РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 2 2000

УДК 681.324

К. В. Павский

(Новосибирск)

АНАЛИЗ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ПРОГРАММИРУЕМОЙ СТРУКТУРОЙ*

Произведен расчет среднего времени и функции осуществимости решения трудоемких задач на большемасштабных вычислительных системах (ВС) с программируемой структурой. Вывод уравнений для расчета показателей эффективности основан на допущении, что время решения задачи на ВС есть функция времени решения задачи на одной элементарной машине и эта функция имеет конечное число разрывов. Разрывы носят вероятностный характер и соответствуют отказам в ВС, которые требуют реконфигурации ВС (перенастройки структуры с учетом только исправных машин). Введено понятие сложной реконфигурации ВС и осуществлено ее исследование. Решение полученных уравнений произведено численными методами. Выводится система интегральных уравнений для расчета функции осуществимости решения задач на большемасштабных ВС. Описан параллельный алгоритм для ее вычисления.

Концепция вычислительных систем (ВС) с программируемой структурой позволяет создавать живучие средства обработки информации с теоретически неограниченной производительностью [1, 2]. Качество функционирования ВС оценивается при помощи системы показателей производительности, надежности, живучести, осуществимости решения задачи и технико-экономической эффективности [1, 3].

Функция осуществимости – это условная вероятность того, что сложная задача, представленная параллельной программой, будет решена за данное время на ВС, функционирующей с заданным числом исправных элементарных машин (ЭМ) и использующей для решения все работоспособные ЭМ. Континуальный подход, предложенный в работах [1–3], позволяет получить простые формулы для показателей эффективности большемасштабных ВС, в частности для функции осуществимости решения задач на ВС, и тем самым приводит к простой технологии экспресс-анализа качества функционирования систем.

В основу анализа времени решения сложной задачи положено представление среднего времени и функции осуществимости решения задачи через

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 97-01-00883, № 99-07-90206).

дифференциальный коэффициент ускорения решения задачи на ВС. Полученные уравнения позволяют оценить показатели осуществимости решения задачи на ВС с учетом сложной реконфигурации после отказов и восстановлений.

Расчет среднего времени решения задачи на ВС. Объектом исследования является ВС с программируемой структурой, состоящая из N не абсолютно надежных однородных ЭМ. Нам необходимо рассчитать среднее время решения параллельной задачи на ВС. Пусть задача решается на одной абсолютно надежной ЭМ за время T. Сопоставим начало решения задачи времени $t=0$, тогда время $t \in [0, T]$ будет указывать на место, в котором находится ЭМ при решении задачи. Считаем, что часть задачи, решенная за время $t+\Delta t$, складывается из частей, решаемых в промежутках $[0, t)$ и $[t, t+\Delta t)$. Обозначим через $\Omega_{[t,\, t+\Delta t)}$ часть задачи, находящуюся в решении на одной ЭМ в промежутке времени $[t, t+\Delta t)$. Тогда время решения части $\Omega_{(0,\, t]}$ задачи на ВС будем рассматривать как функцию от времени решения на одной ЭМ. В системе возникают отказы: пусть λ – интенсивность отказов каждой из ЭМ. Имеется $m \le N$ восстанавливающих устройств (ВУ), μ – интенсивность восстановления отказавших ЭМ одним ВУ. Отказ или восстановление ЭМ инициирует выполнение процедуры реконфигурации ВС, причем T_{tun} – среднее время реконфигурации. В связи с тем, что время реконфигурации не является величиной бесконечно малой, считаем, что имеет место процесс, когда очередной отказ или восстановление может возникнуть во время реконфигурации ВС. Такой процесс назовем сложной реконфигурацией.

Пусть $f(t)$ – время решения на ВС части $\Omega_{[0,\, t)}$ задачи при условии, что в момент времени $t=0$ в системе было исправно i ЭМ, $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Пусть $\aleph(f(t))$ – число исправных ЭМ в момент времени $f(t)$ при условии, что $\aleph(0)=i$, $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Считаем, что задача представлена адаптирующейся параллельной программой [1] и ее решение возможно, если в системе имеется хотя бы одна исправная ЭМ. Требуется вывести расчетную формулу для среднего значения времени $f(t)$ при заданных значениях λ, μ и T_{tun}.

