РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 2000

УДК 681.324

О. Г. Монахов, Э. А. Монахова

(Новосибирск)

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕГУЛЯРНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ОПИСЫВАЕМЫХ СТРУКТУР ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ *

Исследуется новая топология для мультикомпьютерных систем. Класс $R_s(N, v, g)$ параметрически описываемых регулярных графов, задаваемых полугруппами, включает в виде подклассов большинство известных однородных графов, используемых в качестве структур вычислительных систем. Оптимальные структуры имеют минимальный диаметр при заданных параметрах графа (порядке N, степени v, обхвате g, числе классов эквивалентности s) и соответственно оптимальные характеристики по отношению к транзитным задержкам, надежности, связности и скорости коммуникаций при реализации в качестве сетей связи в многомодульных супер-ЭВМ. Графы $R_s(N, v, g)$ и их подкласс многомерных циркулянтов сравниваются с гиперкубами: диаметр оптимальных $R_s(N, v, g)$-графов приблизительно равен $0{,}21\log_2 N$ (при $g = 6$, $s > 1$), диаметр циркулянтов приблизительно равен $0{,}32\log_2 N$, в то время как диаметр гиперкубов равен $\log_2 N$ при одинаковой вершинной и реберной сложности исследуемых графов. Синтезированы $R_s(N, v, g)$-графы, достигающие нижних границ диаметра.

1. **Параметрическое описание структур вычислительных систем.** Исследования ненаправленных плотных регулярных графов с малыми диаметрами являются важными для проектирования архитектур перспективных вычислительных систем (ВС) [1, 2], распределенных вычислительных сетей и надежных сетей связи. Необходимость разработки оптимальных структур ВС опирается на ряд исследований [1, 3–6], в которых показано, что наилучшими структурами по различным критериям функционирования (транзитным задержкам, надежности, связности, самодиагностируемости, скорости коммуникаций) при одинаковом числе процессоров и линий связи у каждого из них являются структуры с минимальными диаметром и средним расстоянием.

Графы с такими свойствами могут быть найдены в классе графов Кэли, в частности в классе циркулянтных графов [7, 8], и в классе графов $R_s(N, v, g)$ [9], которые являются обобщениями циркулянтов, гиперкубов, торов, кубически связанных циклов [10], хордовых кольцевых сетей [11] и других подклассов однородных графов, описанных в литературе и реально применяемых в качестве структур ВС. Как показывает анализ зарубежных публикаций, попытки решить задачу обобщения параметрически описываемых регулярных структур предпринимаются начиная с 80-х годов. Отметим рабо-

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00884).

ты [12, 13], в которых авторы обобщили гиперкубы и кубически связанные циклы и получили некоторый подкласс графов $R_s(N, \nu, g)$, названный Gaussian Cubes, но уровень обобщения $R_s(N, \nu, g)$-графов не был достигнут. Актуальность обращения к графам $R_s(N, \nu, g)$ и их исследования в качестве структур ВС продиктованы также появлением суперкомпьютерных систем с числом процессоров порядка 10^5 и более, для которых оптимальность диаметра сети связи уже реально сказывается на основных характеристиках функционирования ВС. Отметим, что в отличие от гиперкубов графы $R_s(N, \nu, g)$ имеют логарифмическую (от N) оценку диаметра при фиксированной степени вершины.

1.1. *Постановка задачи и структуры* $L(N, \nu, g)$. В качестве структур однородных ВС в [3] был предложен класс однородных графов степени ν с числом вершин N и обхватом g – $L(N, \nu, g)$-графов. Алгоритм построения графов $L(N, \nu, g)$ состоит из двух этапов: построения подграфа с числом вершин N графа $L(\nu, g)$, бесконечного планарного графа степени ν и обхвата g, и построения на его основе $L(N, \nu, g)$-графа. Граф называется планарным, если его можно нарисовать на плоскости так, что никакие два его ребра не пересекаются.

Способ построения $L(\nu, g)$-структур приведен в работах [3, 9]. Структуры, принадлежащие классу $L(N, \nu, g)$, образуются путем выделения из бесконечного планарного графа $L(\nu, g)$-подграфа, составляющего первые $(k-1)$ ярусов и часть k-го яруса: $\sum_{i=0}^{k-1}|A_i| \le N \le \sum_{i=0}^{k}|A_i|$, где A_i – множество вершин яруса i графа $L(\nu, g)$, и дополнения множества ребер полученного подграфа до однородного графа с заданными степенью ν и обхватом g.

Второй из этих этапов является алгоритмом сокращенного перебора, реализация которого требует значительных затрат машинного времени. Один из путей уменьшения времени построения графов $L(N, \nu, g)$ – использование свойств симметрии этих графов. Цель данной работы – представить и исследовать подкласс графов $L(N, \nu, g)$, обладающий некоторой симметрией связей и допускающий параметрическое описание. Параметрическое описание структур ВС является компактной формой представления графа межмодульных связей по сравнению с заданием матрицей смежностей или списком и более удобно при организации работы операционной системы (распределении и загрузке заданий, реализации путевых процедур и пр.).

1.2. *Определение и свойства структур* $R_s(N, \nu, g)$.

Определение 1. Пусть $R_\mu(N, \nu, g)$ – подкласс из класса графов $L(N, \nu, g)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, N\}$, множеством ребер $E \subseteq V^2$, группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(R)$ и отношением эквивалентности μ, образующим такое разбиение множества вершин V на $m \le N$ классов V_i, что для каждой пары вершин $k,\ j \in V_i,\ i = \overline{1, m}$, существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(R)$, переводящий k в j:

$$\forall (k, j \in V_i) \exists (\varphi \in \mathrm{Aut}(R))(\varphi(k) = j).$$

Эквивалентностью μ на множестве вершин V графа $R_s(N, \nu, g)$, которая будет рассматриваться далее, является сравнимость по модулю некоторого натурального числа s, делящего нацело N, т. е.

$$\mu = \{(a, b) \in V^2 \mid a \equiv b (\mathrm{mod}\, s)\}, \tag{1}$$

где $s \le N$, $N \equiv 0(\mathrm{mod}\,s)$.

