РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 3 2000

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.2.08

В. М. Ефимов, А. Н. Касперович, А. Л. Резник

(Новосибирск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ПРИ ЕГО НЕРАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ*

Рассматривается восстановление сигнала по конечному числу отсчетов, следующих неравномерно. Сигнал (или его спектр) описывается рядом Фурье с конечным числом членов, совпадающим с числом отсчетов. Получены соотношения для дисперсии ошибки восстановления при некоррелированном амплитудном шуме. Предлагается процедура перехода от неравномерной дискретизации к равномерной.

В рамках данной работы считается, что сигнал полностью описывается соотношением

$$f(t)=\sum_{l=0}^{N-1} f(l\Delta)w(t-l\Delta), \tag{1}$$

где $\{f(l\Delta)\}, l=\overline{0, N-1},$ – совокупность отсчетов сигнала при его равномерной дискретизации с интервалом Δ между моментами измерений; $w(t-l\Delta)$ – стационарная весовая функция. Решение задачи восстановления сигнала при его неравномерной дискретизации, когда абсциссы отсчетов образуют совокупность моментов времени $\{t_k\}$, $k=\overline{0, N-1}$, так что среднее расстояние между ними равно Δ, сводится к нахождению нестационарных весовых функций $w_k(t-t_k)$, при любом t отвечающих условию

$$\sum_{l=0}^{N-1} f(l\Delta)w(t-l\Delta)=\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)w_k(t-t_k). \tag{2}$$

* Работа выполнена при содействии Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00610).

Так как

$$f(t_k)=\sum_{l=0}^{N-1} f(l\Delta)w(t_k-l\Delta), \tag{3}$$

то поиск весовых функций в соответствии с условием (2) эквивалентен решению системы линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{N-1} w(t_k-l\Delta)w_k(t-t_k)=w(t-l\Delta), \qquad l=\overline{0,N-1}. \tag{4}$$

Ниже рассматриваются два вида весовой функции, когда

$$w(t-l\Delta)=\frac{1}{2}\left(1-(-1)^N+(1+(-1)^N)\cos\frac{\pi}{N\Delta}(t-l\Delta)\right)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-l\Delta)}{N\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-l\Delta)} \tag{5}$$

и

$$w(t-l\Delta)=\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-l\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-l\Delta)}. \tag{6}$$

Весовая функция (5) является дискретным аналогом функции Дирихле и непосредственно вытекает из построения ряда Фурье по последовательности отсчетов. Для четных значений числа отсчетов N коэффициенты разложения $a_{N/2}$ и $b_{N/2}$ берутся с весом 1/2. Весовая функция (5) соответствует ситуации, когда сигнал описывается тригонометрическим полиномом, а весовая функция (6) – когда тригонометрическим полиномом описывается спектр сигнала в полосе частот $|\omega|<\pi/\Delta$.

При нахождении весовых функций $w_k(t-t_k)$ удается избежать непосредственного обращения матрицы системы уравнений (4), если использовать соотношения из [1] для описания сигналов с ограниченным спектром при их периодической неравномерной дискретизации и интерполяции по конечному числу отсчетов при неравномерной дискретизации.

Периодический сигнал. Весовая функция при равномерной дискретизации описывается соотношением (5). В [1] показано, что в случае, когда спектр сигнала ограничен по частоте ($|\omega|\le\pi/\Delta$), а моменты дискретизации образуют периодическую последовательность $t_{km}=t_k+mN\Delta$, $k=\overline{0,N-1}$, $m=\overline{-\infty,\infty}$,

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-l\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-l\Delta)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k+mN\Delta)w_k(t-t_k-mN\Delta), \tag{7}$$

где весовая функция

$$w_k(t-t_k-mN\Delta)=\frac{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-t_k-mN\Delta)}{\frac{\pi}{N\Delta}(t-t_k-mN\Delta)}\prod_{\substack{r=0\\ r\ne k}}^{N-1}\frac{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t-t_r-mN\Delta)}{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t_k-t_r)}. \tag{8}$$

Положим, что сигнал $f(t)$ является периодическим с тем же периодом, что и последовательность отсчетов:

$$f(t_k + mN\Delta) = f(t_k), \qquad m = \overline{-\infty, \infty}. \tag{9}$$

В соответствии с (9)

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) w_{k\Sigma}(t - t_k), \tag{10}$$

где

$$w_{k\Sigma}(t - t_k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_k(t - t_k - mN\Delta). \tag{11}$$

Подставляя (8) в (11) и группируя члены с одинаковым модулем индекса m, после очевидных преобразований получим

$$w_{k\Sigma}(t - t_k) = \sin\frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k)\left(\prod_{\substack{r=0\\r\neq k}}^{N-1} \frac{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t - t_r)}{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_r)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k)} + \frac{1}{\frac{\pi}{N\Delta}}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{mN}\frac{2(t - t_k)}{(t - t_k)^2 - (mN\Delta)^2}\right). \tag{12}$$