Если допустить, что за время Δt не происходит отказов или восстановлений и часть $\Omega_{[t,\, t+\Delta t)}$ задачи решается на $\aleph(f(t))$ исправных ЭМ за время τ, то дифференциальный коэффициент ускорения решения задачи на ВС будет равен $k(t) = \Delta t / \tau$. Следовательно, если функция $f(t)$ в точке t не имеет разрыва, то исходя из определения $k(t)$ имеем

$$k(t) = 1/f'(t). \tag{1}$$

Известно [1], что вероятность появления более одного события (отказа или восстановления ЭМ) за малое время Δt есть величина порядка $o(\Delta t)$. Поэтому считаем, что за малое время Δt происходит не более одного отказа или восстановления. Часть $\Omega_{(0,\, t+\Delta t]}$ задачи будет решена на системе за время $f(t+\Delta t)$. Время $f(t+\Delta t)$ складывается из $f(t)$ – времени решения части $\Omega_{[0,\, t)}$ задачи на ВС, времени $k^{-1}\Delta t$ (время решения части $\Omega_{[t,\, t+\Delta t)}$ задачи на ВС) и времени реконфигурации. Время реконфигурации не является величиной бесконечно малой. Рассмотрим случай, когда очередной отказ или восстановление может возникнуть во время реконфигурации ВС. Пусть θ_j – время между j и $j+1$ отказами ЭМ в ВС во время реконфигурации, причем

$0 < \theta_j < T_{\text{tun}}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $\theta_0 = T_{\text{tun}}$. Введем функцию $\theta(l) = \sum_{j=0}^{l} \theta_j$, $\theta(l)$ – время сложной реконфигурации с l отказами. Тогда

$$f(t+\Delta t) = f(t) + k^{-1}(t)\Delta t + \delta_1(t, k^{-1}(t)\Delta t)\theta(\delta(t, k^{-1}(t)\Delta t) - \delta_1(t, k^{-1}(t)\Delta t)) \quad (2)$$

(в данной формуле значение функции $k(t)$ следует брать исходя из определения $k(t)$, но не по формуле (1), так как функция $f(t)$ не известна), где $\delta_1(t, k^{-1}(t)\Delta t)$ – функция, принимающая значение 1 (за время $k^{-1}(t)\Delta t$ начиная с момента $f(t)$) в случае отказа или восстановления ЭМ и 0, если таковых не возникло за время $k^{-1}(t)\Delta t$; $\delta_j(t, k^{-1}(t)\Delta t)$ $(j = 2, 3, \ldots)$ – функция, принимающая значение $\delta_{j-1}(t, k^{-1}(t)\Delta t)$ в случае отказа или восстановления ЭМ во время сложной реконфигурации и 0, если таковых не произошло за время реконфигурации; $\delta(t, k^{-1}(t)\Delta t) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j(t, k^{-1}(t)\Delta t)$, т. е. суммарное число отказов и восстановлений во время сложной реконфигурации. Итак, если $\delta(t, k^{-1}(t)\Delta t) > 1$, то имеем сложную реконфигурацию.

Исследуем влияние отказов и восстановлений во время реконфигурации ВС на общее время решения задачи. Пусть $\langle\delta(t, k^{-1}(t)\Delta t)\rangle$ – математическое ожидание $\delta(t, k^{-1}(t)\Delta t)$; $\pi_t(k^{-1}\Delta t)$ – вероятность отказа или восстановления одной ЭМ ВС с программируемой структурой (в момент времени $f(t)$ имеется $\aleph(f(t))$ исправных машин) за время $k^{-1}(t)\Delta t$, а $\pi_{tj}(T_{\text{tun}})$ – вероятность отказа или восстановления одной ЭМ ВС (с $\aleph(f(t) + k^{-1}\Delta t + H(j-1))$ исправными машинами) за время T_{tun} на j-й реконфигурации $(j = 1, 2, \ldots)$, возникшей в результате отказа либо восстановления на предшествующей реконфигурации (имеем сложную реконфигурацию). Обозначим через $P(\delta(t, k^{-1}(t)\Delta t) = j) = P(j)$ вероятность появления j отказов за время сложной реконфигурации $(j = 0, 1, 2, \ldots)$.