В этом случае, если эквивалентность μ определяется выражением (1), обозначим $R_\mu(N, \nu, g)$-графы через $R_s(N, \nu, g)$. Выделим класс графов $R_s(N, \nu)$, включающий все графы $R_s(N, \nu, g)$ с фиксированными значениями s, N и ν.

Таким образом, все множество вершин V графа $R_s(N, \nu)$ разбито на s классов эквивалентности V_i:

$$V_i = \{a \mid a \in V,\ \ a \equiv i(\mathrm{mod}\,s)\},$$

где $i = \overline{1, s}$.

Пусть $r = N/s$. Из определения графов $R_\mu(N, \nu, g)$ следует, что для каждой пары вершин $a, b \in V_i$, $i = \overline{1, s}$, графа $R_s(N, \nu)$ существует такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(R)$, что $\varphi(a) = b$, а именно:

$$b \equiv a + js(\mathrm{mod}\,N), \qquad j = \overline{1, r}.$$

Если в графе $R_s(N, \nu)$ две вершины a и c связаны ребром $(a, c) \in E$ и $c - a \equiv l(\mathrm{mod}\,N)$, где l – натуральное число и $l < N$, то l назовем отметкой ребра (a, c). Заметим, что данное ребро имеет также отметку $l' \equiv a - c(\mathrm{mod}\,N)$.

Лемма 1. Если две вершины $a \in V_i, i \in \overline{1, s}$, и $c \in V$ графа $R_s(N, \nu)$ связаны ребром $(a, c) \in E$ с отметкой l, то каждой вершине $b \in V_i$ инцидентно ребро $(b, d) \in E$ с отметкой l.

Следствие. Пусть в графе $R_s(N, \nu)$ вершина $a \in V_i$, $i \in \overline{1, s}$. Обозначим через $L_i = \{l_{ik}\}, i \in \overline{1, s}; k \in \overline{1, \nu}$, множество отметок ребер, инцидентных вершине a. Тогда множество отметок ребер, инцидентных любой вершине $b \in V_i$, есть L_i.

Доказательства лемм и теорем из пп. 1, 2 можно найти в [9].

Множество $L = \{l_{ik}\}$, $i = \overline{1, s}$; $k = \overline{1, \nu}$, назовем множеством отметок ребер графа $R_s(N, \nu)$. Две вершины a и b графа $R_s(N, \nu)$ связаны ребром $(a, b) \in E$, если и только если существует такое натуральное число $l_{ik} < N$, где $l_{ik} \in L$, $i \in \overline{1, s}$; $k \in \overline{1, \nu}$, что $a \equiv i(\mathrm{mod}\,s)$ и $b - a \equiv l_{ik}(\mathrm{mod}\,N)$, т. е.

$$(a, b) \in E \Leftrightarrow (\exists l_{ik} \in L)(a \equiv i(\mathrm{mod}\,s))\,\&\,(b - a \equiv l_{ik}(\mathrm{mod}\,N)).$$

Таким образом, если заданы число вершин N, число классов эквивалентности s и множество отметок L, то граф $R_s(N, \nu, g)$ полностью определен.

Обозначим через E_{ik} множество ребер с отметкой l_{ik}:

$$E_{ik} = \{(a, b) \in E \mid a \equiv i(\mathrm{mod}\,s),\ b \equiv a + l_{ik}(\mathrm{mod}\,N)\},$$

где $i \in \overline{1, s}$; $k \in \overline{1, \nu}$. Ребра из множества E_{ik} имеют также отметку

$$l_{jm} = N - l_{ik}, \tag{2}$$

где $j \equiv i + l_{ik}(\mathrm{mod}\,s)$; $i, j \in \overline{1, s}$; $k, m \in \overline{1, \nu}$, и, следовательно, множества E_{jm} и E_{ik} совпадают.

Обозначим через L^* минимально необходимое множество отметок. Для того чтобы перейти от множества L к множеству L^*, необходимо из множест-

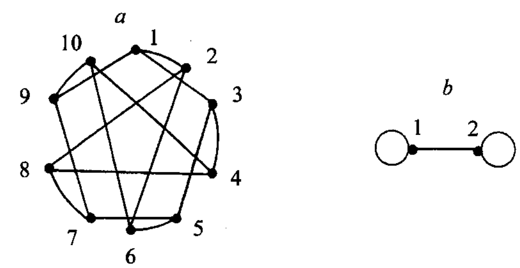

Рис. 1

ва L удалить одну из каждой пары отметок, связанных соотношением (2). Для обратного перехода от L^* к L необходимо для каждой отметки из L^* найти дополнительную отметку по соотношению (2).

Приведем некоторые свойства графов $R_s(N, \nu)$:

$$V = \bigcup_{i=1}^{s} V_i, V_i \bigcap V_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, |V_i| = r, \text{где } i = \overline{1,s};$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcup_{k=1}^{\nu} E_{ik}, |E_{ik}| = r, \text{где } i = \overline{1,s};\ k = \overline{1,\nu};\ |E| = sr\nu/2.$$

Если вершины $a, b \in V$ графа $R_s(N, \nu)$ связаны, то

$$b - a = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{\nu} l_{ik} t_{ik} (\mathrm{mod} N),$$

где t_{ik} – число ребер с отметкой l_{ik}, принадлежащих пути из a в b.

Графы $R_s(N, \nu, g)$, как было показано в [9], описываются полугруппой и изоморфны графу полугруппы преобразований классов эквивалентности.

П р и м е р 1. Рассмотрим граф Петерсена (рис. 1, *а*), у которого $N = 10$, $\nu = 3$, $g = 5$, $s = 2$, т. е. это граф $R_2(10,3,5)$ с множеством отметок $L = \{1,2,8;$ $4,6,9\}$ (минимальное множество отметок $L^* = \{1,2;\ 4\}$).