Используя далее разложение на простейшие дроби $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k)$ для четного N и $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k)$ для нечетного N [2], получим окончательное выражение для весовой функции:

$$w_{k\Sigma}(t - t_k) = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^N + (1 + (-1)^N)\cos\frac{\pi}{N\Delta}(t - t_k)\right)\prod_{\substack{r=0\\r\neq k}}^{N-1}\frac{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t - t_r)}{\sin\frac{\pi}{N\Delta}(t_k - t_r)}. \tag{13}$$

Соотношение (10) с весовой функцией (13) описывает сигнал, разложенный в ряд Фурье на конечном промежутке $N\Delta$, число гармоник в котором совпадает с числом отсчетов*.

Использование разложения с весовой функцией (13) менее удобно, чем разложения (1) с весовой функцией (5). Поэтому целесообразно определить, используя (13), значения отсчетов, входящие в (1):

$$f(l\Delta) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) w_{k\Sigma}(l\Delta - t_k), \tag{14}$$

* Соотношение (5) является частным случаем соотношения (13) при $t_k = k\Delta, k = \overline{0, N-1}$, и может быть получено по аналогии с (13) непосредственно из левой части уравнения (7). Отметим, что вывод соотношения (13) для нечетного N путем непосредственного решения системы уравнений (4) изложен в [3].

а затем применять соотношение (5). При наличии шумов $\varphi(t_k)$ также целесообразно использовать (5), так как при переходе к разложению (1) с весовой функцией (5) дисперсия шума остается неизменной:

$$\langle\varepsilon\rangle^2 = \frac{\sigma_\varphi^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} w_{r\Sigma}^2(k\Delta - t_r) \geq \sigma_\varphi^2. \tag{15}$$

Дисперсия шума восстановления сигнала существенным образом зависит от интервалов между соседними отсчетами и определяется их наименьшими значениями. Как следует из (13) и (15), для некоррелированного шума она неограниченно возрастает при сближении отсчетов. Как отмечено в [4], дисперсия ошибки минимальна при равномерной дискретизации и для коррелированного шума ее значение зависит от дифференциальных свойств шума (скорости убывания спектра мощности шума).

Сигнал, спектр которого описывается конечным числом гармоник в полосе частот $|\omega| < \pi/\Delta$. Весовая функция описывается соотношением (6). Если спектр сигнала лежит в полосе частот $|\omega| < \pi/\Delta$ и описывается рядом Фурье, число гармоник которого равно N, то, как следует из [1], при неравномерной дискретизации этого сигнала

$$\sum_{l=0}^{N-1} f(l\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-l\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-l\Delta)} = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) w_{Nk}(t), \tag{16}$$

где

$$w_{Nk}(t) = \frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}t}{\sin\frac{\pi}{\Delta}t_k}\left(\prod_{\substack{r=0\\r\neq k}}^{N-1}\frac{(t-t_r)}{(t_k-t_r)}\right)\left(\prod_{r=0}^{N-1}\frac{(t_k-r\Delta)}{(t-r\Delta)}\right). \tag{17}$$

Относительно использования разложения с весовой функцией (17) справедливы те же соображения, что и относительно формулы (13). Поэтому целесообразно предварительно определить базовые величины:

$$f(l\Delta) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) w_{Nk}(l\Delta), \tag{18}$$

где

$$w_{Nk}(l\Delta) = \frac{\pi}{\Delta}\frac{(-1)^l}{\sin\frac{\pi}{\Delta}t_k}\left(\prod_{\substack{r=0\\r\neq k\\l\neq k}}^{N-1}\frac{(l\Delta-t_r)}{(t_k-t_r)}\right)\frac{\prod_{r=0}^{N-1}(t_k-r\Delta)}{\prod_{\substack{r=0\\r\neq l}}^{N-1}(l\Delta-r\Delta)}. \tag{19}$$

При этом если шум не коррелирован, то дисперсия ошибки останется неизменной:

$$\langle\varepsilon\rangle^2 = \frac{1}{N\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2(t)dt = \frac{\sigma_\varphi^2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} w_{Nr}^2(k\Delta) \geq \sigma_\varphi^2. \tag{20}$$

Дисперсия ошибки также неограниченно возрастает, если абсциссы отсчетов сближаются. Это следует из (19).