Найдем верхнюю оценку для функции $\delta(t,\ k^{-1}(t)\Delta t)$. Положим $\pi(T_{\text{tun}}) = \max_{t \in [0, T],\ j} \pi_{tj}(T_{\text{tun}})$, а $\delta_0(t,\ k^{-1}(t)\Delta t) = \delta(t,\ k^{-1}(t)\Delta t)$ при $\pi_{tj}(T_{\text{tun}}) = \pi(T_{\text{tun}})$ $(\forall j = 1, 2, \ldots)$. Тогда $0 < \delta(t, k^{-1}(t)\Delta t) \le \delta_0(t, k^{-1}(t)\Delta t)$. Следовательно,

$$P(\delta(t, k^{-1}(t)\Delta t) = 0) = 1 - \pi_t(k^{-1}\Delta t),$$

$$P(\delta(t, k^{-1}(t)\Delta t) = j) = \pi_t(k^{-1}\Delta t)\pi(T_{\text{tun}})^j(1 - \pi(T_{\text{tun}})), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

По признаку Вейерштрасса о равномерной сходимости рядов [4] имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(j) = (1 - \pi_t(k^{-1}\Delta t)) + \pi_t(k^{-1}\Delta t)(1 - \pi(T_{\text{tun}})) \sum_{j=0}^{\infty} \pi^j(T_{\text{tun}}) =$$

$$= (1 - \pi_t(k^{-1}\Delta t)) + \pi_t(k^{-1}\Delta t)(1 - \pi(T_{\text{tun}})) \frac{1}{1 - \pi(T_{\text{tun}})} = 1.$$

Итак,

$$\langle\delta_0(t,k^{-1}(t)\Delta t)\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}jP(j)=(1-\pi_t(k^{-1}\Delta t))0+$$

$$+\pi_t(k^{-1}\Delta t)(1-\pi^j(T_{\text{tun}}))\sum_{j=1}^{\infty}j\pi^{j-1}(T_{\text{tun}}).$$

Применив к полученному ряду теорему о почленном интегрировании и дифференцировании рядов, находим

$$\langle\delta_0(t,k^{-1}(t)\Delta t)\rangle=\pi_t(k^{-1}\Delta t)[1-\pi(T_{\text{tun}})]\frac{1}{[1-\pi(T_{\text{tun}})]^2}=\frac{\pi_t(k^{-1}\Delta t)}{1-\pi(T_{\text{tun}})}.$$

Аналогично произведенным выкладкам дисперсия

$$\sigma(\delta_0(t,k^{-1}(t)\Delta t))^2=\sum_{j=0}^{\infty}j^2P(j)-\left[\sum_{j=0}^{\infty}jP(j)\right]^2=$$

$$=[1-\pi_t(k^{-1}\Delta t)]0+\pi_t(k^{-1}\Delta t)[1-\pi^j(T_{\text{tun}})]\sum_{j=1}^{\infty}j^2\pi^{j-1}(T_{\text{tun}})-\delta_0(t,k^{-1}\Delta t)^2=$$

$$=\pi_t(k^{-1}\Delta t)[1-\pi(T_{\text{tun}})]\frac{1+\pi(T_{\text{tun}})}{[1-\pi(T_{\text{tun}})]^3}-\frac{\pi_t^2(k^{-1}\Delta t)}{[1-\pi(T_{\text{tun}})]^2}=$$

$$=\frac{\pi_t(k^{-1}\Delta t)(1+\pi(T_{\text{tun}})-\pi_t(k^{-1}\Delta t))}{[1-\pi(T_{\text{tun}})]^2}.$$

Откуда получаем

$$\langle\delta_0(t,k^{-1}(t)\Delta t)\rangle=\frac{\pi_t(k^{-1}\Delta t)}{1-\pi(T_{\text{tun}})},$$

$$\sigma(\delta_0(t,k^{-1}(t)\Delta t))=\frac{\sqrt{\pi_t(k^{-1}\Delta t)[1+\pi(T_{\text{tun}})-\pi_t(k^{-1}\Delta t)]}}{1-\pi(T_{\text{tun}})}.$$

