

УДК 621.39 : 519.28 : 539.122 : 543.257.1 : 622.7.092

А. М. Онищенко

(Люберцы Московской обл.)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНЫХ ПРИБОРОВ

Описан подход к оптимизации многомерных приборов по критерию минимума суммарной погрешности. Погрешность уменьшается выбором как оптимальной структуры датчика и типов источников излучения, так и энергий источников и параметров объекта контроля. Оптимизация состоит в выборе энергий γ -излучения и поверхности пробы, при которых погрешность минимальна. Для определения оптимальных значений энергий и насыпной плотности строят зависимости погрешности от параметров. Описанный подход снижает погрешности более чем на порядок без усложнения прибора, в то время как классический подход связан с усложнением прибора в 2 раза для снижения погрешности на 10 %.

Информационный блок (датчик) многомерного радиоизотопного прибора для совокупных измерений в общем случае состоит из m источников излучения разных типов или разной энергии I_1, \dots, I_m и l детекторов D_1, \dots, D_l , причем $l \geq m$, так как один источник может давать несколько лучей (ослабленный, рассеянный в направлении вперед, обратнорассеянный и т. д.). По n сигналам детекторов N_1, \dots, N_n (где $n \geq l$, так как с одного спектрометрического детектора снимают несколько сигналов, соответствующих разным энергиям регистрируемого излучения) определяют k параметров объекта контроля (ОК) ($k \leq n$).

Оптимизация прибора заключается в выборе структуры датчика, типов излучения и энергий источников, параметров ОК и геометрических параметров датчика, обеспечивающих минимум методических погрешностей (МП) определения параметров ОК. При выборе структуры датчика учитывают место прибора в технологической цепи, так как может оказаться, что прибор, определяющий параметры ОК в подготовленной аналитической пробе с относительной погрешностью 1 %, окажется для цели менее точным, чем, например, прибор, определяющий параметры ОК непосредственно в транспортном потоке с относительной МП, равной 20 %.

Для выбранных структуры и типов источников записывают связь сигналов N_1, \dots, N_n с параметрами ОК и прибора. Решая систему относительно искомого параметра ОК, получим систему уравнений связи. Обозначим: I – интенсивность излучения от ОК на детектор; x_l – измеряемый параметр (ИП); x_j, x_k – влияющие параметры (ВП) ОК; $\sigma_{jl}^2, \sigma_{kl}^2$ – условные дисперсии

Погрешности определения значений x_k из (2) зависят не только от σ_{ik} и σ_i , но и от свойства матрицы, названного ее обусловленностью. Если в качестве критерия эффективности блока принят минимум приведенной погрешности по всем лучам, то при оптимизации используют число обусловленности на основе нормы матрицы, вычисляемой как минимум сумм модулей чувствительностей по строкам. Наивысшая точность совокупных измерений достигается при выборе вектора чувствительностей к параметрам ОК, который имел бы матрицу A с единичным числом обусловленности. При проектировании блока выбирают совокупность сигналов N , которая была бы связана с вектором ИП X ортогональной или унитарной матрицей, так как они имеют близкую к единичной обусловленность. Полагая погрешности σ_{ik} некоррелированными с сигналами N_1, N_2 и N_3 , для погрешности определения второго параметра трехлучевым прибором получим