Неравномерная передискретизация (избыточность). Если число неравномерных отсчетов M превышает число степеней свободы сигнала N (т. е. $p=(M/N)>1$), так что среднее расстояние между отсчетами $\Delta=\frac{\Sigma_{\Delta k}}{N}<\frac{\pi}{\omega_{\max}}$, то процедура восстановления сигнала изменяется. Избыточность целесообразно использовать для определения отсчетов, входящих в формулу (1), по методу наименьших квадратов, т. е. находить величины $\{f(k\Delta)\}$ из условия

$$\min_{\{f(k\Delta)\}}\sum_{m=0}^{M-1}\left(f^*(t_m)-\sum_{k=0}^{N-1}f(k\Delta)w(t_m-k\Delta)\right)^2, \tag{21}$$

где $f^*(t_m)=f(t_m)+\varphi(t_m)$; $\varphi(t_m)$ – аддитивный амплитудный шум. В матричном виде решение этой задачи [5] представляется таким образом:

$$\mathbf{f}_\Delta^T=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{f}^*, \tag{22}$$

где $\mathbf{f}_\Delta=(f(0), f(\Delta), f(2\Delta), \ldots, f((N-1)\Delta))$; $\mathbf{f}^*=(f(t_0), f(t_1), f(t_2), \ldots$ $\ldots, f(t_{M-1}))$; $A=(a_{ij})$; $a_{ij}=w(t_j-i\Delta)$, $i=\overline{0, N-1}$, $j=\overline{0, M-1}$; T – символ транспонирования. При этом дисперсия ошибки от некоррелированного шума

$$\langle\varepsilon^2\rangle=\frac{\sigma_\varphi^2}{N}\mathrm{Sp}(D)\geq\frac{\sigma_\varphi^2}{p}, \tag{23}$$

где $\mathrm{Sp}(D)=\sum_{i=0}^{N-1}d_{ii}$ – след матрицы $D=C^TC$, а $C=(A^TA)^{-1}A^T$.

При современном состоянии вычислительной техники и программного обеспечения эта задача достаточно просто решается даже при весьма больших размерностях входящих в соотношение (22) матриц. Тем не менее в ряде приложений можно успешно применять более простые методы, близкие к оптимальному. Выше отмечалось, что минимальная дисперсия ошибки восстановления сигнала при некоррелированном шуме и отсутствии избыточности ($M=N$) совпадает с дисперсией шума. И это происходит при равномерной дискретизации. Если коэффициент передискретизации $p=M/N$, то очевидно, что дисперсия ошибки восстановления $\langle\varepsilon^2\rangle\geq\sigma_\varphi^2/p$.

При целых значениях коэффициента передискретизации совокупность абсцисс отсчетов $\{t_k\}$, $k=\overline{0, M-1}$, может оказаться такой, что ее возможно разбить на p подпоследовательностей, в которых расположение абсцисс отсчетов будет близко к равномерному. В этом случае целесообразно использовать для каждой подпоследовательности соотношения (14) и (18), а затем в качестве значения $f(l\Delta)$ взять среднее:

$$f(l\Delta)=\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p}\sum_{k=0}^{N-1}f(t_{kr})w_{kr\Sigma}(l\Delta-t_{kr}), \tag{24}$$

где t_{kr} – абсцисса отсчета с номером k в r-й подпоследовательности. Если, например, неравномерная последовательность абсцисс отсчетов организована таким образом, что абсцисса $t_{kr} = k\Delta + t_r$ ($k = \overline{0, N-1}$, $r = \overline{1, p}$, $0 \le t_r \le \Delta$), то формула (24) при некоррелированном шуме обеспечивает минимальную величину дисперсии ошибки, равную σ_φ^2 / p.

Выше рассматривался некоррелированный шум. Если же, например, спектр шума ограничен частотой π/Δ, а спектр сигнала – частотой $\pi/p\Delta$, то восстановление сигнала по всей неравномерной последовательности не исказит этих спектров и подавление шума сведется к переходу к равномерной последовательности отсчетов и к применению фильтра нижних частот с частотой среза $\pi/p\Delta$. При этом дисперсия ошибки уменьшается в p раз, если спектральная плотность шума равномерна в полосе частот $|\omega| \le \pi/\Delta$. При другом виде спектра мощности шума его энергия уменьшается на величину

$$\delta\langle\varepsilon^2\rangle = 2\int\limits_{\pi/p\Delta}^{\pi/\Delta} d\omega S_\varphi(\omega).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Yen J. L.** On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals // Trans. IRE. 1956. **CT-3**, N 4. P. 251.
2. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962.
3. **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. М.: ГИФМЛ, 1962. Т. 1.
4. **Ефимов В. М.** Влияние амплитудных шумов на точность восстановления сигнала при его периодически неравномерной дискретизации // Автометрия. 1999. № 5. С. 52.
5. **Линник Ю. В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: ГИФМЛ, 1962.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: reznik@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
14 февраля 2000 г.