Пример 1. Требуется найти выражения для $\langle\delta_0(t,\ k^{-1}(t)\Delta t)\rangle$ и $\sigma(\delta_0(t,k^{-1}(t)\Delta t))$ при условии, что $\delta_1(t,k^{-1}(t)\Delta t)=1$ (т. е. при условии, что произошел отказ системы). Тогда

$$\langle\delta_0(t,k^{-1}(t)\Delta t)\rangle=\frac{1}{1-\pi(T_{\text{tun}})},\qquad\sigma(\delta_0(t,k^{-1}(t)\Delta t))=\frac{\sqrt{\pi(T_{\text{tun}})}}{1-\pi(T_{\text{tun}})}.$$

Пример 2. Необходимо найти значения для $\langle\delta_0(t,\ k^{-1}(t)\Delta t)\rangle$, $\sigma(\delta_0(t,\ k^{-1}(t)\Delta t))$ при условии, что $\delta_1(t,\ k^{-1}(t)\Delta t)=1$, $T_{\text{tun}}=0{,}2$ ч, $\lambda=$ $=0{,}0001$ 1/ч, $n=99, N=100, \mu=1$ 1/ч.

Пусть $\pi(T_{\text{tun}}) = 1 - e^{-(\lambda n + \mu(N-n))T_{\text{tun}}}$. Из примера 1 получаем

$$\langle\delta_0(t, k^{-1}(t)\Delta t)\rangle \approx \frac{1}{0,81711} \approx 1{,}22382, \qquad \sigma(\delta_0(t, k^{-1}(t)\Delta t)) \approx \frac{0,42766}{0,81711} \approx 0{,}52338.$$

Далее считаем, что ВС с программируемой структурой выходит на последующую реконфигурацию в сложной реконфигурации только в результате отказа, а включение восстановленной ЭМ происходит после последующего отказа, тогда

$$\pi(T_{\text{tun}}) = 1 - e^{-\lambda n T_{\text{tun}}},$$

$$\langle\delta_0(t, k^{-1}(t)\Delta t)\rangle \approx \frac{1}{0,99802} \approx 1{,}00198, \qquad \sigma(\delta_0(t, k^{-1}(t)\Delta t)) \approx \frac{0,04448}{0,99802} \approx 0{,}04456.$$

Итак, на основе полученных значений $\langle\delta_0(t, k^{-1}(t)\Delta t)\rangle$ и $\sigma(\delta_0(t, k^{-1}(t)\Delta t))$ возникновение более одного отказа в режиме реконфигурации считаем невозможным.

Примем тот факт, что надежность современных средств вычислительной техники выше тех, что рассмотрены в примере 2. Поэтому будем рассматривать системы, для которых справедливо допущение о возникновении не более одного отказа во время реконфигурации ВС.

На основе полученных результатов (см. примеры 1 и 2) и условия $0 < \delta(t, k^{-1}(t)\Delta t) \le \delta_0(t, k^{-1}(t)\Delta t)$ считаем, что $0 < \delta(t, k^{-1}(t)\Delta t) \le 2$ (т. е. $\delta_3(t, k^{-1}(t)\Delta t) = 0$). Следовательно, в силу дискретности $\delta(t, k^{-1}(t)\Delta t)$ и малых значений λ, T_{tun} имеем простую формулу

$$\delta(t, k^{-1}(t)\Delta t) = \frac{\pi_t(k^{-1}\Delta t)}{1 - \pi_{t1}(T_{\text{tun}})}.$$

При экспоненциальном законе отказов и восстановлений на малом интервале $k(t)^{-1}\Delta t$ вероятность $\pi_t(k^{-1}(t)\Delta t)$ равна

$$\pi_t(k^{-1}\Delta t) = k^{-1}(t)\Delta t(\lambda\aleph(f(t)) + \mu_t),$$

$$\mu_t = \begin{cases} m\mu, & m \le N - \aleph(f(t)), \\ (N - \aleph(f(t)))\mu, & m > N - \aleph(f(t)). \end{cases}$$