$$\sigma_2 = D^{-2} \left\{ \begin{aligned} & D^2 [\sigma_1^2 (S_{23}S_{31} - S_{21}S_{33})^2 + \sigma_2^2 (S_{11}S_{33} - S_{13}S_{31})^2 + \\ & + \sigma_3^2 (S_{13}S_{21} - S_{11}S_{23})^2] + D_2^2 [\sigma_{12}^2 (S_{23}S_{31} - S_{21}S_{33})^2 + \\ & + \sigma_{22}^2 (S_{11}S_{33} - S_{13}S_{31})^2 + \sigma_{32}^2 (S_{13}S_{21} - S_{11}S_{23})^2] + \\ & + \sigma_{11}^2 [D(N_2S_{33} - N_3S_{23}) - D_2(S_{22}S_{33} - S_{13}S_{31})]^2 + \\ & + \sigma_{13}^2 [D(N_3S_{21} - N_2S_{31}) - D_2(S_{21}S_{32} - S_{22}S_{31})]^2 + \\ & + \sigma_{21}^2 [D(N_3S_{13} - N_1S_{33}) - D_2(S_{32}S_{13} - S_{12}S_{33})]^2 + \\ & + \sigma_{23}^2 [D(N_1S_{31} - N_3S_{11}) - D_2(S_{12}S_{31} - S_{11}S_{32})]^2 + \\ & + \sigma_{31}^2 [D(N_1S_{23} - N_2S_{13}) - D_2(S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22})]^2 + \\ & + \sigma_{33}^2 [D(N_2S_{11} - N_1S_{21}) - D_2(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21})]^2 \end{aligned} \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Аналогично для погрешности определения второго параметра двухлучевым прибором найдем

$$\sigma_2' = \left[\begin{aligned} & (S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21})^2 (\sigma_1^2 S_{21}^2 + \sigma_2^2 S_{11}^2) + \\ & + \sigma_{11}^2 (N_1S_{21}S_{22} - N_2S_{12}S_{21})^2 + \\ & + (N_2S_{11} - N_1S_{21})^2 (\sigma_{12}^2 S_{21}^2 + \sigma_{22}^2 S_{11}^2) + \\ & + \sigma_{21}^2 (N_2S_{11}S_{12} - N_1S_{22}S_{11})^2 \end{aligned} \right]^{1/2} (S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21})^{-2}. \quad (4)$$

Полагая σ_{ik} некоррелированными с сигналами $N_1, N_2, \dots, N_k, N_n$, а погрешности σ_i некоррелированными с S_{ik} , запишем формулу погрешности σ_k определения параметра x_k в виде

$$\sigma_k = D^{-2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_k}{\partial N_i} \right)_0^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_k}{\partial S_{ik}} \right)_0^2 \sigma_{ik}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_k}{\partial S_{ik}} \right)_0^2 \sigma_{ik}^2 \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

По формулам (1)–(5) рассчитывают погрешности блоков и проводят их оптимизацию по минимуму погрешностей. При нелинейной зависимости N от параметров ОК и нахождении математического ожидания и дисперсии сигнала

В этой формуле частные определители Остроградского примут вид

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, N_i, x_{i+1}, \dots, x_n)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial N_i} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial N_i} & \frac{\partial F_2}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial F_n}{\partial N_i} & \frac{\partial F_n}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Множитель C является обратной величиной определителя Остроградского или якобиана.

Подход оптимизирует приборы, где σ_i не коррелированы между собой и с N_i , а чувствительности $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ik}, \dots, S_{in}$ не коррелированы при вариациях параметров блока, параметров ОК и энергий источников. Эти допущения не всегда выполняются [3]. Поэтому рассмотрим случаи оптимизации блоков, в которых допущения не выполняются. Рассмотрим оптимизацию двухлучевого прибора для экспресс-контроля состава смесей в пробах, которая не освещена в литературе. МП определения содержания второго компонента $\sigma'(c_2)$ запишется как