1.3. *Связность структур* $R_s(N, \nu)$. Рассмотрим вопрос о связности графов $R_s(N, \nu)$. Пусть $r = N/s$. Обозначим через $H(R)$ граф с множеством вершин $VH = \{1, 2, \ldots, r\}$ и множеством ребер EH, получающийся из графа $R_s(N, \nu)$ с множеством отметок L при гомоморфизме φ: $i \to j$, где $i \in V$, $j \in VH$ и $j = \left[\frac{i-1}{s}\right] + 1$; $[x]$ – целая часть числа x. При этом

$$(a, c) \in EH \Leftrightarrow (\exists l_{mk} \in L)(c \equiv a + b_{mk} (\mathrm{mod} r),$$
$$b_{mk} = \left[\frac{d_{mk} - 1}{s}\right], \quad d_{mk} \equiv m + l_{mk} (\mathrm{mod} N)), \tag{3}$$

где $m \in \overline{1,s}$; $k \in \overline{1,\nu}$; $d_{mk} \in \overline{1,N}$; $b_{mk} \in \overline{1,r}$.

Обозначив $B = \{b_{mk}\}$, $m = \overline{1,s}$; $k = \overline{1,\nu}$, перепишем формулу (3) в следующем виде:

$$(a, c) \in EH \Leftrightarrow (\exists b_{mk} \in B)(c \equiv a + b_{mk} (\mathrm{mod} r)),$$

где $m \in \overline{1,s}$; $k \in \overline{1,\nu}$.

Заметим, что полученное определение графов $H(R)$ совпадает с определением циркулянтных графов размерности $n = p/2$ с множеством B в качестве множества отметок, где p – степень графа $H(R)$ при условии, что все петли исключены.

Используя теорему 1 [14], получим условие связности графа $H(R)$. Для того чтобы граф $H(R)$ с числом вершин r и множеством отметок B был связным, необходимо и достаточно, чтобы числа $\{r, B\}$ были взаимно просты.

П р и м е р 2. Для графа Петерсена (см. рис. 1) графом $H(R)$ является граф K_5 – полный граф с числом вершин $r = 5$. В этом случае $B = \{1,2,3,4\}$.

Обозначим через $\Gamma(R/s)$ граф с множеством вершин $V\Gamma = \{1,2,\ldots,s\}$ и множеством ребер $E\Gamma$, полученный из графа $R_s(N, \nu)$ с множеством отметок L при гомоморфизме ε: $i \to j$, где $i \in V$; $j \in V\Gamma$ и $i \equiv j(\mathrm{mod}\, s)$, при этом

$$(a,b) \in E\Gamma \Leftrightarrow (\exists l_{mk} \in L)(a + l_{mk} \equiv b(\mathrm{mod}\, s))\,\&\,(a \equiv m(\mathrm{mod}\, s)),$$

где $m \in \overline{1,s}$; $k \in \overline{1,\nu}$. Примем, что множество отметок ребер графа $\Gamma(R/s)$ совпадает с множеством отметок исходного графа $R_s(N, \nu)$.

П р и м е р 3. На рис. 1, *b* изображен граф $\Gamma(R/2)$ графа Петерсена (см. пример 1).

Граф $\Gamma(R/s)$ является однородным графом степени ν, если исходный граф был $R_s(N, \nu)$ с множеством отметок L, кроме случая, когда $l \in L$ и $l = N/2$. Тогда степень вершины, которой инцидентно ребро с отметкой l в графе $\Gamma(R/s)$, равна $\nu + 1$.

Рассмотрим с точки зрения связности граф $\Gamma(R/s)$, построенный из графа $R_s(N, \nu)$ с множеством отметок L. Пусть $L' \subset L$ – такое подмножество, что для любого $m \in \overline{1,s}$ и какого-либо $k \in \overline{1,\nu}$, если $l_{mk} \in L'$, то $l_{mi} \in L'$ для всех $i \in \overline{1,\nu}$. Обозначим через I множество первых индексов отметок $l_{mk} \in L'$, где $m \in \overline{1,s}$; $k = \overline{1,\nu}$.

Лемма 2. Граф $\Gamma(R/s)$ связен тогда и только тогда, когда для каждого $L' \subset L$ существует такая отметка $l_{mk} \in L'$, что $m + l_{mk} \equiv i(\mathrm{mod}\, s)$ и $i \notin I$ при $m, i \in \overline{1,s}$; $k \in \overline{1,\nu}$.

Теорема 1. Граф $R_s(N, s)$ связен тогда и только тогда, когда связны графы $H(R)$ и $\Gamma(R/s)$.

1.4. *Параметрическое описание изоморфных структур* $R_s(N, \nu)$.

Теорема 2. Графы $R_s(N, \nu)$ и $R'_s(N, \nu)$ с множествами отметок соответственно $L = \{l_{mk}\}$ и $L' = \{l'_{ik}\}$ изоморфны, если $l_{ik} = N - l_{mk}$ при $i \equiv s + c - m(\mathrm{mod}\, s)$ для $i, m \equiv \overline{1,s}$; $k = \overline{1,\nu}$; $c \in \overline{0, s-1}$.

Следствие. Выбор значений отметок $l \in L^*$ графа $R_s(N, \nu)$ можно ограничить интервалом от 1 до $s([r/2]+1)$, где $r = N/s$.

Теорема 3. Графы $R_s(N, \nu)$ и $R'_s(N, \nu)$ с множествами отметок соответственно $L = \{l_{mk}\}$ и $L' = \{l'_{ik}\}$ изоморфны, если $l_{mk} = l'_{ik}$ при $m \equiv i \pm c(\mathrm{mod}\, s)$, где $i, m = \overline{1,s}$; $k = \overline{1,\nu}$; $c \in \overline{0, s-1}$.