Тогда $f(t+\Delta t) = f(t) + k^{-1}(t)\Delta t + U(t)k^{-1}(t)\Delta t$, где

$$U(t) = (\lambda\aleph(f(t)) + \mu_t)\left[T_{\text{tun}}[1 - \pi_{t1}(T_{\text{tun}})] + \theta\left(\frac{2\pi_{t1}(T_{\text{tun}}) - \pi_{t1}(T_{\text{tun}})^2}{1 - \pi_{t1}(T_{\text{tun}})}\right)\right].$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) = k^{-1}(t)[1 + U(t)].$$

Итак, получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка [5]:

$$f'(t)=k^{-1}(t)(1+U(t)),\quad f(0)=0,\quad \aleph(0)=i. \tag{3}$$

Выражение (3) может быть записано иначе:

$$f(t)=\int_0^t k^{-1}(x)[1+U(x)]dx,\qquad t\in[0,T]. \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) служат для вычисления среднего времени решения задачи на ВС с программируемой структурой (из N ЭМ с интенсивностью отказа λ каждой ЭМ, интенсивностью восстановления μ отказавшей ЭМ и временем переключения ВС T_{tun}).

Решение уравнений (3), (4) можно искать численными методами. Для расчета $f(t)$ предлагается рекуррентная формула

$$f_{j+1}=f_j+k_{n_j}^{-1}h+T_{\text{tun}}\delta_1(jh,k_{n_j}^{-1}h)+\theta\,[\delta(jh,k_{n_j}^{-1}h)-\delta_1(jh,k_{n_j}^{-1}h)],$$

$$f_0=0,\quad n_0=i,\quad 0\le j<M, \tag{5}$$

где $f_j=f(jh)$; $k_{n_j}=k(jh)$; $Mh=T$. Значение n_j моделируется по функциям распределения времени отказов и восстановлений ЭМ [1].

Другое решение имеет вид:

$$f_{j+1}=f_j+k_{n_j}^{-1}h[1+U(jh)],\qquad f_0=0,\ \ n_0=i,\ \ 0\le j<M. \tag{6}$$

Здесь в качестве n_j используется математическое ожидание числа исправных машин $\aleph(f_j)$ в момент времени f_j.

П р и м е р 3. Положим для (5) $T=1000$ ч, $N=30$ ЭМ, $i=29$ ЭМ, $\lambda=0{,}001$ 1/ч, $\mu=0{,}9$ 1/ч, $m=1$ ВУ. Графическое отображение функций $f(t)$, $K(t)$ представлено на рис. 1 и 2 как $f_1(t)$ и $K_1(t)$ при $T_{\text{tun}}=0{,}2$ ч, $f_2(t)$ и $K_2(t)$ при $T_{\text{tun}}=0$ ч. Откуда имеем следующие значения для $f(T)$ и $K(t)$: $f_1(T)=$ $=34{,}892$, $K_1(f(T))=28{,}658$, $f_2(T)=33{,}492$, $K_2(T)=29{,}856$.