$$\sigma'(c_2) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\mu_3'' - \mu_1'')^2}{n_1 (\rho d)^2} \left[1 + \frac{1}{2n_1} + (1 - (r'_{\rho d 2})^2) D'(\rho d) \frac{1}{(\rho d)^2} \right] + \\ & + (1 - (r'_{\rho d 2})^2) D'(c_4) [(\mu_3' - \mu_1')(\mu_4'' - \mu_1'') - (\mu_3'' - \mu_1'')(\mu_4' - \mu_1')]^2 + \\ & + \frac{(\mu_3' - \mu_1')^2}{n_2 (\rho d)^2} \left[1 + \frac{1}{2n_2} + (1 - (r'_{\rho d 2})^2) D'(\rho d) \frac{1}{(\rho d)^2} \right] + \\ & + (1 - (r'_{\rho d 2})^2) D'(\rho d) \left[\frac{1}{(\rho d)^4} + \frac{2(1 - (r'_{\rho d 2})^2) D'(\rho d)}{(\rho d)^6} \right] \times \\ & \times [(\mu_3'' - \mu_1'')(\ln n_1 - \ln n_0) - (\mu_3' - \mu_1')(\ln n_2 - \ln n_0)]^2 \\ & \times [(\mu_3'' - \mu_1'')(\mu_2' - \mu_1') - (\mu_3' - \mu_1')(\mu_2'' - \mu_1'')]^{-1} \end{aligned} \right\}^{1/2} \times \quad (10)$$

Оптимизация состоит в выборе энергий E_{10} и E_{20} и поверхностной плотности пробы, при которых $\sigma'(c_2)$ будет наименьшей. Плотность ρd легко стабилизировать, засыпая при каждом измерении проб постоянную массу в ту же кювету. Тогда пробы разной плотности ρ будут заполнять кювету на разную высоту d , а $\rho d = \text{const}$. Уменьшить изменения ρ можно искусственным уплотнением проб в кювете, чтобы каждая заполняла кювету на одну высоту, или расположением источников и детекторов на одинаковых расстояниях от

пробы, больших, нежели d . С точки зрения оптимизации энергий E_{10} и E_{20} , соответствующих минимуму $\sigma'(c_2)$, представляет интерес зависимость $\sigma'(c_2) = f(E_1, E_2)$. Однако формул, аппроксимирующих точно зависимости $\mu = f(E)$, не найдено. Поэтому $\sigma'(c_2) = f(E_1, E_2)$ могут быть получены лишь с помощью расчетов по (10) с использованием табулированных в [4] данных массовых коэффициентов ослабления γ -излучения различной энергии химическими элементами.

Чтобы предопределить заранее оптимальные энергии E_{10} , E_{20} и $(\rho d)_{\text{opt}}$ для различных материалов по модели (10), построим зависимости $\sigma'(c_2) = f(E_1, E_2, \rho d)$. На рис. 1 показано влияние E_1 и E_2 на $\sigma'(c_2)$ измерения второго компонента в угле $C_C + C_{Al} + C_{Fe} + C_{Ca} = 1$ (рис. 1, а) и полиметаллической руде $C_{Ca} + C_{Zn} + S_{Sm} + C_{Mo} = 1$ (рис. 1, б) при условных дисперсиях вариаций четвертого компонента $D'(c_4) = 0,1$, содержаниях компонентов $c_1 = 0,8$, $c_2 = 0,16$, $c_3 = 0,003$, $c_4 = 0,001$ и активностях источников, эффективностях детекторов и времени измерения, соответствующих $N'_0 = N''_0 = 10^{10}$. На графиках отложены погрешности $\sigma'(c_2)$, рассчитанные при $(\rho d)_{\text{opt}}$ по минимуму погрешности. Графики построены в виде $\sigma'(c_2) = f(E_2)$ для различных энергий E_1 .