Теорема 4. Графы $R_s(N, \nu)$ и $R'_s(N, \nu)$ с множествами отметок соответственно $L = \{l_{mk}\}$ и $L' = \{l'_{ik}\}$ изоморфны, если $l'_{ik} = c l_{mk}(\mathrm{mod}\, N)$ при условии, что N и c – взаимно простые числа и $i \equiv cm(\mathrm{mod}\, s)$ для $i, m = \overline{1,s}$; $k = \overline{1,\nu}$.

Наряду с решением вопроса о связности и изоморфизме, с помощью параметрического описания структур ВС в [9] определена верхняя граница обхвата таких структур.

На рис. 2 приведен граф $R_2(20,4,5)$ с множеством отметок $L=\{1,3,4,16;8,12,17,19\}$.

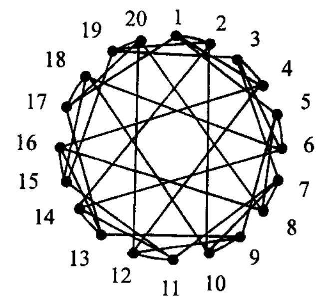

Рис. 2

2. Оценки диаметра и среднего расстояния структур $L(N,\text{v},g)$. Рассмотрим свойства графов $L(\text{v},g)$ и $L(N,\text{v},g)$, позволяющие по заданным значениям N, v и g определить нижние оценки диаметра и среднего расстояния графов $L(N,\text{v},g)$ и соответственно графов $R_s(N,\text{v},g)$.

По определению диаметр графа G $d=\max_{ij} d_{ij}$, где d_{ij} – длина кратчайшего пути из вершины i к вершине j. Среднее расстояние в графе G $d_{av}=$ $=\left(\sum_{ij} d_{ij}\right)\Big/N$.

Лемма 3. Пусть граф $L(\text{v},g)$ имеет степень $\text{v}>3$ и обхват $g>3$ либо степень $\text{v}=3$ и обхват $g\geq 6$. Тогда, если вершина $a\in A_k$, $k>0$, то a смежна либо с одной вершиной на ярусе $k-1$ и с $\text{v}-1$ на ярусе $k+1$, либо с двумя вершинами на ярусе $k-1$ и с $\text{v}-2$ на ярусе $k+1$, либо, если g нечетное, с одной вершиной на ярусе $k-1$, с одной на ярусе k и с $\text{v}-2$ на ярусе $k+1$.

Обозначим через x_k, z_k, y_k числа вершин, расположенных на ярусе k, $k>0$, и имеющих вышеприведенные типы связи, в порядке их перечисления в лемме 3.

Следствие. Пусть граф $L(\text{v},g)$ имеет степень $\text{v}>3$ и обхват $g>3$. Тогда число вершин, расположенных на ярусе k, $k>0$, определяется по следующим формулам:

$$n_k=x_k+y_k+z_k \text{ при } g \text{ нечетном}, \quad n_k=x_k+z_k \text{ при } g \text{ четном}.$$

Установим теперь распределение величин x_k, y_k, z_k в зависимости от значений k, v и g.

Теорема 5. Пусть граф $L(\text{v},g)$ имеет степень $\text{v}>3$ и обхват $g>3$ либо степень $\text{v}=3$ и обхват $g\geq 6$, и пусть $g=2n+1$, где $n\geq 2$ – натуральное число. Тогда распределение величин x_k, y_k и z_k в зависимости от номера яруса k определяется следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=0 \text{ при } k=0;\\
&x_1=\text{v},\ y_1=0,\ z_1=0 \text{ при } k=1;\\
&x_k=x_{k-1}(\text{v}-1),\ y_k=0,\ z_k=0 \text{ при } 1<k\leq n-1;\\
&x_k=x_{k-1}(\text{v}-1)-2\text{v},\ y_k=2\text{v},\ z_k=0 \text{ при } k=n;\\
&x_k=x_{k-1}(\text{v}-1)+(y_{k-1}+z_{k-1})(\text{v}-2)-2z_k-y_k,\\
&y_k=2x_{k-n}(\text{v}-2)+2(\text{v}-3)(y_{k-n}+z_{k-n}),\ \ z_k=y_{k-n}\big/2 \text{ при } k\geq n+1.
\end{aligned}$$

Имеет место аналогичный результат для графов с четным обхватом.

Теорема 6. Пусть граф $L(\text{v},g)$ имеет степень $\text{v}>3$ и обхват $g>3$ либо степень $\text{v}=3$ и обхват $g\geq 6$, и пусть $g=2n$, где $n\geq 2$ – натуральное число. Тогда распределение величин x_k и z_k в зависимости от номера яруса k определяется следующими рекуррентными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0,\ z_0 = 0 \text{ при } k = 0;\\
&x_1 = \mathrm{v},\ z_1 = 0 \text{ при } k = 1;\\
&x_k = x_{k-1}(\mathrm{v}-1),\ z_k = 0 \text{ при } 1 < k \le n-1;\\
&x_k = x_{k-1}(\mathrm{v}-1) - 2\mathrm{v},\ z_k = \mathrm{v} \text{ при } k = n;\\
&x_k = x_{k-1}(\mathrm{v}-1) + z_{k-1}(\mathrm{v}-2) - 2z_k,\\
&z_k = x_{k-n}(\mathrm{v}-2) + z_{k-n}(\mathrm{v}-3) \text{ при } k \ge n+1.
\end{aligned}
$$

Теоремы 5 и 6 позволяют определить нижние оценки диаметра и среднего расстояния $L(N, \mathrm{v}, g)$-графов. Обозначим эти оценки соответственно d^* и d^*_{av}. Величины d^* и d^*_{av} определяются из следующих соотношений:

$$\sum_{k=0}^{d^*-1} n_k < N \le \sum_{k=0}^{d^*} n_k, \qquad d^*_{av} = \sum_{k=1}^{d^*} k n_k / N,$$

где $n_k = x_k + y_k + z_k$.

