$. Вектор нормали к рассматриваемой прямой имеет вид $(\cos\theta,\sin\theta)$. Сопоставляя это выражение с выражениями $E_1(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=D^2\cos\theta$, $E_2(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=D^2\sin\theta$, видим, что в том случае, когда вектор β параллелен плоскости регистрации, дифференцировать в ней необходимо в направлении нормали к прямой пересечения плоскости регистрации и плоскости $P(S,\beta)$. (Источник находится в точке $(1,0,0)$.)

Ситуация существенно меняется, если вектор β не параллелен плоскости регистрации. Пусть по-прежнему источник находится в точке $(1,0,0)$, т. е.

$\lambda=0, S=1$, и $\varphi=0$, $|\theta|\neq\pi/2$, $|\theta|\neq 0$. Это означает, что вектор β наклонен в сторону плоскости регистрации, но не ортогонален ей. Для $\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda)$ имеем

$$\sin\theta\cdot\cos(\lambda-\varphi)=\sin\theta=C_1(\theta,\varphi,\lambda)\cos\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda),$$

$$\sin(\lambda-\varphi)=0=C_1(\theta,\varphi,\lambda)\sin\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda),$$

т. е. $\alpha_1(\theta,\varphi,\lambda)=0, C_1(\theta,\varphi,\lambda)=\sin\theta$. Величина α_2 определяется из условий

$$\sin\theta\cdot\sin(\lambda-\varphi)=0=C_2(\theta,\varphi,\lambda)\cos\alpha_2,$$

$$-\cos(\lambda-\varphi)=-1=C_2(\theta,\varphi,\lambda)\sin\alpha_2,$$

т. е. $\alpha_2=(3/2)\pi, C_2=1, \delta(\theta,\varphi,\lambda)=\alpha_2-\alpha_1+\pi/2=2\pi$. Следовательно,

$$E_0(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=2\mathrm{ctg}\theta/\sin\theta,\quad E_1(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=(4\cos\theta/(\sin\theta)^3)l,$$
$$E_2(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=4(\cos\theta)^2/(\sin\theta)^3+4/\sin\theta.$$

Коэффициент $E_0(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)$ теперь отличен от нуля, и коэффициент $E_1(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)$ зависит от l, т. е. направление дифференцирования в плоскости регистрации не является постоянным и ортогональным линии пересечения плоскости регистрации и плоскости $P(S,\beta)$.

Рассмотрена ситуация, когда источник находится в точке (1, 0, 0). Аналогично можно показать, что ситуация не меняется при движении источника по единичной окружности в плоскости $z=0$, т. е. если вектор β параллелен плоскости регистрации, то коэффициент $E_0(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)=0$ и дифференцировать нужно в направлении, ортогональном линии пересечения соответствующих плоскостей. Если же вектор β не параллелен плоскости регистрации, то коэффициент $E_0(\theta,\varphi,|S|,\lambda,l)$ отличен от нуля и направление дифференцирования не является постоянным. Следует отметить, что если размер объекта много меньше размеров окружности, по которой движется источник, то изменениями в направлении дифференцирования можно пренебречь.

На рис. 3–6 показаны направления дифференцирования для различных значений вектора β. На рис. 3 вектор β перпендикулярен плоскости $z=0$ ($\beta=(0,0,1)$). На рис. 4 вектор β находится в плоскости, параллельной плоскости регистрации ($\beta=(0;\ 0{,}7071;\ 0{,}7071)$). На рис. 5 вектор β наклонен к плоскости регистрации на 45° ($\beta=(0{,}7071;\ 0;\ 0{,}7071)$). На рис. 6 показано общее положение вектора β ($\beta=(0{,}7504;\ 0{,}5655;\ 0{,}3420)$).