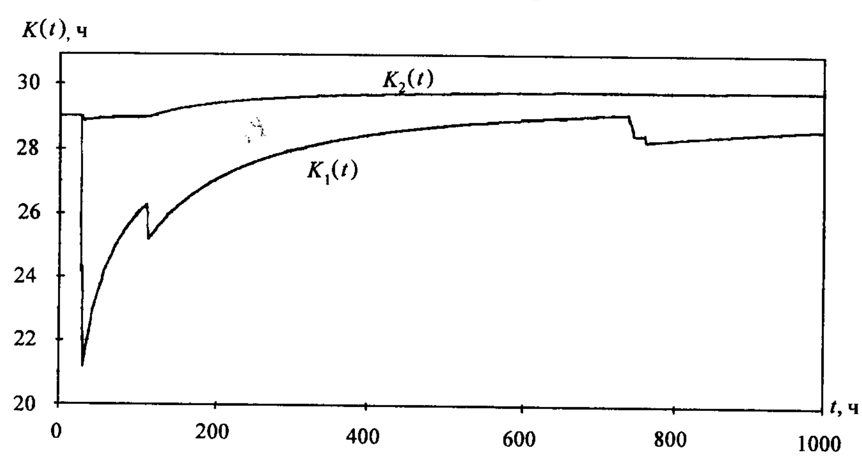

Рис. 1

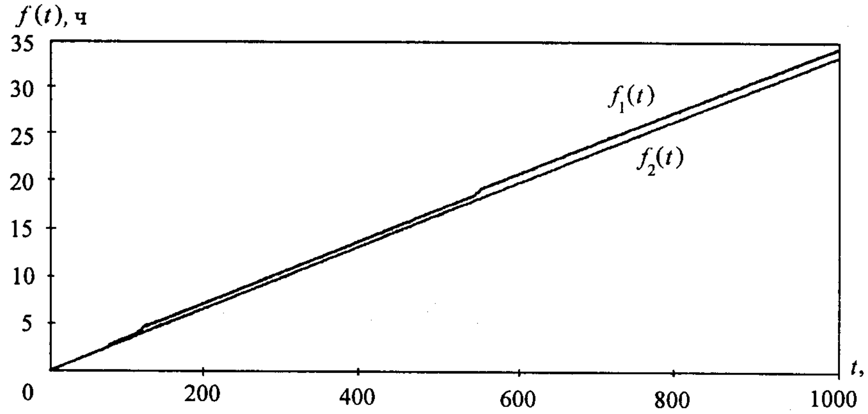

Рис. 2

Значения функций $f(t)$, $K(t)$ алгоритма (6) в сравнении с (5) имеют отличия во втором знаке после запятой при $h = 0{,}05$ ч. Исследования показали, что при малом T_{tun}, небольшом числе отказов и восстановлений l ($lT_{\text{tun}} \ll T$) за время T величина T_{tun} заметно не влияет на значения $f(T)$ и $k(T)$ (см. рис. 1 и 2).

Функция осуществимости решения задачи на ВС. Перейдем к модели для расчета вероятности решения задачи на ВС с программируемой структурой за время $f(T)$ при числе отказов и восстановлений не больше чем l.

Введем обозначения: $P_n(f(t), l, i)$ – вероятность того, что за время $f(t)$ на ВС будет решена $\Omega_{[0,\,t)}$ часть задачи при условии, что в момент времени $f(t)$ и в начальный момент времени было n и i работоспособных ЭМ соответственно и за время $f(t)$ в ВС произошло l отказов и восстановлений ЭМ; $P_{\text{rec}}(n, f(t))$ – вероятность восстановления одной неисправной ЭМ за время $f(t)$ при отказе $(N-n)$ ЭМ и $m \le N$ восстанавливающих устройств; $P_{\text{flt}}(n, f(t))$ – вероятность отказа любой ЭМ из n исправных ЭМ за время $f(t)$; $V_{\text{flt}}(n, f(t))$ – вероятность безотказной работы ВС из n исправных ЭМ за время $f(t)$; $V_{\text{rec}}(n, f(t))$ – вероятность невосстановления любой неисправной ЭМ за время $f(t)$ при отказе $(N-n)$-й ЭМ и наличии $m \le N$ восстанавливающих устройств; $W_n(f(t)) = V_{\text{rec}}(n, f(t))V_{\text{flt}}(n, f(t))$ – вероятность того, что в течение интервала времени t не произойдут отказы или восстановления на ВС из n ЭМ.

При экспоненциальном законе отказов с интенсивностью отказа λ каждой ЭМ на ВС из n исправных ЭМ и интенсивностью восстановления $\mu(n)$ для $(N-n)$ отказавших ЭМ величины $P_{\text{flt}}(n, f(t))$, $P_{\text{rec}}(n, f(t))$, $V_{\text{flt}}(n, f(t))$, $V_{\text{rec}}(n, f(t))$ полагают равными [1]:

$$P_{\text{rec}}(n, f(t)) = \mu(n) f(t) \exp(-\mu(n) f(t)), \qquad P_{\text{flt}}(n, f(t)) = \lambda n f(t) \exp(-\lambda n f(t)),$$

$$V_{\text{rec}}(n, f(t)) = \exp(-\mu(n) f(t)), \qquad V_{\text{flt}}(n, f(t)) = \exp(-\lambda n f(t)).$$