Из теорем 5 и 6 следует, что на всех ярусах оптимального $L(N, \mathrm{v}, g)$-графа до яруса $[g/2]$ число вершин равно максимально возможному для данного значения v. Оптимальный граф выбирается среди графов $L(N, \mathrm{v}, g)$ с максимально возможным для данных N и v обхватом g. Эти структуры имеют минимально возможные диаметр и среднее расстояние среди всех графов с N вершинами, степени которых равны v. Под оптимальным графом $R_s(N, \mathrm{v}, g)$ (в узком смысле) понимается граф с минимальными диаметром и средним расстоянием при заданных числе вершин N, степени v, обхвате g и числе классов эквивалентности s. Заметим, что выбор числа классов эквивалентности происходит в зависимости от значений N, v и g по теореме 7 [9] и ее следствиям.

Данная оптимизационная задача является задачей целочисленного программирования с нелинейной целевой функцией. Алгоритмы, предложенные авторами для решения этой задачи, образуют библиотеку алгоритмов синтеза оптимальных графов $R_s(N, \mathrm{v}, g)$, включающую полный и сокращенный перебор, случайный поиск, алгоритм, использующий идею ветвей и границ, и генетический алгоритм. С помощью данных алгоритмов были получены графы $R_s(N, \mathrm{v}, g)$ для значений $N \le 16384$, $\mathrm{v} \le 12$, $g \le 8$, $s \le 4$. Параметрические описания некоторых графов $R_s(N, \mathrm{v}, g)$ приведены в табл. 1.

3. **Структуры $R_s(N, \mathrm{v}, g)$ с обхватом 4.** Заметим, что при $g = 4$ класс графов $R_s(N, \mathrm{v}, g)$ включает такие известные сетевые топологии, как гиперкубы и циркулянтные графы.

Гиперкубы могут быть описаны как графы $R_s(2^{\mathrm{v}}, \mathrm{v}, 4)$ при значении $s = 2^{\mathrm{v}-2}$. Например, при $N = 2^3$ параметрическое описание гиперкуба $R_2(2^3, 3, 4)$ имеет следующий вид: $\{1, 2, 6;\ 2, 6, 7\}$.

При $s = 1$ и $g = 4$ класс графов $R_s(N, \mathrm{v}, g)$ совпадает с классом циркулянтных графов [5, 7, 8, 14, 15] размерности $\mathrm{v}/2$, если степень v четная. Циркулянтные графы (в отечественной литературе известны также под названием D_n-графов) являются объектом интенсивных исследований в информатике,

Таблица 1

N	ν	s	g	$d\,(d^*)$	$l_1, l_2, \ldots, l_{2\nu}$
26	6	2	4	2 (2)	4, 6, 17, 19, 20, 22; 7, 8, 9, 12, 14, 18
884	6	2	4	6 (6)	119, 244, 342, 542, 640, 673; 8, 211, 382, 502, 765, 876
1024	10	2	4	4 (4)	45, 246, 277, 460, 479, 543, 564, 593, 701, 778; 68, 308, 323, 431, 481, 545, 716, 747, 956, 979
2048	10	2	4	5 (4)	41, 140, 213, 344, 419, 680, 1368, 1704, 1863, 1908; 185, 512, 648, 666, 1382, 1400, 1536, 1629, 1835, 2007
4096	12	2	4	5 (4)	48, 194, 1125, 1231, 1307, 1483, 1889, 1959, 1999, 3671, 3902, 4048; 342, 425, 1186, 2097, 2137, 2207, 2613, 2789, 2865, 2910, 2971, 3754
8192	12	2	6	6 (4)	777, 927, 1508, 2150, 2157, 2393, 3971, 4095, 6042, 6684, 7019, 7947; 245, 1173, 1330, 3990, 4097, 4202, 4221, 5799, 6035, 6862, 7265, 7415

теории графов и дискретной математике. Они реализованы в качестве сетей связи в суперкомпьютерных системах (Intel Paragon, Cray T3D и др.).

Определение 2. Циркулянтом называется ненаправленный граф $G(N; s_1, s_2, \ldots, s_{\nu/2})$ с N вершинами, помеченными $0, 1, 2, \ldots, N-1$, имеющими $i \pm s_1, i \pm s_2, \ldots, i \pm s_{\nu/2} (\operatorname{mod} N)$ вершины, смежные с каждой вершиной i.

Числа $S = (s_i)$ $(0 < s_1 < \ldots < s_{\nu/2} < N/2)$ являются образующими конечной абелевой группы автоморфизмов, связанной с графом.

Пусть nc_k определяет число вершин на ярусе k циркулянта G со степенью ν, nc_k^* – верхняя граница для nc_k. Обозначим через $uc_k = \sum_{i=0}^{k} nc_i$ число вершин в G, которое является достижимым самое большее за k шагов из вершины 0, через uc_k^* верхнюю границу для uc_k. Рекуррентные соотношения и формулы для вычисления nc_k^*, uc_k^* в явном виде были получены в [5, 16–18]. Ниже приведены точные формулы [18]:

$$nc_k^* = \sum_{i=0}^{\nu/2-1} C_{\nu/2}^{i} C_{k-1}^{\nu/2-i-1} 2^{\nu/2-i} \text{ при } k \geq 1,\ nc_0^* = 1;$$

$$uc_k^* = \sum_{i=0}^{\nu/2} C_{\nu/2}^{i} C_{k}^{\nu/2-i} 2^{\nu/2-i}.$$

Определение 3. Циркулянтный граф G называется предельно оптимальным, если $nc_k = nc_k^*$ для любого $0 \leq k \leq d^* - 1$ и $nc_{d^*} = N - uc_{d^*-1}^*$, где диаметр d^* определяется из неравенств $uc_{d^*-1}^* < N \leq uc_{d^*}^*$. Граф G называется оптимальным, если $d(G) = d^*$.

