РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 3 2000

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 006.354.065 : 519.2 : 681.3

**Б. Д. Борисов, А. С. Мишнев**

*(Новосибирск)*

# О ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ДВУХВЫБОРОЧНОЙ ДИСПЕРСИИ АЛЛЕНА ПРИ ОЦЕНКЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ

Для оценки качества высокостабильных генераторов оптического диапазона получены аналитические зависимости погрешности измерения от «мертвого» времени для двухвыборочной дисперсии (дисперсии Аллена) при степенных спектральных плотностях фазовых флуктуаций. Создан микропроцессорный измеритель нестабильности частоты.

Одной из основных погрешностей при прямой оценке самой распространенной характеристики нестабильности частоты генераторов любого диапазона во временной области – двухвыборочной дисперсии (дисперсии Аллена [1]) – является погрешность из-за «мертвого» времени $\tau_m$ – паузы между двумя смежными интервалами измерения, в частности, при измерениях электронно-счетными частотомерами (ЭСЧ) [2]:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2}\langle(Y_{i+1} - Y_i)^2\rangle, \tag{1}$$

где $\langle Y_{i+1}\rangle$ и $\langle Y_i\rangle$ – средние значения частоты на $i+1$-м и $i$-м смежных интервалах измерения длительностью $\tau$ с каждый.

В работах [2–4] приведен анализ влияния паузы $\tau_m$ при реализации измерителя $\sigma_y^2(\tau)$. Путем численного интегрирования в частотной области была выявлена смещенность оценки $\sigma_y^2(\tau)$ при реальных значениях $\tau_m$ и предложен косвенный метод измерения верхнечастотной дисперсии (ВЧ) для получения оценки (1), исключающий использование ЭСЧ [3], в том числе с рандомизацией $\tau_m$ [2]. Однако и передаточная функция метода ВЧ-дисперсии заметно смещает искомую оценку (табл. 3 в [1]) и, несмотря на табулированные пересчетные коэффициенты, практически не удовлетворяет требованиям по точности, особенно при малых $\tau$. Рандомизация же $\tau_m$ снижает избирательность передаточной функции.

Для выявления погрешностей прямой оценки $\sigma_y^2(\tau)$ необходимо получить ее явные зависимости от $\tau_m$. Как известно, эта характеристика существует для всех спектральных плотностей $S_y(f)$ частотных и фазовых флуктуаций. Степенной характер спектральных плотностей хорошо отражает распределение флуктуаций по мощности в реальных генераторах [5]:

$$S_y(f) = h_\nu f^\nu; \qquad \nu = -2 \div 2, \tag{2}$$

$h_\nu$ – масштабный коэффициент, отражающий уровень шума. Хотя $\nu$ может принимать и дробные значения, с целочисленными значениями $\nu$ принято связывать определенный вид шума в исследованиях нестабильностей генераторов: частотный шум случайных блужданий ($\nu = -2$), частотный фликкер-шум ($\nu = -1$), белый частотный шум ($\nu = 0$), фазовый фликкер-шум ($\nu = +1$), белый фазовый шум ($\nu = +2$), для каждого из которых существуют свои физические источники возникновения [1].

Двухвыборочная дисперсия оценивается в частотной фурье-области как [1]

$$\sigma_y^2(\tau) = 2\int_0^\infty S(f)\frac{\sin^4 \pi f\tau}{(\pi f\tau)^2}\,df. \tag{3}$$

Учет $\tau_m$ с помощью параметра $M = T/\tau, T = \tau + \tau_m$ приводит к замене передаточной функции $H(f)$ в (3) на новую:

$$|H(f)|^2 = \frac{\sin^2 \pi f\tau}{(\pi f\tau)^2}\sin^2 \pi f\tau M. \tag{4}$$

Подставляя в (3) значения (4) и (2) для типовых видов $S(f)$ с целочисленными степенями и интегрируя их, найдем выражения для $\sigma_y^2(\tau, M)$. Результаты сведены в таблицу (столбец 3). Они обобщают известный случай «идеального» измерения с $\tau_m = 0, M = 1$ (столбец $\sigma_y^2(\tau)$ табл. 2 [1]) для тех же условий интегрирования: введение верхней граничной частоты $f_b$ вместо верхнего предела в (3), и $\pi f_b \tau \gg 1$ для расходящихся при $\nu = 1, 2$ интегралов, но для конечного $\tau_m$. В нашей таблице приведены и значения безразмерного коэффициента $K$, равного отношению $\sigma_y^2(\tau, M)$ и $\sigma_y^2(\tau)$ и отражающего изменение $\sigma_y^2$ в зависимости от учета реального $\tau_m$.

Из анализа явных по $M$ выражений таблицы для $K$, $\sigma_y^2(\tau, M)$ видно, что сильная зависимость от $M$ (или $\tau_m$) наблюдается для случаев $\nu = -1, -2$ (см. 4-ю и 5-ю строки таблицы). Тонкий анализ в области $M = 1 - 1{,}1$ выявил, что снижение $M$ до 1,001 ($\tau_m = 0{,}001\tau$) во всех случаях практически исключает влияние $\tau_m$, так как приводит к изменениям, не превышающим 1 % от $\sigma_y(\tau, M)$, что открывает возможность получать прямую оценку $\sigma_y^2(\tau)$ во временной области по формуле (1) при выполнении условия $\tau_m < 0{,}001\tau$, которое важно учесть при измерениях кратковременной нестабильности частоты на малых $\tau$.