Пусть за промежуток времени $[0, f(\tau))$ произошло $(l-1)$ отказов и в момент $f(\tau)$ $(\tau < t)$ происходит отказ, тогда получаем, что [6]

$$P_n(f(t), l, i) = P_{n+1}(f(\tau), l-1, i) P_n(f(t) - f(\tau) + T_{\text{tun}}, 0, i) \times$$
$$\times\, d(P_{\text{flt}}(n+1, f(\tau)) V_{\text{rec}}(n+1, f(\tau))), \quad 1 \le n < N.$$

Функция $f(t)$ находится из равенства $f(\tau)=f(t)-k^{-1}(f(t))(t-\tau)[1+U(t)]$ при условии, что начиная с момента $f(\tau)$ в течение интервала времени $k^{-1}(f(t))(t-\tau)$ на ВС с программируемой структурой из $\aleph(f(t))$ исправных ЭМ не произойдет отказа или восстановления.

Далее, допуская, что за промежуток времени $[0, f(\tau))$ произошло $(l-1)$ отказов и в момент $f(\tau)(\tau<t)$ происходит отказ или восстановление ЭМ, и замечая, что $P_n(f(t)-f(\tau)+T_{\text{tun}}, 0, i)=W_n((t-\tau)k_n^{-1})$ (где k_n – ускорение решения задачи на n ЭМ, которое, для простоты, считаем не зависящим от части решаемой задачи), получаем

$$P_n(f(t),l,i)=P_{n+1}(f(\tau),l-1,i)W_n((t-\tau)k_n^{-1})\times$$

$$\times d(P_{\text{flt}}(n+1,f(\tau))V_{\text{rec}}(n+1,f(\tau)))+P_{n-1}(f(\tau),l-1,i)W_n((t-\tau)k_n^{-1})\times$$

$$\times d(P_{\text{rec}}(n-1,f(\tau))V_{\text{flt}}(n-1,f(\tau))),\quad 1<n<N.$$

Считаем, что происходит l отказов и восстановлений ЭМ на ВС с программируемой структурой за время $f(t)$. Следовательно, вероятности $P_n(f(t),l,i)$ находятся из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&P_1(f(t),l,i)=\int_0^t P_2(f(\tau),l-1,i)W_1(t-\tau)d(P_{\text{flt}}(2,f(\tau))V_{\text{rec}}(2,f(\tau))),\\
&P_n(f(t),l,i)=\int_0^t P_{n+1}(f(\tau),l-1,i)W_n((t-\tau)k_n^{-1})\times\\
&\times d(P_{\text{flt}}(n+1,f(\tau))V_{\text{rec}}(n+1,f(\tau)))+\int_0^t P_{n-1}(f(\tau),l-1,i)W_n((t-\tau)k_n^{-1})\times\\
&\times d(P_{\text{rec}}(n-1,f(\tau))V_{\text{flt}}(n-1,f(\tau))),\quad 2\le n\le N-1,\\
&P_N(f(t),l,i)=\int_0^t P_{N-1}(f(\tau),l-1,i)W_N((t-\tau)k_N^{-1})\times\\
&\times d(P_{\text{rec}}(N-1,f(\tau))V_{\text{flt}}(N-1,f(\tau))),\\
&P_n(f(\tau),0,i)=\begin{cases}W_n(f(\tau)), & (\tau k_n^{-1}\le f(\tau))\wedge(n=i),\\ 0, & (\tau k_n^{-1}>f(\tau))\vee(n\ne i).\end{cases}
\end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Для расчета $P(f(T),l,i)$ достаточно воспользоваться выражением

$$P(f(T),l,i)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=0}^{l}P_n(f(T),j,i). \quad (8)$$

Параллельный алгоритм 1. Необходимо решить (7) на $\aleph$ ЭМ. Самый простой подход – распараллеливание по $P_n(f(t),l,i)$. Вероятности $P_n(f(t),l,i)$ рассчитываются на определенной ЭМ в зависимости от n. Очевидно, что недостаток такого алгоритма – неравномерная загрузка ЭМ; число $\aleph$, обрабатываемых ЭМ в ВС, не может превышать N.