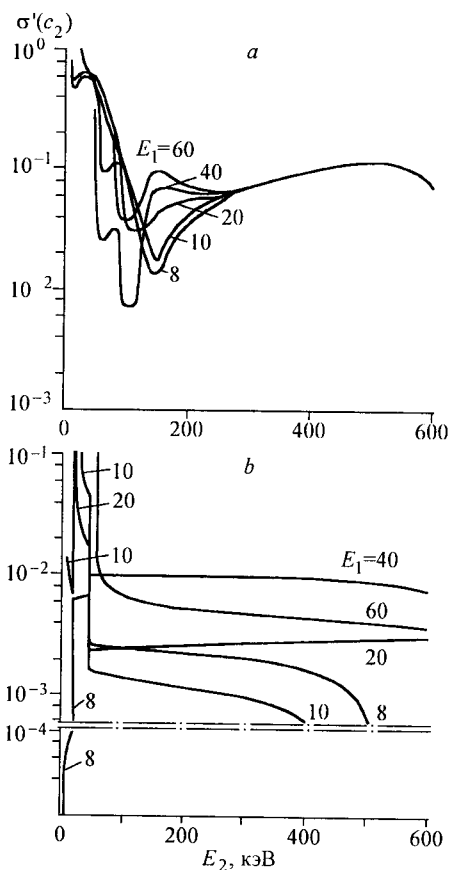


Рис. 1. Зависимости погрешности $\sigma'(c_2)$ определения алюмосиликатов в угле (а), Zn в полиметаллической руде (б) от энергии E_2 при различных значениях энергии E_1

В обоих показанных на рис. 1 случаях наблюдается колебание содержания не самого тяжелого компонента в материале. Видно, что $\sigma'(c_2)$ изменяется более чем на два порядка с изменением энергий, поэтому выбор E_{10}, E_{20} концентратомера – необходимое и важное средство повышения точности. Графики иллюстрируют резкую зависимость $\sigma'(c_2)$ от E_1 и E_2 в области $E_1 < 200$ и $E_2 < 200$ кэВ и слабую зависимость от E в области $E_1 > 200$ и $E_2 > 200$ кэВ. Видно, что малую погрешность $\sigma'(c_2) = 0,0072$ обеспечивает прибор контроля зольности угля с $E_{10} = 40$ и $E_{20} = 105$ кэВ при $(\rho d)_{\text{opt}} = 11,9$ г/см². С увеличением дисперсии $D'(c_4)$ значения оптимальных энергий не изменяются, а $\sigma'(c_2)$ растет пропорционально $D'(c_4)$. Наименьшую погрешность определения содержания цинка в полиметаллической руде $\sigma'(c_2) = 10^{-4}$ обеспечивает двухлучевой концентратомер с $E_{10} = 8$ и $E_{20} = 16$ кэВ при $(\rho d)_{\text{opt}} = 2$ г/см². Анализ кривых $\sigma'(c_2) = f(E_2)$ для различных смесей показал, что если в четырехкомпонентной смеси изменяется содержание легкого или среднего компонентов, то значения E_{10} и E_{20} будут на 10–15 % выше, чем в случае колебаний более тяжелого компонента. С ростом содержания тяжелых компонентов в смесях при энергиях источников, превышающих энергию K -края поглощения наиболее тяжелого компонента смеси, значение E_{10} увеличивается на 20–50 %, а E_{20} – на 50–100 %. При близких к K -краям энергиях (как для кривых на рис. 2) с изменением содержания тяжелых элементов значения энергий не изменяются.

Модель погрешности (10) и полученные результаты справедливы для оптимизации параметров двухлучевых концентратомеров четырехкомпонентных веществ, в которых по двум сигналам определяют с наименьшей погрешностью содержание любых двух компонентов (или их сумм). Задача несколько упрощается в случае анализа двухлучевым прибором трехкомпонентной смеси. Здесь по двум сигналам N_1 и N_2 совместно с условием $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ можно определить содержание всех трех компонентов. Формула для расчета погрешности определения второго компонента может быть получена из (10) заменой $D'(c_4) = 0$.