Диаметр d^* есть точная нижняя граница для $d(N) = \min_S \{d(G(N; S))\}$.

Предельно оптимальные и оптимальные циркулянты имеют минимум d (и минимум d_{av} для предельно оптимальных циркулянтов), максимум надежности и связности [5, 16] и минимальное число шагов для реализации алгоритмов коммуникаций [6], но существуют не для всех значений N и $v > 4$ [7, 8]. Для $v = 4$ аналитическое решение проблемы существования и синтеза оптимальных циркулянтов найдено в [5, 19, 20].

Теорема 7. Для любого $N > 4$ предельно оптимальный циркулянт $G(N; s_1, s_2)$ существует и имеет образующие $\{s, s+1\}$, где $s = \lfloor(\sqrt{2N-1}-1)/2\rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ – ближайшее целое число к x. Точная нижняя граница диаметра $d^* = \lceil(\sqrt{2N-1}-1)/2\rceil$, $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое число, большее или равное x.

Обзор зарубежных работ по проблемам построения оптимальных циркулянтов (направленных и ненаправленных) и их обобщений сделан в [7].

Для графов с обхватом $g = 4$ могут быть получены точные формулы распределения вершин графов $R_s(N, v, g)$ по ярусам.

Теорема 8. Пусть граф $L(v, g)$ имеет степень $v > 3$ и обхват $g = 4$. Тогда распределение величины n_k, $k \geq 0$, определяется следующим образом:

$$n_0 = 0, \quad k = 0; \quad n_k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{2k-1-i}^{2k-1-2i} v^{k-i}, \quad k > 0. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g = 4$. Тогда по теореме 6 рекуррентные соотношения для x_k и z_k будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0, z_0 = 0 \text{ при } k = 0;\\
&x_1 = v, z_1 = 0 \text{ при } k = 1;\\
&x_k = x_{k-1}(v-1) - 2v,\ z_k = v \text{ при } k = 2;\\
&x_k = x_{k-1}(v-1) + z_{k-1}(v-2) - 2z_k,\\
&z_k = x_{k-2}(v-2) + z_{k-2}(v-3) \text{ при } k \geq 3.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $n_k = x_k + z_k$, из рекуррентных соотношений получаем $n_k = z_{k+1}$ и $x_k = n_k - n_{k-1}$ для $k > 0$. Отсюда выводим следующее рекуррентное соотношение для n_k, имеющее место при обхвате 4:

$$n_k = (n_{k-1} - n_{k-2})(v-1) + n_{k-3} \text{ при } k \geq 3. \tag{5}$$

Индукцией по k докажем справедливость формулы (4).

При $k = 1$ и $k = 2$ справедливость (4) проверяется непосредственно. Пусть до k включительно формула (4) имеет место. Покажем, что она выполняется для $k + 1$.

Используя рекурсию (5), запишем n_{k+1} в следующем виде:

$$\begin{aligned}
n_{k+1} = {}& \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{2k-1-i}^{2k-1-2i} v^{k+1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{2k-1-i}^{2k-1-2i} v^{k-i} -\\
&- \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_{2k-3-i}^{2k-3-2i} v^{k-i} + \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_{2k-3-i}^{2k-3-2i} v^{k-1-i} +\\
&+ \sum_{i=0}^{k-3} (-1)^i C_{2k-5-i}^{2k-5-2i} v^{k-2-i}.
\end{aligned}$$

Группируем коэффициенты, находящиеся при одинаковых степенях v:

$$n_{k+1} = C_{2k-1}^{2k-1} \mathrm{v}^{k+1} +$$

$$+[-C_{2k-2}^{2k-3} - C_{2k-1}^{2k-1} - C_{2k-3}^{2k-3}]\mathrm{v}^{k} +$$

$$+[C_{2k-3}^{2k-5} + C_{2k-2}^{2k-3} + C_{2k-4}^{2k-5} + C_{2k-3}^{2k-3}]\mathrm{v}^{k-1} +$$

$$+[-C_{2k-4}^{2k-7} - C_{2k-3}^{2k-5} - C_{2k-5}^{2k-7} - C_{2k-4}^{2k-5} + C_{2k-5}^{2k-5}]\mathrm{v}^{k-2} +$$

$$+[C_{2k-5}^{2k-9} + C_{2k-4}^{2k-7} + C_{2k-6}^{2k-9} + C_{2k-5}^{2k-7} - C_{2k-6}^{2k-7}]\mathrm{v}^{k-3} + \ldots +$$

$$+[(-1)^{k-2} C_{k+1}^{3} - (-1)^{k-3} C_{k+2}^{5} - (-1)^{k-3} C_{k}^{3} + (-1)^{k-4} C_{k+1}^{5} + (-1)^{k-5} C_{k}^{5}]\mathrm{v}^{3} +$$

$$+[(-1)^{k-1} C_{k}^{1} - (-1)^{k-2} C_{k+1}^{3} - (-1)^{k-2} C_{k-1}^{1} + (-1)^{k-3} C_{k}^{3} + (-1)^{k-4} C_{k-1}^{3}]\mathrm{v}^{2} +$$

$$+[-(-1)^{k-1} C_{k}^{1} + (-1)^{k-2} C_{k-1}^{1} + (-1)^{k-3} C_{k-2}^{1}]\mathrm{v}.$$

Преобразуя выражения при степенях v, получим следующие коэффициенты разложения для n_{k+1}: $C_{2k+1}^{2k+1}\mathrm{v}^{k+1}$, $-C_{2k}^{2k-1}\mathrm{v}^{k}$, $C_{2k-1}^{2k-3}\mathrm{v}^{k-1}$, $-C_{2k-2}^{2k-5}\mathrm{v}^{k-2}$, $C_{2k-3}^{2k-7}\mathrm{v}^{k-3}$, …, $(-1)^{k-2} C_{k+3}^{5}\mathrm{v}^{3}$, $(-1)^{k-1} C_{k+2}^{3}\mathrm{v}^{2}$, $(-1)^{k} C_{k+1}^{1}\mathrm{v}$.