Прежде чем перейдем к следующему параллельному алгоритму, рассмотрим

Пример 4. Пусть $\aleph$ – число ЭМ в ВС. Необходимо разбить вычисление $F(T)=\int_0^T f(x)dx$ на $\aleph$ независимых вычислений. Исходя из свойств определенных интегралов, можно записать: $F(T)=\sum_{i=1}^{\aleph}\int_{T_{i-1}}^{T_i} f(x)dx$, где $\sum_{i=1}^{\aleph}(T_i - T_{i-1}) = T, T_0 = 0, T_\aleph = T$. Пусть тогда каждая ЭМ с номером $i\,(i=1,\ldots,\aleph)$ обрабатывает $F_i(T_i)=\int_{T_{i-1}}^{T_i} f(x)dx$, после чего в корневой ЭМ собираем $F_i(T_i)$ $(i=1,\ldots,\aleph)$ и находим $F(T)=\sum_{i=1}^{\aleph}F_i(T_i)$.

Параллельный алгоритм 2. По аналогии с примером 4 вычисление каждого из интегралов для $P_n(f(t),l,i)$ системы уравнений (7) разбиваем на $\aleph$ частей.

Параллельный алгоритм 2 был реализован в транспьютерной вычислительной системе с программируемой структурой Микрос-Т [2]. Результаты распараллеливания алгоритма 2 представлены на рис. 3. Здесь $T=1000$ ч, $f(T)=30$ ч, $N=5$ ЭМ, $i=4$ ЭМ, $\lambda=0{,}001$ 1/ч, $\mu=0{,}9$ 1/ч, $m=1$ ВУ, $l=3$, $K(j)=T_1/T_j$ – ускорение обработки вычислений на j ЭМ, где T_j – время вычислений на j ЭМ.

Формулы (3), (4), (7) и (8) могут быть использованы для расчета среднего времени решения, а также вероятности решения за заданное время параллельной задачи, требующей больших временных затрат на ВС с программируемой структурой (например, для задач обработки потока изображений из фиксированного числа кадров).

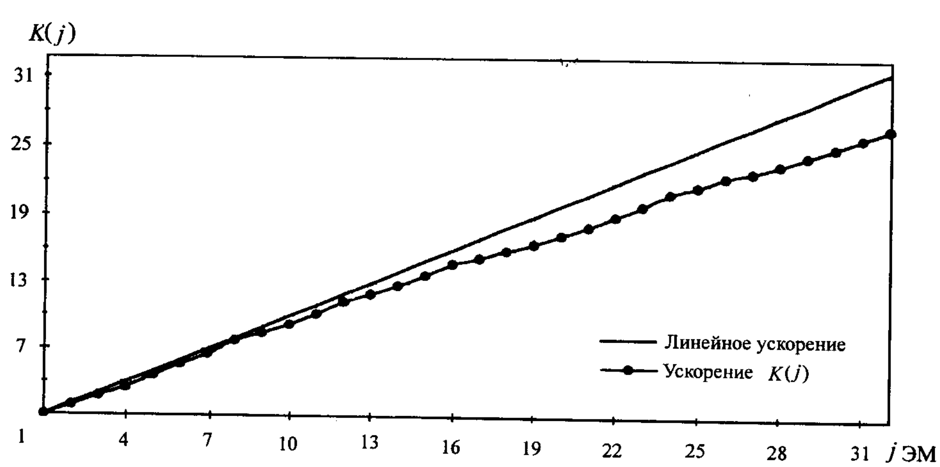

Рис. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хорошевский В. Г.** Инженерный анализ функционирования вычислительных машин и систем. М.: Радио и связь, 1987.
2. **Khoroshevsky V. G.** MICROS: a family of large-scale distributed programmable structure computer systems // Proc. Sixth Internat. Workshop on Distributed Data Process. Novosibirsk: RAS Siberian Branch Publ., 1998. P. 65.
3. **Khoroshevsky V. G.** Modelling of large-scale distributed computer systems // Proc. 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Mathematics /Ed. A. Sydow. Berlin: Wissenschaft und Technic Verlag, 1997. V. 6. P. 359.
4. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 2.
5. **Филиппов А. Ф.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1992.
6. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988.

Институт физики полупроводников СО РАН,
E-mail: pkv@isp.nsc.ru

Поступила в редакцию
1 апреля 1999 г.