На рис. 2 показаны расчетные зависимости погрешности $\sigma''(c_2)$ определения содержания второго компонента: $C_C + C_{Al} + C_{Fe} = 1$ (рис. 2, a), $C_{Al} + C_{Ca} + C_{Fe} = 1$ (рис. 2, b), $C_{Ca} + C_{Cu} + C_{Mo} = 1$ (рис. 2, c), $C_{Ca} + C_{Zn} + C_{Sn} = 1$ от E_2 для различных E_1 (рис. 2, d). Принято содержание компонентов: $c_1 = 0,8$, $c_2 = 0,16$, $c_3 = 0,04$ и $N'_0 = N''_0 = 10^{10}$. Зависимости рассчитаны для значений $(\rho d)_{\text{opt}}$, соответствующих $\sigma''(c_2)$. Анализ показал, что на любом графике $\sigma''(c_2) = f(E_2)$ наблюдается один или два минимума, а минимум минимумом МП $\sigma''(c_2)$ для разных материалов – при разных энергиях излучения. В таких случаях $\sigma''(c_2) = f(E_2)$. По этим зависимостям определялись оптимальные значения (ρd) при 5 %-ной погрешности взвешивания проб, когда $(\rho d)^{-1} \sqrt{D(\rho d)} = 0,05$ для графиков на рис. 1 и 2. С ростом N'_0 и N''_0 степень влияния (ρd) на $\sigma'(c_2) = f(E_2)$ или $\sigma''(c_2) = f(E_2)$ уменьшается ввиду того, что график становится более пологим (начинают превалировать другие составляющие погрешностей над статистической погрешностью), хотя значение $(\rho d)_{\text{opt}}$ при этом не изменяется. Анализ зависимостей $(\rho d)_{\text{opt}} = f(E_1, E_2)$ позволил установить, что значение $(\rho d)_{\text{opt}}$, соответствующее минимуму $\sigma'(c_2)$, удовлетворяет условиям:

$$\mu'(\rho d)_{\text{opt}} = (\rho d)_{\text{opt}} (\mu'_1 c_1 + \mu'_2 c_2 + \mu'_3 c_3 + \mu'_4 c_4) > 2,$$

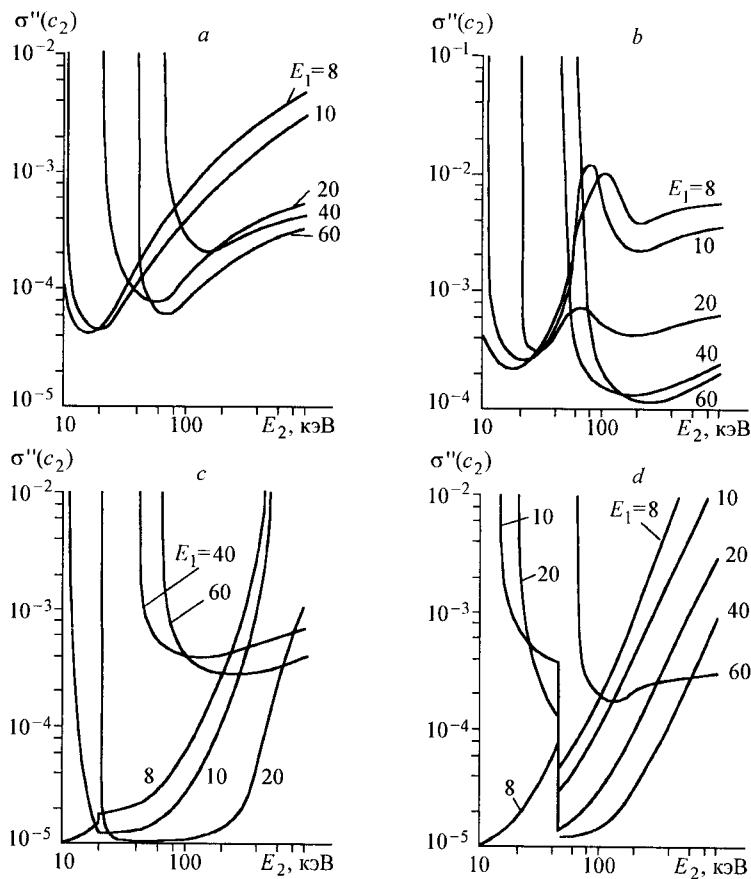


Рис. 2. Зависимости погрешности $\sigma''(c_2)$ измерения зольности угля (а), Са в железной руде (b), Си в медной руде (с) и Zn в полиметаллической руде (d) от энергии E_2 при разных E_1

$$\mu''(\rho d)_{\text{opt}} = (\rho d)_{\text{opt}} (\mu_1'' c_1 + \mu_2'' c_2 + \mu_3'' c_3 + \mu_4'' c_4) > 2.$$