Свертывая данное выражение, получим (4). Теорема доказана.

Приведем формулы для некоторых значений n_k (справа для сравнения – те же значения для циркулянтных графов):

$n_0 = 0;$	$nc_0^* = 1;$
$n_1 = \mathrm{v};$	$nc_1^* = \mathrm{v};$
$n_2 = \mathrm{v}^2 - 2\mathrm{v};$	$nc_2^* = 1/2\mathrm{v}^2;$
$n_3 = \mathrm{v}^3 - 4\mathrm{v}^2 + 3\mathrm{v};$	$nc_3^* = 1/6\mathrm{v}^3 + 1/3\mathrm{v};$
$n_4 = \mathrm{v}^4 - 6\mathrm{v}^3 + 10\mathrm{v}^2 - 4\mathrm{v};$	$nc_4^* = 1/24\mathrm{v}^4 + 1/3\mathrm{v}^2;$
$n_5 = \mathrm{v}^5 - 8\mathrm{v}^4 + 21\mathrm{v}^3 - 20\mathrm{v}^2 + 5\mathrm{v};$	$nc_5^* = 1/60\mathrm{v}^5 - 1/6\mathrm{v}^4 + 4/3\mathrm{v}^3 - 10/3\mathrm{v}^2 + 17/5\mathrm{v}.$

При сравнении значений n_k, полученных с помощью теоремы 8, со значениями nc_k для циркулянтных графов видно, что величины n_k совпадают с величинами nc_k для циркулянтов степени 4, а при $\mathrm{v} > 4$ превосходят их. Таким образом, теоретически возможно существование графов $R_s(N, \mathrm{v}, g)$ степени $\mathrm{v} \geq 6$ с таким же обхватом $g = 4$, как у циркулянтов, но лучших по диаметру (и среднему расстоянию) при прочих равных параметрах.

Такие графы были найдены экспериментально при задании числа классов эквивалентности искомых графов $s = 2$. В табл. 1 приведены примеры описаний полученных графов обхвата 4 для $N = 26$ и $N = 884$ и их диаметры (2 и 6). Диаметры наилучших возможных циркулянтов с теми же параметрами N, v, g равны соответственно 3 и 9.

Таблица 2

$N=2^{\nu}$	Гиперкубы		Циркулянты			$L(N,\nu,g)$-графы			
	$\nu=d$	d_{av}	ν	$d^*(N)$	d^*_{av}	ν	g	$d^*(N)$	d^*_{av}
64	6	3,0	6	4	2,5	6	6	3	2,29
256	8	4,0	8	4	3,3	8	6	3	2,7
512	9	4,5	8	5	4,02	9	6	3	2,81
1024	10	5,0	10	5	4,04	10	6	4	3,01
2048	11	5,5	10	6	4,7	11	6	4	3,47
4096	12	6,0	12	6	4,68	12	6	4	3,57
8192	13	6,5	12	6	5,34	13	6	4	3,78
16384	14	7,0	14	6	5,38	14	6	4	3,83
32768	15	7,5	14	7	6,09	15	6	4	3,89
65536	16	8,0	16	7	6,12	16	6	5	4,06
131072	17	8,5	16	8	6,73	17	6	5	4,39
262144	18	9,0	18	8	6,75	18	6	5	4,62
1048576	20	10,0	20	8	7,41	20	6	5	4,85
16777216	24	12,0	24	10	8,76	24	6	6	5,56
268435456	28	14,0	28	11	10,15	28	6	6	5,94

4. **Исследование структурных показателей графов $R_s(N, \nu, g)$.** В этом разделе исследуются структурные показатели графов $R_s(N,\nu,g)$: диаметр и среднее расстояние – и проводится сравнение по этим параметрам данных графов, и в частности многомерных циркулянтов, с такой популярной топологией для параллельных ВС, как гиперкубы.

В табл. 2 представлен фрагмент результатов сравнения гиперкубов, графов $R_s(N,\nu,g)$ $(g=6,\ s>1)$ и циркулянтов по степени (ν), диаметру (d) и среднему расстоянию (d_{av}) при одинаковом числе вершин графа $N=2^{\nu}$. Величина $d^*(N)$ есть точная нижняя граница диаметра графов $R_s(N,\nu,g)$, которая вычисляется в случае циркулянтных графов из выражения для uc^*_k. Для проведения корректного сравнения степень циркулянта берется равной степени гиперкуба или в случае нечетной степени меньше на одну единицу.

На рис. 3 представлены графики зависимости диаметра гиперкубов (кривая *1*), точных нижних границ диаметров графов $R_s(N,\nu,g)$ (кривая *2*) и циркулянтов (кривая *3*) как функций от N.

Характер изменения точной нижней границы диаметра циркулянтных графов до $N \le 2^{163}$ выражается следующей аппроксимационной формулой:

$$d^*(N) = a + b\ln N = a + b_1\nu,$$

где $a=2{,}123$; $b=0{,}467$; $b_1=0{,}324$.

Для гиперкубов диаметр $d=a_2+b_2\ln N$, где $a_2=3{,}639$; $b_2=1{,}443$.