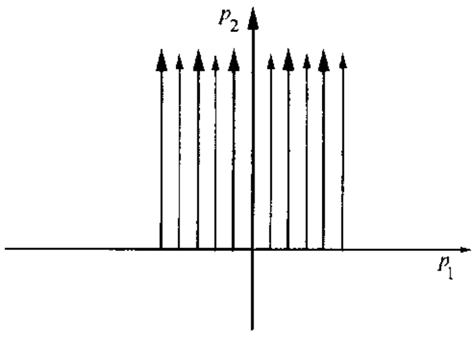

Рис. 3

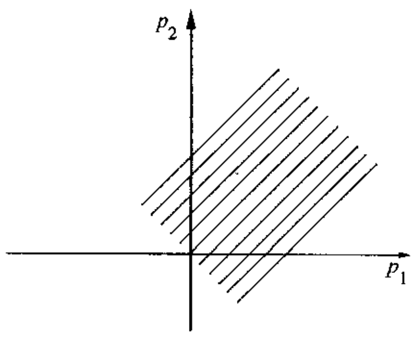

Рис. 4

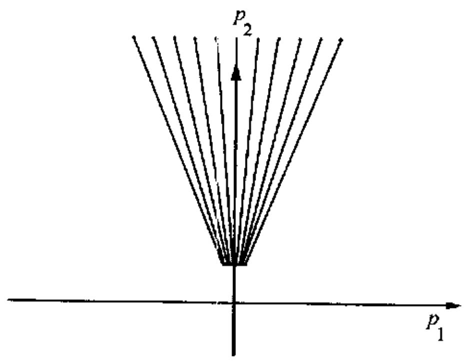

Рис. 5

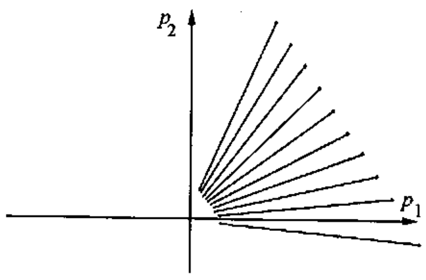

Рис. 6

Рассмотрено движение источника по окружности, лежащей в плоскости $z = 0$. Для использования формулы Кириллова – Туя к траектории источника следует добавить еще одну окружность. Соответствующие формулы можно получить тем же способом, который был изложен выше.

Итак, формула обращения лучевого преобразования для траектории источника, состоящей из двух окружностей, лежащих в плоскостях $z = 0$ и $y = 0$, приобретает вид:

$$f(x) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \frac{1}{\langle \gamma'(\lambda), \beta \rangle} \frac{\partial}{\partial \lambda} [I(X, \theta, \varphi, \lambda)] d\theta d\varphi. \tag{9}$$

Здесь $\beta = \beta(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cdot \cos\varphi, \cos\theta \cdot \sin\varphi, \sin\theta)$, $\gamma(\lambda)$ – траектория источника. В формуле (9) параметр $\lambda = \lambda(\theta, \varphi) = \lambda(x, \beta)$ находится из условий: скалярное произведение $\langle \beta, x \rangle = \langle \beta, \gamma(\lambda) \rangle$ и $\langle \beta, \gamma'(\lambda) \rangle \neq 0$. Интеграл $I(X, \theta, \varphi, \lambda)$ вычисляется по формуле (8), если точка траектории, соответствующая параметру λ, лежит в плоскости $z = 0$, и по соответствующей формуле, если точка лежит в плоскости $y = 0$.

Характерным свойством полученной формулы обращения является то, что интегрирование в плоскости регистрации ведется по прямым линиям. Структура формул обращения, близкая к полученной, содержится в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tuy H. K.** An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM J. Appl. Math. 1983. **43**, N 3. P. 546.
2. **Денисюк А. С.** Исследование по интегральной геометрии в вещественном пространстве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1991.
3. **Трофимов О. Е.** К задаче восстановления функции по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Методы решения условно-корректных задач. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1991. С. 80.
4. **Grangeat P.** Analyse d'une systéme d'imagerie 3D par reconstruction á partir de radiographies X en géométrie coniqué: These de doctorat. Grenoble, 1987.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: trofimov@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
2 декабря 1998 г.