Приравняв в неравенствах $c_4 = 0$, получим условия оптимальности $(\rho d)_{\text{opt}}$ для минимума $\sigma''(c_2)$. На рис. 3 показано, как изменяется $(\rho d)_{\text{opt}}$ проб угля от E_1 и E_2 в условиях, для которых рассчитаны графики.

Применяя эту методику, можно определить заранее оптимальные значения E_{10} и E_{20} и $(\rho d)_{\text{opt}}$ для концентратомера любого наперед заданного материала и таким образом значительно ускорить его разработку и более чем на порядок снизить погрешность. Методика распространяется на оптимизацию двухлучевых концентратомеров по минимуму суммарной погрешности измерения содержания двух компонентов в материале, например, погрешностей измерения содержания второго $\sigma'(c_2)$ и третьего $\sigma'(c_3)$ компонентов. Формула для погрешности $\sigma'(c_3)$ по аналогии с (10) запишется в виде

$$\sigma(c_3) = [(\mu_2' - \mu_1')(\mu_4'' - \mu_1'') - (\mu_2'' - \mu_1'')(\mu_3' - \mu_1')]^{-1} \times$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\mu_2'' - \mu_1''}{N_1 (\rho d)^2} \left[1 + \frac{1}{2N_1} + (1 - r_{\rho d 3}'^2) \frac{D'(\rho d)}{(\rho d)^2} \right] + \\ & + \frac{(\mu_2' - \mu_1')^2}{N_2 (\rho d)^2} \left[1 + \frac{1}{2N_2} + (1 - r_{\rho d 3}'^2) \frac{D'(\rho d)}{(\rho d)^2} \right] + \\ & \times \left. + (1 - r_{\rho d 3}'^2) D'(\rho d) \left[\frac{1}{(\rho d)^4} + \frac{2(1 - r_{\rho d 3}'^2) D'(\rho d)}{(\rho d)^6} \right] \times \right\}^{1/2} \\ & \times [(\mu_2'' - \mu_1'')(\ln N_1 - \ln N_0') - (\mu_2' - \mu_1')(\ln N_2 - \ln N_0'')]^2 + \\ & + (1 - r_{\rho d 3}'^2) D'(c_4) [(\mu_2' - \mu_1')(\mu_4'' - \mu_1'') - (\mu_2'' - \mu_1'')(\mu_4' - \mu_1')]^2 \end{aligned} \right\} .$$

Построив расчетные зависимости $\sigma'(c_2) + \sigma'(c_3) = f(E_2)$ для различных значений E_1 , определим E_{10} и E_{20} , соответствующие $\sigma'(c_2) + \sigma'(c_3) = \min$. В некоторых задачах более важно измерять с меньшей МП состав материалов при разных энергиях E_{10} и E_{20} . Так, оптимальный прибор контроля зольности угля должен иметь источники с энергиями $E_{10} = 60$ и $E_{20} = 240$ кэВ, оптимальный измеритель содержания меди — $E_{10} = 20$ и $E_{20} = 30$ кэВ, а оптимальный измеритель содержания цинка — $E_{10} = 40$ и $E_{20} = 505$ кэВ.