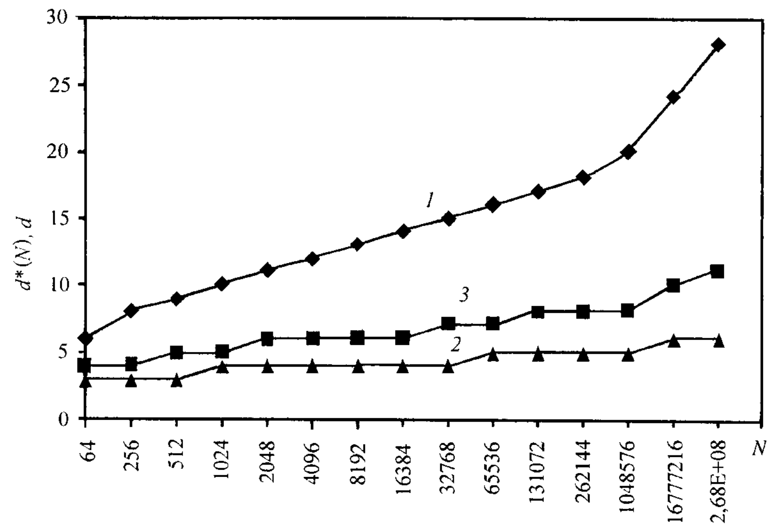

Рис. 3

Параметрические описания реально существующих близко оптимальных циркулянтных графов для ряда значений N и ν из табл. 2, полученные с помощью генетического алгоритма, представлены в [21]. Показано, что диаметры графов для значений $N = 2^{\nu}$, $\nu = 10, 12, 14, 16$, превышают точные нижние границы не более чем на две единицы.

Итак, циркулянтные графы имеют при одинаковой степени (или даже меньшей на единицу) и одинаковом числе вершин диаметр, меньший в 3 раза, чем у гиперкубов, и меньшее среднее межпроцессорное расстояние при реализации в качестве сетей связи в параллельных ВС. Соответствующие показатели для графов $R_s(N, \nu, g)$ при $s > 1$ или $g > 4$ еще выше: полученные оценки показывают, что диаметр оптимальных графов $R_s(N, \nu, g) \approx 0{,}21 \log_2 N$ по сравнению с $\log_2 N$ диаметра гиперкуба.

Таким образом, рассмотрен класс структур $R_s(N, \nu, g)$, обладающий широкими возможностями варьирования параметров и получения спектра структур с разными свойствами: от кольцевых, хордовых и гиперкубических структур на одном конце до кубически связанных циклов и циркулянтных сетей – на другом. Показано, что данный обобщенный класс графов имеет меньший диаметр, следовательно, требует значительно меньшего по сравнению с гиперкубами числа межпроцессорных обменов при решении вычислительных задач и задач системного управления, в том числе при реализации схем индивидуальных и коллективных обменов в ВС для парных (одна – одной) и полных (все – всем) межпроцессорных обменов, и является лучшим, чем топология гиперкуба, по показателям структурной живучести, самодиагностируемости, надежности и связности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Корнеев В. В.** Параллельные вычислительные системы. М.: Нолидж, 1999.
2. **Евреинов Э. В., Хорошевский В. Г.** Однородные вычислительные системы. Новосибирск: Наука, 1978.

3. **Корнеев В. В., Монахов О. Г.** Графы межмашинных связей однородных вычислительных систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 2. С. 195.
4. **Димитриев Ю. К.** Анализ самодиагностических свойств структур распределенных живучих вычислительных систем // Автометрия. 1996. № 5. С. 71.
5. **Boesch F. T., Wang J.-F.** Reliable circulant networks with minimum transmission delay // IEEE Trans. Circuits Syst. 1985. **CAS-32**. P. 1286.
6. **Монахова Э. А., Монахов О. Г.** Коллективные обмены в циркулянтных сетях параллельных вычислительных систем // Автометрия. 1997. № 6. С. 97.
7. **Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F.** Distributed loop computer networks: a survey // Journ. Parallel Distributed Comput. 1995. **24**. P. 2.
8. **Monakhova E. A.** Optimal circulant computer networks // Proc. Internat. Conf. on Parallel Comput. Technolog., PaCT-91. Novosibirsk, USSR, 1991. P. 450.
9. **Монахов О. Г.** Параметрическое описание структур однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Новосибирск, 1979. Вып. 80. С. 3.
10. **Preparata F. P., Vuillemin J.** The cube-connected cycles: a versatile network for parallel computation // Commun. ACM. 1981. **24**. P. 300.
11. **Arden B. W., Lee H.** Analysis of chordal ring networks // IEEE Trans. Comput. 1981. **C-30**. P. 291.
12. **Kwai D.-M., Parhami B.** Tight bounds on the diameter of Gaussian cubes // Computer Journ. 1998. **41**, N 1. P. 52.
13. **Kwai D.-M., Parhami B.** A generalization of hypercubic networks based on their chordal ring structures // Parallel Process. Lett. 1996. **6**, N 4. P. 469.
14. **Воробьев В. А.** Простейшие структуры однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Новосибирск, 1974. Вып. 60. С. 35.
15. **Muzychuk M. E., Tinhofer G.** Recognizing circulant graphs of prime order in polynomial time // Electronic Journ. of Combinatorics. 1998. **R25**, 5(1).
16. **Корнеев В. В.** О макроструктуре однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Новосибирск, 1974. Вып. 60. С. 17.
17. **Wong C. K., Coppersmith D.** A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comput. Mach. 1974. **21**. P. 392.
18. **Wong C. K., Maddocks J. W.** A generalized Pascal's triangle // Fibonacci Quart. 1975. **13**. P. 134.
19. **Монахова Э. А.** Об аналитическом задании оптимальных двумерных диофантовых структур однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Новосибирск, 1981. Вып. 90. С. 81.
20. **Bermond J.-C., Illiades G., Peyrat C.** An optimization problem in distributed loop computer networks // Third Internat. Conf. on Combinatorial Math., June 1985. N. Y., USA: Ann. New York Acad. Sci, 1989. **555**. P. 45.
21. **Monakhova E. A., Monakhov O. G., Mukhoed E. V.** Genetic construction of optimal circulant network designs. "Evolutionary image analysis, signal processing and telecommunications" // Proc. First European Workshops EvoIASP'99 and EuroEcTel'99. Goteborg, Sweden: Springer LNCS, 1999. **1596**. P. 215.

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
E-mail: monakhov@rav.sscc.ru

Поступила в редакцию
3 июня 1999 г.