Измерительное устройство, формирующее два смежных интервала с $\tau_m$ между ними равным $10^{-8}$ с, выполнено на микропроцессоре и ЭСЛ-логике [6]. Структура формулы (1) позволяет реализовать в устройстве измерение и

| Номер п/п | $S_y(f)$ | $\sigma_y^2(\tau)\ (M=1)$ | $\sigma_y^2(\tau, M)$ | $K=\sigma_y^2(\tau, M)/\sigma_y^2(\tau)$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | $h_2 f^2$ | $\frac{3h_2 f_b}{4\pi^2\tau^2}$ | $\frac{h_2}{4(\pi\tau)^3}\left\{\frac{f_b\pi\tau}{2} - \sin 2f_b\pi\tau - \frac{1}{M}\sin 2\pi f_b\tau M + \right.$ $\left. + \left[\frac{\sin 2(M+1)\pi f_b\tau}{2(M+1)}\right] + \frac{\sin 2(M-1)\pi f_b\tau}{2(M-1)}\right\}^*$ | $\frac{1}{3 f_b\pi\tau}\{\}^*$ |
| 2 | $h_1 f^1$ | $\frac{h_1}{4\pi^2\tau^2}(1{,}038 +$ $+ 3\ln 2\pi f_b\tau)$ | $\frac{h_1}{(2\pi\tau)^2}\left(C + \ln 4\pi f_b\tau + \ln\frac{M}{\sqrt{M^2-1}}\right)$ для $M>1$ | $\frac{2\left(C + \ln 4\pi f_b\tau + \ln\frac{M}{\sqrt{M^2-1}}\right)}{(1{,}038 + \ln 2\pi f_b\tau)}$ |
| 3 | $h_0$ | $\frac{h_0}{2\tau}$ | $h_{-1}(M+1)\ln\sqrt{\frac{M+1}{M-1}},\quad 1<M<2,$ $h_{-1}3\ln\sqrt{3},\quad M=2,$ $h_{-1}\left[(M-2)\pi + (M+1)\ln\sqrt{\frac{M+1}{M-1}}\right]^*,\quad M>2$ | $\left[(M+1)\ln\sqrt{\frac{M+1}{M-1}}\right]/2\ln 2,\quad 1<M<2,$ $1{,}5\ln\sqrt{3}/\ln 2,\quad M=2,$ $\frac{[\,]^*}{2\ln 2},\quad M>2$ |
| 4 | $h_{-1} f^{-1}$ | $h_{-1}2\ln 2$ | $h_{-1}3\ln\sqrt{3},\quad M=2,$ $h_{-1}\left[(M-2)\pi + (M+1)\ln\sqrt{\frac{M+1}{M-1}}\right]^*,\quad M>2$ | $\frac{3\ln\sqrt{3}}{2\ln 2},\quad M=2,$ $\frac{[\,]^*}{2\ln 2},\quad M>2$ |
| 5 | $h_{-2} f^{-2}$ | $(h_{-2}2\pi^2\tau)/3$ | $(h_{-2}\pi^2\tau)/3(3M-1)$ | $(3M-1)/2$ |

*Примечание.* Знак * означает равенство выражений, заключенных в скобках в соответствующей строке таблицы; $C$ – постоянная Эйлера.

других известных характеристик: среднего значения частоты $\langle Y \rangle$ на интервале $\tau$ (режим ЭСЧ) и выборочной дисперсии (среднеквадратическое отклонение). С учетом систематического ухода частоты оценка (1) совпадает и со среднеквадратической вариацией частоты [7]. Кроме того, работа устройства в режиме частотомера дает возможность использования (и поверки) устройства как ЭСЧ с предельно малым «мертвым» временем. Наличие приборного интерфейса позволяет связывать устройство с системой автоматизированного сбора данных.

Авторы благодарны В. А. Никулину за помощь в расчетах таблицы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рютман И. С.** Характеристики нестабильности фазы и частоты сигналов высокостабильных генераторов // ТИИЭР. 1978. **66**, № 9. С. 70.
2. **Тайманов Р. Е., Кочугуров Г. С., Михайлова Г. М. и др.** Комплекс аппаратуры для оценки флуктуационных характеристик колебаний // Измер. техника. 1978. № 10.
3. **Клейман А. С., Соловьев В. С.** Некоторые вопросы измерения нестабильности частоты // Метрология. 1986. № 1. С. 54.
4. **Клейман А. С., Тимофеев Е. П., Шкурпела Ю. В.** Измерение характеристик нестабильности частоты сигналов высокостабильных генераторов // Всесоюз. симп. «Статистические измерения и применение микромашинных средств в измерениях». Л., 1982.
5. **Barnes J. A., Chi A. R., Cutler I. S. et al.** Characterization of frequency stability // IEEE Trans. Instrum. Meas. 1971. **IM-20**. P. 105.
6. **Пат. 2003985 РФ.** Устройство для измерения нестабильности частоты /Б. Д. Борисов, А. С. Мишнев. Опубл. 1993, Бюл. № 43-44.
7. **ГОСТ 8.441-81.** Меры частоты и времени высокой точности. Введ. 01.01.83.

*Институт лазерной физики СО РАН,*
*E-mail: ir@laser.nsc.ru*

*Поступило в редакцию*
*22 марта 1999 г.*