На основе анализа кривых, подобных $\sigma''(c_2) = f(E_2)$, для различных E_1 и неодинаковых по составу материалов резюмируем, что с ростом среднего атомного номера материала повышаются E_{10} и E_{20} . Если энергия первого источника лишь незначительно превышает энергию К-края ослабления наиболее тяжелого компонента материала, то на графике $\sigma''(c_2) = f(E_2)$ наблюдается достаточно пологий минимум, так что изменения в значительных пределах E_2 практически не сказываются на МП $\sigma''(c_2)$ (см., например, кривую $\sigma''(c_2) = f(E_2)$ при $E_{10} = 20$ кэВ на рис. 2, с, когда $\sigma''(c_2)$ не изменяется при вариациях E_2 от 30 до 100 кэВ). Если же $E_1 < E_k$ для наиболее тяжелого компонента, то на зависимости $\sigma''(c_2) = f(E_2)$ при $E_2 = E_k$ наблюдается разрыв и характер функции $\sigma''(c_2) = f(E_2)$ определяется контролируемым материалом и энергией E_1 : при $E_1 \ll E_k$ погрешность $\sigma''(c_2)$ с ростом E_2 увеличива-

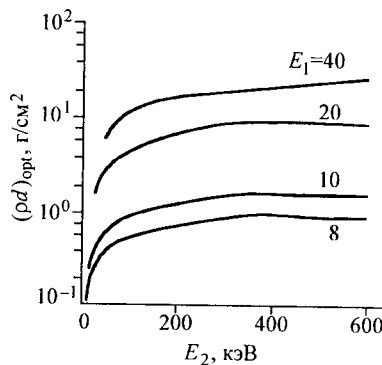


Рис. 3. Зависимости $(\rho d)_{\text{opt}}$ от E_2 при различных E_1

ется, если $E_1 < E_k$, и минимум $\sigma''(c_2)$ наблюдается при $E_2 \gg E_k$. В случае увеличения содержания тяжелых компонентов при $E_1 > E_k$ и $E_2 > E_k$ возрастают значения E_{10} и E_{20} .

Сравнивая кривые на рис. 1 и 2, видим, что функции $\sigma'(c_2) = f(E_2)$ и $\sigma''(c_2) = f(E_2)$ являются гладкими, непрерывными и нечетными при $E_1 > E_k$ и $E_2 > E_k$; функция $\sigma'(c_2) = f(E_2)$ аппроксимируется многочленом не ниже 3-й степени и имеет два минимума, функция $\sigma''(c_2) = f(E_2)$ аппроксимируется уравнением $\sigma''(c_2) = a - bE_2^{-1} - b_1E_2^{-2}$ и имеет один минимум. Наличие минимума на всех зависимостях $\sigma'(c_2) = f(E_2)$ и $\sigma''(c_2) = f(E_2)$ и их непрерывность позволяют, приравняв нулю первую производную по (ρd) от правой части (10), получить трансцендентное уравнение для определения $(\rho d)_{\text{opt}}$ по минимуму МП $\sigma'(c_2)$ и $\sigma''(c_2)$. Однако ввиду сложности получаемых уравнений и необходимости их числового решения для определения $(\rho d)_{\text{opt}}$, более целесообразно найти $(\rho d)_{\text{opt}}$ путем построения зависимостей $\sigma'(c_2) = f(E_2)$ или минимизировать сумму значений погрешностей $k_1\sigma'(c_2) + k_2\sigma''(c_2) = \min$. Здесь значения коэффициентов k_1 и k_2 выбираются пропорционально важности соответствующей погрешности для задачи измерения.

Рассмотренный подход снижает МП более чем на порядок без усложнения прибора, тогда как классический подход к уменьшению погрешностей связан с усложнением прибора более чем в 2 раза для снижения погрешности на 10 % относительных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Онищенко А. М.** Методы повышения точности приборов с источниками ионизирующего излучения. М.: Изд-во стандартов, 1987.
2. **Тихонов А. И., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
3. **Якубович А. Л., Зайцев Е. И., Пржиалговский С. М.** Ядерно-физические методы анализа ядерного сырья. М.: Атомиздат, 1974.
4. **Сторм Э., Исраэль Х.** Сечения взаимодействия гамма-излучения: Справочник: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1976.